蜻蜓點水--跳躍的水漂

壹、 摘要

這個研究主要是探討打水漂的過程中，水漂子與水之力的作用情形，以及改變各項不同的變因後，對於水漂子彈起之成功率的影響。用十元硬幣與圍棋子作為水漂子，以實際拍攝的照片作為推論的根據，理解其打入水面後的運動情況，並藉以推論導致水漂能夠在水面彈跳的原因。

在了解水漂能夠在水面彈跳的原因之後，分析作用在硬幣上的力，並歸納出「硬幣在鉛直方向速度對於時間」的數學式，再利用數學軟體「Maple」繪出其圖形。藉著圖形，可以得知「硬幣在水面下經歷的時間」，而在這篇研究中以「硬幣在水面下經歷的時間之大小」來作為判定硬幣是否容易彈起的依據。並且改變各項不同的變因，藉著觀察圖形的變化歸納出各項不同的變因對於水漂子彈起之成功率的影響。

研究結果發現，成功彈跳的水漂子碰觸水面後，水面的形狀是「通道狀」或是「挖空成近似半球狀」的；以「水漂子前緣先觸及水面」的方式投擲，其成功彈跳的機率比以「後緣先觸及水面」的方式投擲低；「速度與幣面之夾角 β」、「硬幣質量 M」、「重力場 g」、「硬幣厚度 A_t」 與彈起成功率成反變關係；「硬幣與水平之夾角 α」、「速度 V」、「幣面面積 A_n」、「液體密度 ρ」與彈起成功率成正變關係。

貳、 研究設備及器材

一、 透明水槽（20 cm×30 cm×150 cm）……………………………………………………1 個

二、 十元硬幣…………………………………………………………………………數個

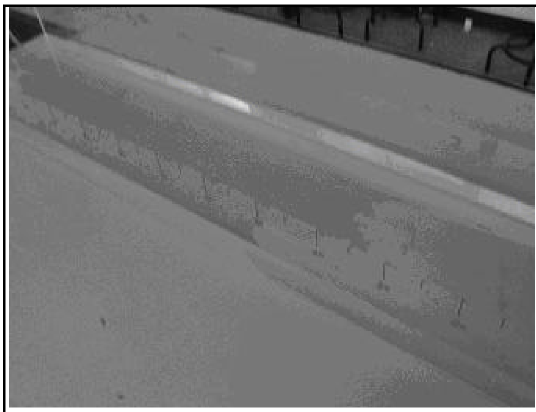
三、 圍棋子（塑膠製）……………………………………………………………數個

四、 攝影器材…………………………………………………………………………1 組

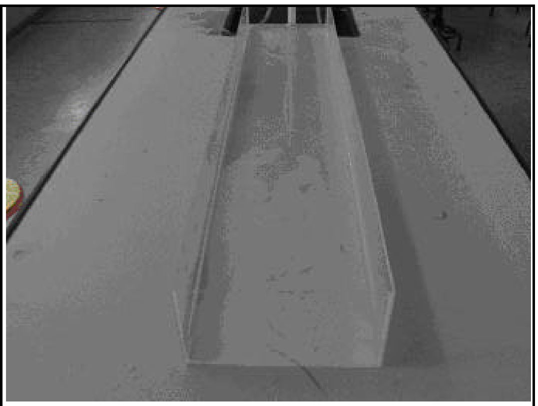
五、 直尺………………………………………………………………………………1 把

六、 電腦（含軟體「會聲會影」作為處理影像用、「Maple」作為數學繪圖用）.....1 部

研究器材架設如（照片 1）、（照片 2）：



（照片 1）



（照片 2）

參、 研究過程及方法

一、拍攝照片的方法：

（一）將水槽裝水半滿（視情況可將水染色以利實驗照片的拍攝）。

（二）將攝影器材置於水槽旁且「十元硬幣第一次碰觸水面的位置」約位於鏡頭畫面的中央。調整焦距到適合觀察十元硬幣接觸水面情形的大小。

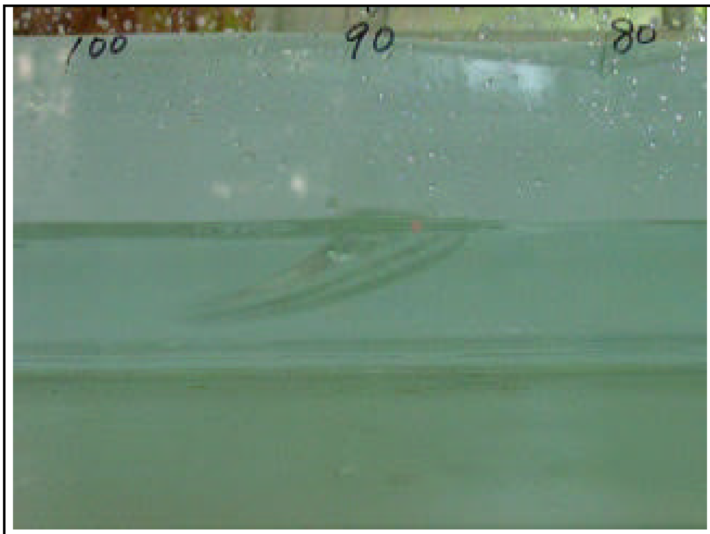
（三）盡量將十元硬幣投擲至能夠被拍攝到的水面範圍內，同時將其接觸水面之情形拍攝下來。

（四）將拍攝下來的影片傳輸到電腦中。找尋碰觸水面瞬間的照片並擷取下來。

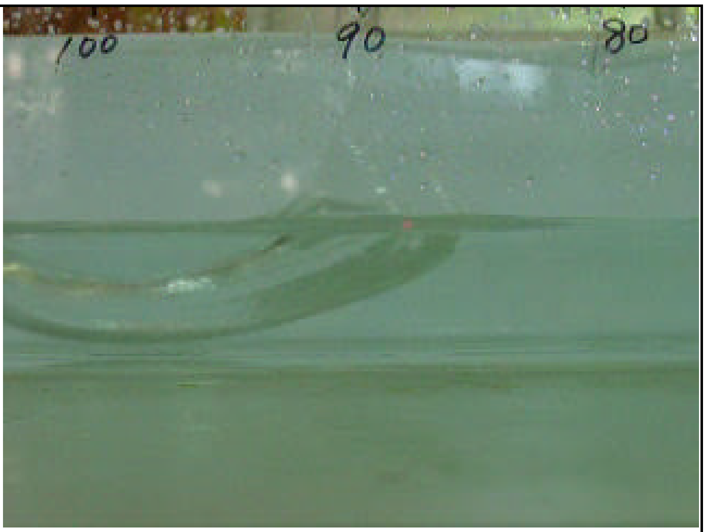
（五）以拍攝出來的照片或影片為根據，推論十元硬幣能夠在水面彈跳的原因。

二、利用上一點的方法，得到了以下照片：

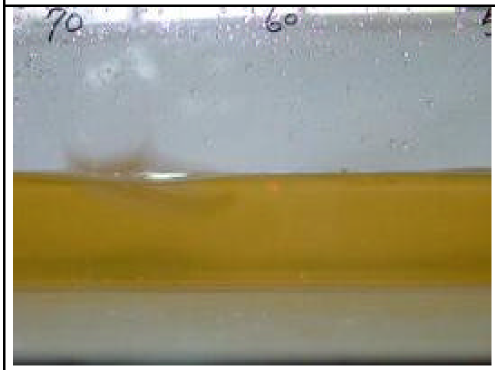
其中（照片 3）、（照片 4）和（照片 5）、（照片 6）、（照片 7）分別為連續的側面照片。



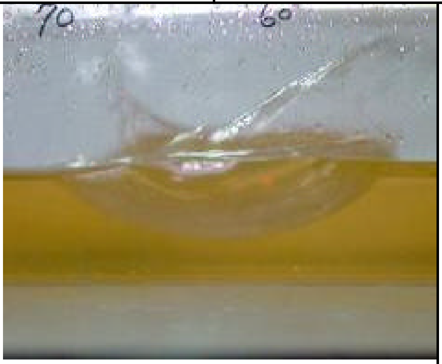
（照片 3）



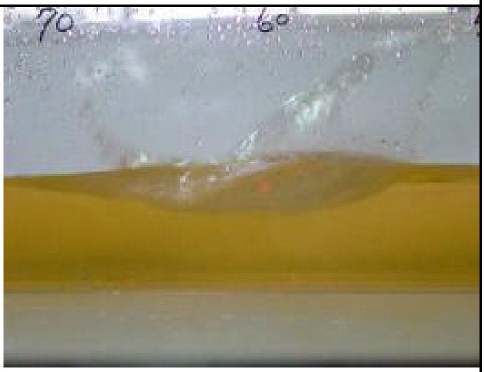
（照片 4）



（照片 5）



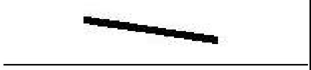
（照片 6）



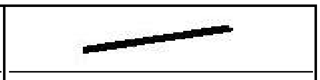
（照片 7）

三、在研究的過程中有以下的發現：

（一）綜合多次的投擲，發現能使十元硬幣彈出水面的成功率與「入射時硬幣接觸水面的方式」有關。十元硬幣的行進方向為由左至右，若以「硬幣前緣先觸及水面」的方式投擲，如(圖 1)，十元硬幣再彈起的成功率很低，常常直接沈入水中，除非其與水平面所夾之銳角很小；以「硬幣後緣先觸及水面」的方式投擲，如(圖 2)，則十元硬幣再彈起的成功率很高。



(圖 1)



(圖 2)

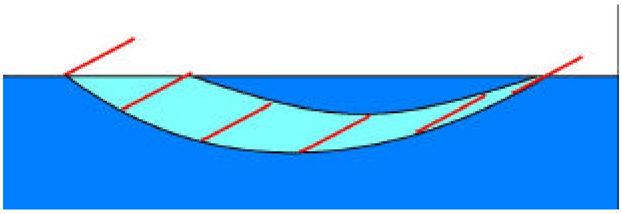
（二）從得到的照片，可以發現成功彈跳的十元硬幣碰觸水面後水面的形狀是「通道狀」的。而且在不同情況下有另一種形狀--「挖空成近似半球狀」。

（三）從照片上由比例可以得知，十元硬幣事實上是深入水面下再彈出，而不是輕輕的點過水面。照片上方的刻度尺每一格之實際長度為 10.0 公分，而十元硬幣之實際直徑為 2.50 公分。利用不同的照片測量成功彈跳的水窟窿形狀，其平均長為 12.67 公分，平均深為 3.07 公分，平均水通道寬為 1.89 公分。從水通道的寬可以得知十元硬幣是如（圖 3）之圖通過(而不會是「幣面垂直通道液面」，或是「平行通道液面而通過」)。

（四）十元硬幣撞擊水面的時候，水主要是被往兩旁排開(從照片可看出水窟窿前後的水面幾乎沒有變化)。

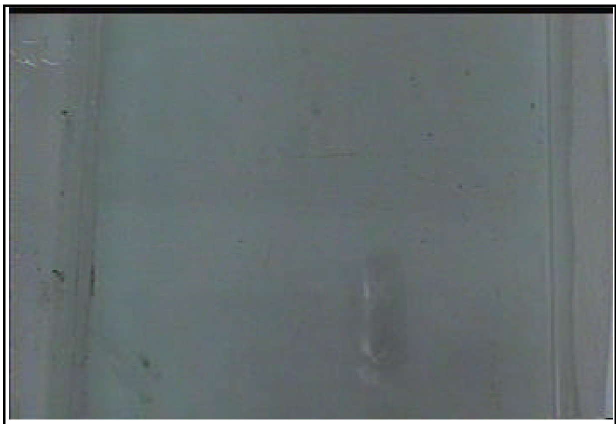
四、根據照片上十元硬幣碰觸水面的情形及上述的種種發現，我對於十元硬幣之所以能夠彈起而不沈到水底的原因有以下的推論：

（一）推測「碰觸至彈起之過程圖--通道狀」如下（十元硬幣的行進方向為由左至右）：



(圖 3)

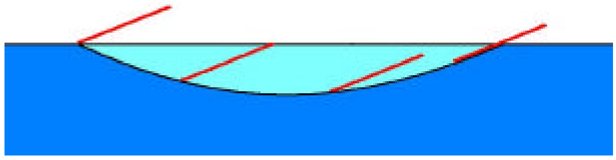
（照片 8）、（照片 9）為連續的俯視照片（十元硬幣的行進方向為由下至上）



（照片 8）

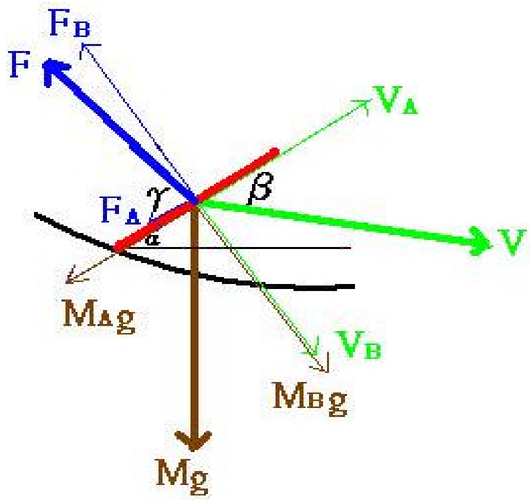
（照片 9）

（二）推測「碰觸至彈起之過程圖--挖空成近似半球狀」如下（十元硬幣的行進方向為由左至右）：



（圖 4）

（三）分析(設以「硬幣後緣先觸及水面」的方式投擲之方式)：



（圖 5）

1. V：硬幣的速度　　　　F：水給予硬幣的阻力　　Mg：硬幣所受之重力

   α：硬幣與水平之夾角　β：V 與幣面之夾角

   γ：F 與幣面之夾角　　　　　令 $90° > \alpha > 0°$ 且 $90° > \beta > 0°$

2. 將 V 分成平行幣面之 $V_A(V\cos\beta)$及垂直幣面之 $V_B(V\sin\beta)$,

   F 分成平行幣面之 $F_A\,(F\cos\gamma)$及垂直幣面之 $F_B\,(F\sin\gamma)$,

   Mg 分成平行幣面之 $M_Ag(Mg\sin\alpha)$及垂直幣面之 $M_Bg(Mg\cos\alpha)$。

3. $F_A=\frac{1}{2}C\cdot r\cdot A_t\cdot V_A{}^2$，$F_B=\frac{1}{2}C\cdot r\cdot A_n\cdot V_B{}^2$。令 A_t (硬幣厚度)很小而 F_A 可忽略，使得 F　F_B。A_n 為幣面面積，且令 C、ρ 在整個過程中不變。

（四）推論：

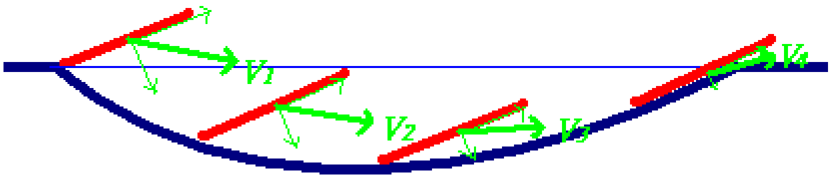
1.推論在水面下的過程中 α 不變，而碰觸水面前的 α 比在水面下過程中的 α 略大。

這是因為剛碰觸水面時水的阻力給硬幣下緣一個力矩，使硬幣轉動，α 變小，迨硬幣上緣低於水面後，水的阻力通過硬幣的質心，便無力矩去使 α 變動了。

若是「挖空成近似半球狀」，其硬幣上緣大部分的時間都高於水面(如此才能挖出一個水窟窿)，則 α 值便一直變小。

2.在水面下的過程內，當 $F_B > M_B g$ 時，其「垂直幣面之合力」會使硬幣受到一個與 V_B 反方向之加速度 a_1，使得 V_B 越來越小；「平行幣面之力 $M_A g$」(原是 $F_A + M_A g$，但忽略 F_A)給予硬幣的加速度 a_2 會使 V_A 減小。若 β 愈來愈小，則 V 方向由略朝下變為略朝上，十元硬幣最後便自水面而出。若 V 方向方向無法由略朝下變為略朝上，則會使十元硬幣沉入水中。

3.V 的示意圖



（圖 6）

4. 推論若以「硬幣前緣先觸及水面」的方式投擲十元硬幣，在剛接觸水面時，水的阻力給硬幣前緣一個力矩，使硬幣轉動(圖 7)的樣子，而繼續進行如以上所推論的過程再彈出。這便可以解釋上述的「研究過程及方法、三、(一)」所言--以「硬幣前緣先觸及水面」的方式投擲十元硬幣時，其與水平面所夾之銳角越小，成功率越大且彈出的距離越遠：因為與水平面所夾之銳角越小，水的阻力給硬幣前緣的力矩越容易使硬幣轉動成如(圖 7)的方向，繼而進行如以上所推論的過程再彈出；若與水平面所夾之銳角過大，則無法在硬幣後緣進入水面下以前轉成如(圖 7)貌(因為只有在硬幣後緣完全進入水面下以前，水的阻力才有給硬幣前緣一個力矩。一旦硬幣已完全進入水面下，水的阻力就會通過硬幣的質心，便無力矩去使硬幣轉動，使硬幣無法彈起)。

(圖 7)

5. 以上之推論可以解釋為什麼水漂可以連續彈跳：因為不論是以「硬幣前緣先觸及水面」的方式投擲十元硬幣，或是「以硬幣後緣先觸及水面」的方式投擲十元硬幣，剛彈離水面都是如(圖 7)的方向，而硬幣在空中不旋轉，使得每一個彈跳都能接續起來。

（五）繪圖分析：

1. t 為時間，t=0 為硬幣上緣低於水面的瞬間，V_A、V_B 分別為 t=0 的 $v_A(t)$、$v_B(t)$，

就「平行於硬幣平面方向」而言，因為阻力 F_A 很小忽略不計，這方向的運動可寫為下式：

$$v_A(t) = V_A - g\cdot(\sin a)\cdot t,$$

再就「垂直於硬幣面的方向」而言：

$$\mathrm{M}\cdot g\cdot\cos a - F_B = M\frac{dV_b}{dt},$$

可解得(詳細算法請見文末附註)：

$$v_B(t)=R\cdot\frac{V_B\cdot(e^{\omega\cdot t}+1)+R\cdot(e^{\omega\cdot t}-1)}{V_B\cdot(e^{\omega\cdot t}-1)+R\cdot(e^{\omega\cdot t}+1)}$$

(其中 $R=\sqrt{\frac{M\cdot g\cdot\cos\alpha}{k}}$，$\omega=\frac{2\sqrt{M\cdot g\cdot k\cdot\cos\alpha}}{M}$，$k=\frac{1}{2}C\cdot\rho\cdot A_n$)，

將 $v_A(t)\cdot\sin\alpha-v_B(t)\cdot\cos\alpha$ 即為「鉛直方向速度對時間」的關係式，令其為 $v_G(t)$。

以接近實際上的數值，令 $\alpha=\frac{\pi}{12}$，　$V_A=2\,(m/s)$，　$V_B=2\,(m/s)$，　$M=0.001\,(kg)$，

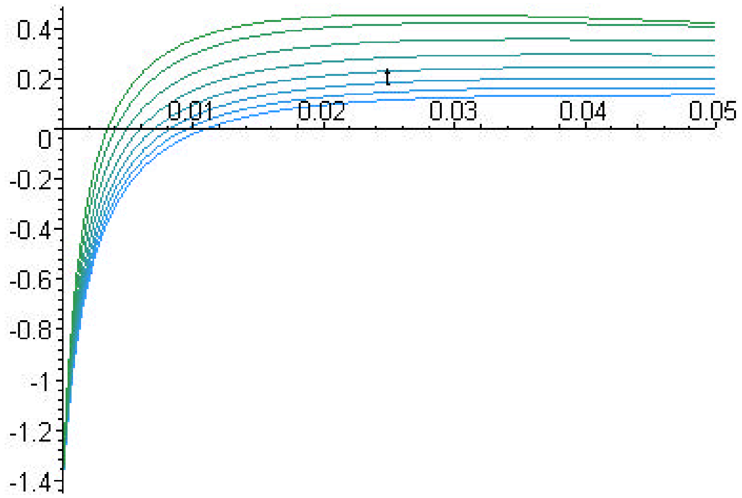
$g=9.8\,(m/s^2)$，　$A_n=0.0005\,(m^2)$，　$\rho=1000\,(kg/m^3)$，　$C=1$。

2. 改變「硬幣與水平之夾角 α」(速度之大小方向及其他變因不變)：

令 $3\le n\le 10$ 且 $n\in N$，　$\alpha=\frac{\pi}{2\times n}$，　$\beta-\alpha=\frac{\pi}{6}\Rightarrow\beta=\alpha+\frac{\pi}{6}$，　$V_A=2\sqrt{2}\times\cos\beta\ (m/s)$，

$V_B=2\sqrt{2}\times\sin\beta\ (m/s)$。

可得 $v_G(t)$ 圖如下(愈綠者角度愈大)：



(圖 8)

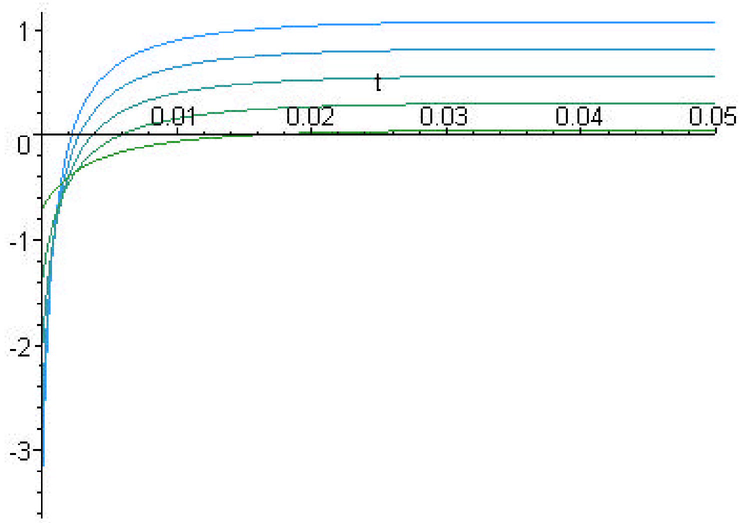
上圖中，「曲線與橫軸之間的面積」為位移，而當面積和為 0 時，即為硬幣出水面的瞬間，此時 t 為「硬幣在水面下過程的時間」。而在這篇研究中以「t 之大小」來作為判定硬幣是否容易彈起的依據。

由上圖，我們可以很清楚的判別出「α 越大越容易彈起」。

3. 改變「速度大小」(方向及其他變因不變)：

令 $1 \le n \le 5$ 且 $n \in N$， $V_A = n\,(m/s)$， $V_B = n\,(m/s)$。

可得 $v_G(t)$ 圖如下(愈綠者速度愈小)：



(圖 9)

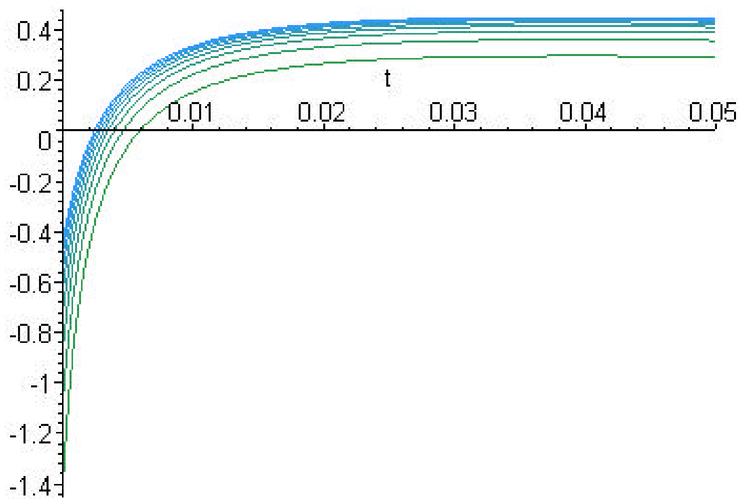
由上圖，我們可以很清楚的判別出「速度越大越容易彈起」。

4. 改變「速度與幣面之夾角 β」(大小及其他變因不變)：

令 $3 \le n \le 10$ 且 $n \in N$， $b - a = \dfrac{p}{2 \times n} \Rightarrow b = a + \dfrac{p}{2 \times n}$， $V_A = 2\sqrt{2} \times \cos b\ (m/s)$，

$V_B = 2\sqrt{2} \times \sin b\ (m/s)$。

可得 $v_G(t)$ 圖如下(愈綠者角度愈大)：



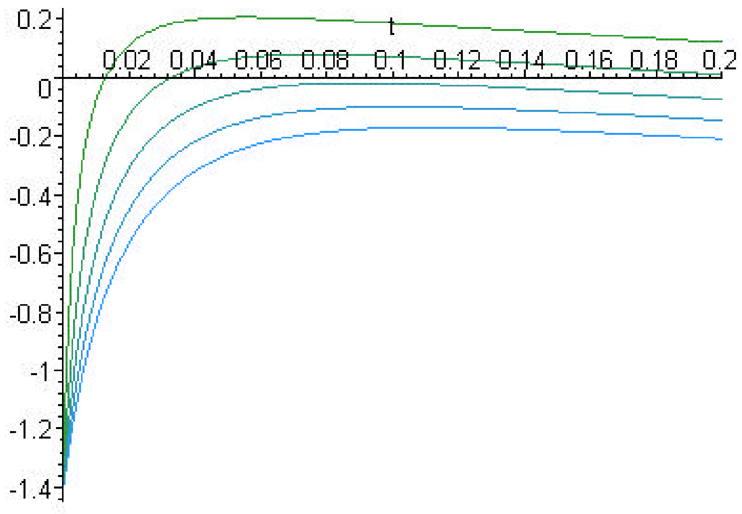
(圖 10)

由上圖，我們可以很清楚的判別出「β 越小越容易彈起」。

5. 改變「質量大小」(其他變因不變)：

令 $1 \le n \le 5$ 且 $n \in N$， $M = 0.002 \times n\,(kg)$。

可得 $v_G(t)$ 圖如下(愈綠者質量愈小)：



(圖 11)

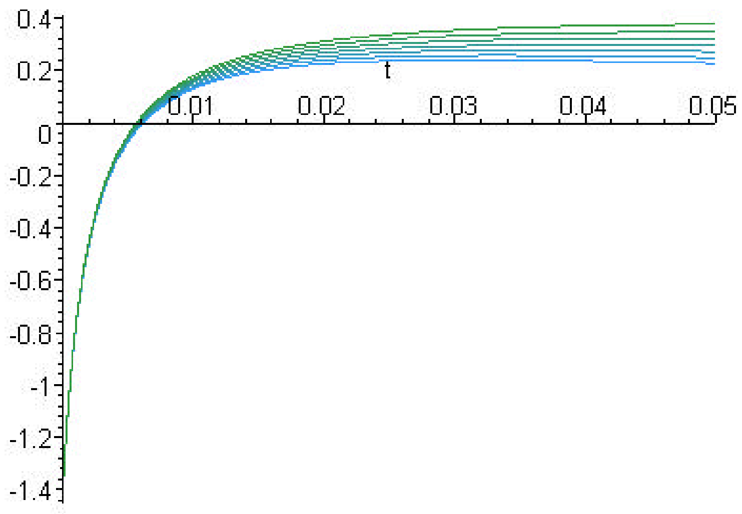
(可發現到在這樣的控制變因下，過大質量的水漂子將會沉入水中)

由上圖，我們可以很清楚的判別出「質量越小越容易彈起」。

6. 改變「重力場強度」(其他變因不變)：

令 $2 \le n \le 8$ 且 $n \in N$， $g = 1.96 \times n\,(m/s^2)$。

可得 $v_G(t)$ 圖如下(愈綠者重力場愈弱)：



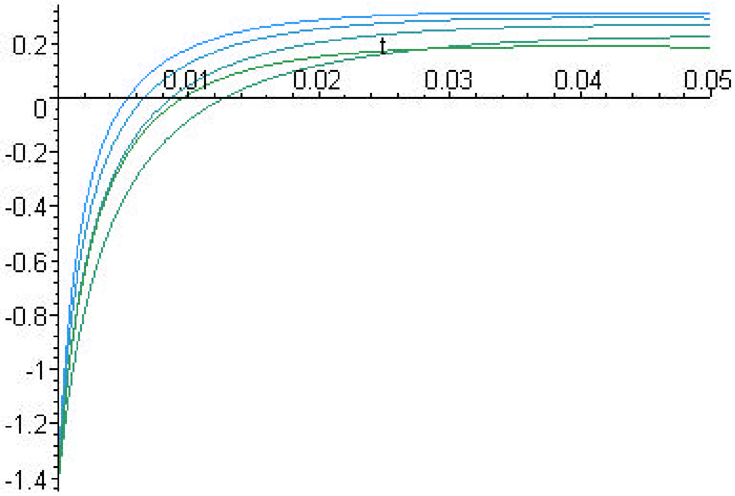
(圖 12)

由上圖，我們可以很清楚的判別出「重力場越弱越容易彈起」。

7. 改變「幣面面積大小」(其他變因不變)：

令 $2 \le n \le 6$ 且 $n \in N$， $A_n = 0.0001 \times n\,(m^2)$。

可得 $v_G(t)$ 圖如下(愈綠者幣面面積愈小)：



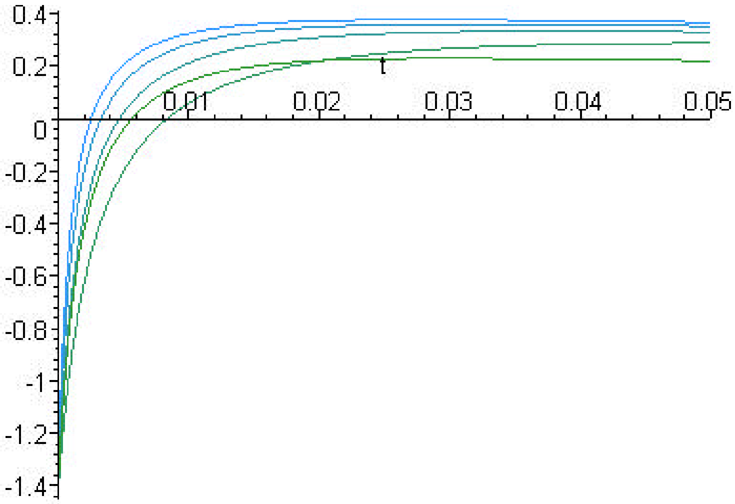
(圖 13)

由上圖，我們可以很清楚的判別出「幣面面積越大越容易彈起」。

8. 改變「液體密度大小」(其他變因不變) ：

令 $1 \le n \le 5$ 且 $n \in N$， $r = 500 \times n\,(kg/m^3)$。

可得 $v_G(t)$ 圖如下(愈綠者液體密度愈小)：



(圖 14)

由上圖，我們可以很清楚的判別出「液體密度越大越容易彈起」。

（六）將以上整理成表（空白格表示其變因固定不變）：

硬幣與水平之夾角 α	速度 V	速度與幣面之夾角 β	硬幣質量 M	重力場 g	幣面面積 A_n	液體密度 ρ	硬幣厚度 A_t	彈起成功率	原因
↑								↑	α↑，而$(\beta-\alpha)$固定，使 β↑且 V_B↑，F_B↑，$(\beta-\alpha)$易↓，V易朝上而出水面 。
	↑							↑	V_B↑，F_B↑，使$(\beta-\alpha)$易↓，V 易朝上而出水面 。 V_A不易↓。
		↓						↑	β↓，使 V 易朝上而出水面 。
			↓					↑	(F_B-M_Bg) ↑，a_1↑，V_B易↓。 (F_A+M_Ag) ↓，a_2↓，V_A不易↓。
				↓				↑	(F_B-M_Bg) ↑，a_1↑，V_B易↓。 (F_A+M_Ag) ↓，a_2↓，V_A不易↓。
					↑			↑	由 F_B=? $C\rho A_n V_B^2$ 可知，A_n↑，F_B↑， (F_B-M_Bg) ↑，a_1↑，V_B易↓。
						↑		↑	由 F_B=? $C\rho A_n V_B^2$ 可知，ρ↑，F_B↑， (F_B-M_Bg) ↑，a_1↑，V_B易↓。
							↓	↑	由 F_A=? $C\rho A_t V_A^2$ 可知，A_t↓，F_A↓， (F_A+M_Ag) ↓，a_2↓，V_A不易↓。

(表 1)

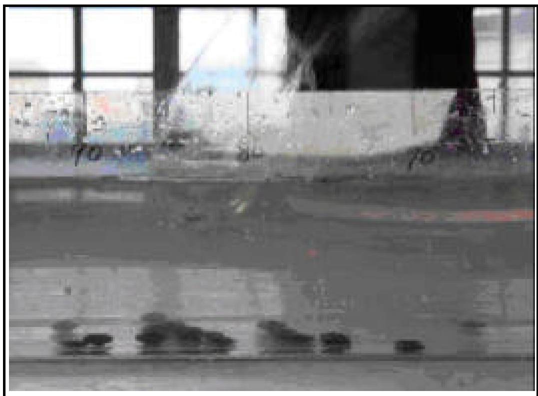
推測「挖空成半近似球狀」以及「通道狀」其中的差異是，「挖空成半近似球狀」的情況中十元硬幣進入水面下較淺，導致硬幣上緣在整個過程中皆碰觸到水面而形成「挖空成半近似球狀」。也就是說，於上表中可以知道：「速度與幣面之夾角 β」、「硬幣質量 M」、「重力場 g」與「硬幣厚度 A_t」愈小，而「硬幣與水平之夾角 α」、「速度 V」、「幣面面積 A_n」與「液體密度 ρ」愈大，愈容易造成「挖空成半近似球狀」。

（七）在做完以上的探討後，改以圍棋子作為水漂子，進行更進一步的探討：

1.發現：

(1) 以圍棋子作為水漂子時，以「圍棋子前緣先觸及水面」的方式投擲圍棋子，可以輕易的彈跳，且不限其與水平面所夾之銳角很小的時候。

(2) 從以下的的照片，可以發現成功彈跳的圍棋子碰觸水面後水面的形狀是「挖空成近似半球狀」的(證明了「研究過程及方法、三、(二)」的推測)。

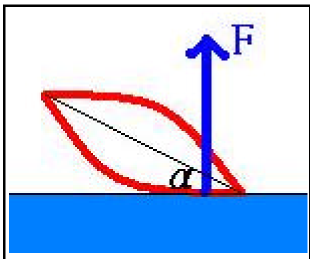


（照片 10）

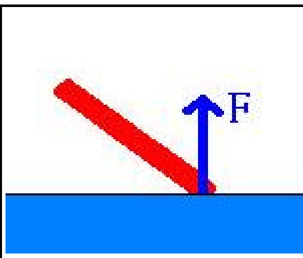
（照片 11）

2.推測造成這些現象的原因是：

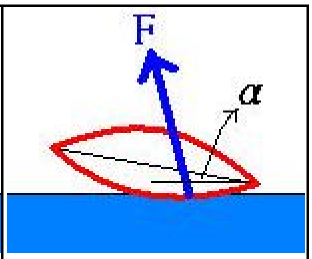
(1) 由於圍棋子並不是一個平面，而是有弧度的，因此有較大的平面去觸及水面，而有了較大的 F 去轉動它，所以就算以前緣先觸及水面的方式投擲且其與水平面所夾之銳角較大時，也可以成功的彈起，見(圖 15)、(圖 16)。若 α 很小，甚至剛觸及水面時 F 就已經在減緩其沉入水中的速度了(圖 17)。所以可以知道若以「前緣先觸及水面」的方式投擲，如「圍棋子狀的水漂子」比「平面的水漂子」還容易成功。



(圖 15)



(圖 16)

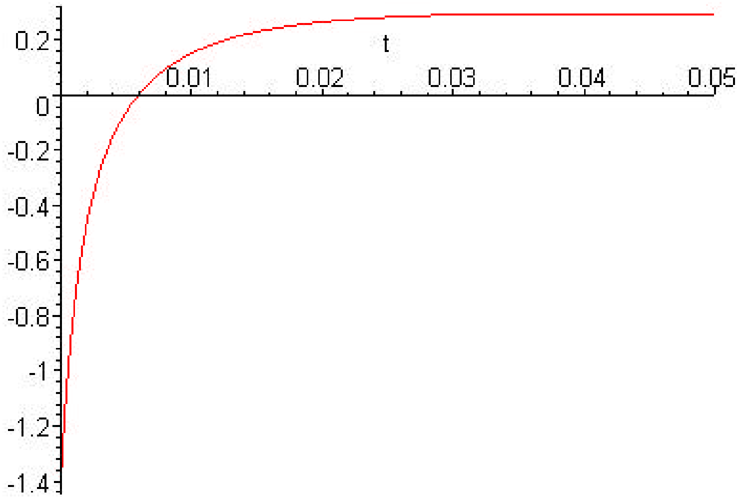


(圖 17)

(2) 由於圍棋子的質量比十元硬幣小，而從(表 1)可以得知「質量越小越容易彈起」，故成功彈跳的圍棋子碰觸水面後水面的形狀是「挖空成近似半球狀」的。

肆、 討論

一、每一張照片的間隔為 1/30 秒。比較由「繪圖所得出之硬幣在水面下的過程時間」，以及「照片之硬幣在水面下的過程時間」，整體上，我們可以發現兩者的時間其實大約是接近的(繪圖時所帶入之各項變因的值皆儘量符合現實)，兩者相互對照、呼應。



(圖 18)

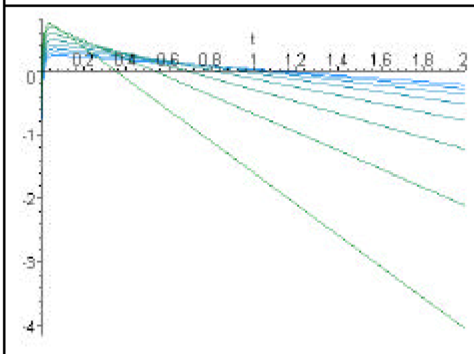
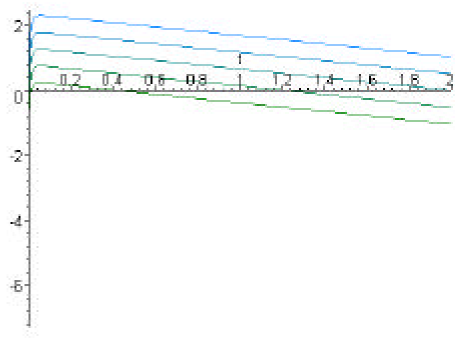
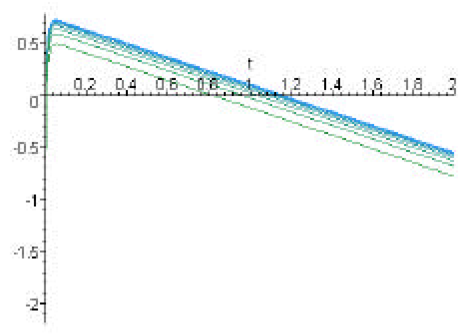
二、往後可以繼續的進一步研究：

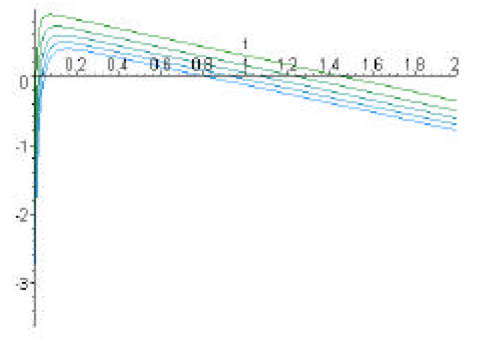
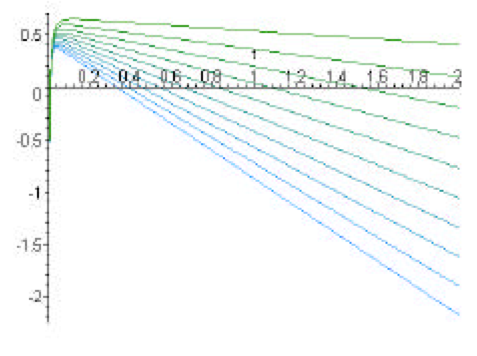
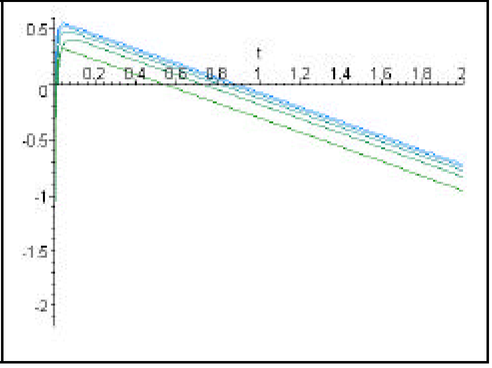
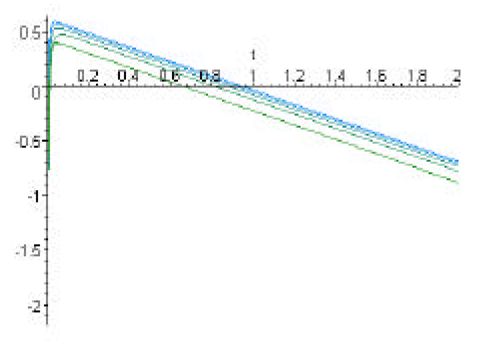
(一) 由於電腦硬體功能不足以及式子積分後過於龐大，無法得到精確的硬幣在水面下的過程時間(運算極為緩慢)。往後可以朝「得到精確的硬幣在水面經歷的時間」這方面去努力。

(二) $v_G(t)$圖中，「硬幣出水面後的的圖形」代表著「若在入射的水面之上依然是水的話」的鉛直方向速度之變化情形。但猜測可能還與硬幣能夠彈跳的次數有所關聯，很值得去深入探討。

(三) 在「改變幣面面積大小」與「改變液體密度大小」的$v_G(t)$圖中，可以發現最下兩條曲線有交叉的情形，其原因很值得去深入探討。

(四) 以下是 0 至 2 秒之$v_G(t)$圖：

改變硬幣與水平之夾角 α (圖 19)	改變速度大小 (圖 20)	改變速度與幣面之夾角 β (圖 21)
		

改變質量大小（圖 22）	改變重力場強度（圖 23）	改變幣面面積大小（圖 24）
		
改變液體密度大小（圖 25）		
	由以上可以發現：(圖 20)、（圖 21）、(圖 22）、(圖 24）及(圖 25)都是類似的，在後面階段有固定的斜率。可是(圖 19）及(圖 23)卻呈現奇特的「扭轉」或「發散」的圖形，其原因很值得去深入探討。	

(五)「水漂子的轉動」、「水漂子的形狀」等等變因，以及如何才能「連續彈跳次數最多」(這篇研究是在探討怎樣最容易彈跳起來，而不一定能連續彈跳次數最多)，也是往後很值得去推廣研究的。

伍、 研究結論

一、 依據攝影及影像處理軟體的輔助，發現成功彈跳的水漂子碰觸水面後，在水中留下的痕跡有兩種狀況，一種是在水裡形成「通道狀」，另一種是在水表面上「挖空成近似半球狀」的現象。

二、 水漂子能否成功彈跳，與投擲水漂入水的接觸方式有關。以「水漂子後緣先觸及水面」的方式投擲，其成功彈跳的機率比以「前緣先觸及水面」的方式投擲高得多。因為以「前緣先觸及水面」的方式投擲時，只有水漂子與水面的夾角不大時才能彈起。

三、 在水面下的過程內，當「垂直幣面方向之阻力 F_B」大於「垂直幣面方向之重力 M_Bg」時，會使得「垂直幣面方向之速度 V_B」越來越小；「平行幣面方向之重力 M_Ag」也會使「平行幣面方向之速度 V_A」減小。若「速度與幣面之夾角 β」愈來愈小，則速度方向由略朝下變為略朝上，十元硬幣最後便自水面而出。若速度方向方向無法由略朝下變為略朝上，則會使十元硬幣沉入水中。

四、 利用運動方程式及數學繪圖軟體的輔助分析，找出各變項與彈起成功率的關係，發現「速度與幣面之夾角 β」、「硬幣質量 M」、「重力場 g」、「硬幣厚度 A_t」 與彈起成功率成反變關係；「硬幣與水平之夾角 α」、「速度 V」、「幣面面積 A_n」、「液體密度 ρ」與彈起成功率成正變關係。

陸、　參考資料

一、 林明瑞主編：高級中學物質科學物理篇上、下冊，南一書局出版。

二、 Halliday、Resnick、Walker 原著：Fundamentals of Physics Fifth Edition。

段宏昌校閱，黃崢瑜、賴芳儀、陳志仁、陳莉絹編譯：物理(上)--第五版，全華科技圖書出版。

捌、　附註

上面提到的 $v_B(t)$ 算法如下：

$$M\cdot g\cdot\cos a-k\cdot V_B{}^2=M\frac{dV_B}{dt}$$，令 $M=a$、$M\cdot g\cdot\cos a=b$、$k=c$、$V_B=y$，

使成為 $a\dfrac{dy}{dt}=b-cy^2\Rightarrow\dfrac{a}{b-cy^2}dy=dt\Rightarrow\dfrac{a}{2\sqrt{b}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}y}+\dfrac{1}{\sqrt{b}-\sqrt{c}y}\right)dy=dt\Rightarrow$

$$\frac{a}{2\sqrt{bc}}\left(\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}y}-\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{c}y-\sqrt{b}}\right)dy=dt\Rightarrow\frac{a}{2\sqrt{bc}}\int\left(\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}y}-\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{c}y-\sqrt{b}}\right)dy=\int dt\Rightarrow$$

$\dfrac{a}{2\sqrt{bc}}\left(\ln\left|\dfrac{\sqrt{b}+\sqrt{c}y}{\sqrt{c}}\right|-\ln\left|\dfrac{-\sqrt{b}+\sqrt{c}y}{\sqrt{c}}\right|\right)=t+h\Rightarrow\dfrac{a}{2\sqrt{bc}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{b}+\sqrt{c}y}{\sqrt{c}y-\sqrt{b}}\right|=t+h$，$h$ 為常數 $\Rightarrow$

$$\ln\left|\frac{\sqrt{b}+\sqrt{c}y}{\sqrt{c}y-\sqrt{b}}\right|=\frac{2\cdot(t+h)\cdot\sqrt{bc}}{a}\Rightarrow\frac{\sqrt{b}+\sqrt{c}y}{\sqrt{c}y-\sqrt{b}}=e^{\frac{2\cdot(t+h)\cdot\sqrt{bc}}{a}}\Rightarrow\frac{\sqrt{c}y}{\sqrt{b}}=\frac{e^{\frac{2\cdot(t+h)\cdot\sqrt{bc}}{a}}+1}{e^{\frac{2\cdot(t+h)\cdot\sqrt{bc}}{a}}-1}\Rightarrow$$

$$y=\sqrt{\frac{b}{c}}\cdot\frac{e^{\frac{2\cdot(t+h)\cdot\sqrt{bc}}{a}}+1}{e^{\frac{2\cdot(t+h)\cdot\sqrt{bc}}{a}}-1}\Rightarrow v_B(t)=\sqrt{\frac{M\cdot g\cdot\cos a}{k}}\cdot\frac{e^{\frac{2\sqrt{M\cdot g\cdot k\cdot\cos a}}{M}\cdot(t+h)}+1}{e^{\frac{2\sqrt{M\cdot g\cdot k\cdot\cos a}}{M}\cdot(t+h)}-1}$$

t=0 時可得 $h=\dfrac{M\cdot\ln\left(\dfrac{V_B\sqrt{\dfrac{k}{M\cdot g\cdot\cos a}}+1}{V_B\sqrt{\dfrac{k}{M\cdot g\cdot\cos a}}-1}\right)}{2\sqrt{M\cdot g\cdot k\cdot\cos a}}$，

代入得 $v_B(t)=R\cdot\dfrac{V_B\cdot(e^{w\cdot t}+1)+R\cdot(e^{w\cdot t}-1)}{V_B\cdot(e^{w\cdot t}-1)+R\cdot(e^{w\cdot t}+1)}$，

其中 $R=\sqrt{\dfrac{M\cdot g\cdot\cos a}{k}}$，$w=\dfrac{2\sqrt{M\cdot g\cdot k\cdot\cos a}}{M}$，$k=\dfrac{1}{2}C\cdot r\cdot A_n$。