目次

圖表目次

檢定樂透

壹、研究動機與目的

自 91 年 1 月 22 日台北銀行發行 091001 期樂透彩券以來，由前幾期的開獎資料我們觀察到連續整數與前後二期出現相同號碼之次數似乎太多。當時我們懷疑可能一般人的直覺會與數學現象有所出入，另外我們還看到一些奇形怪狀的社會現象。每天打開電視機或翻開報紙，呈現在眼前的是一大堆樂透明牌的消息，而且很多參加報明牌的特別來賓更是各種類型的評論節目都可以聽到他們在那邊高談闊論。難道是負責開獎的單位與這些評論人真的有掛勾情事嗎？還是根本沒有明牌，只是這些電子媒體或平面媒體單位將全國閱聽大眾當成白癡般地擺佈？因此我們想要一探究竟，真的有所謂「明牌」嗎？如同剛完成的總統大選的開票之夜，部分電視台猛灌票，害全體國民差點發狂，這些媒體為了收視率不問事實根據的現象頗值得我們三思。然而我們是否也可以只是依照想當然爾，就可以對這些媒體提出指控呢？是否在提出我們的批判之前，我麼必須先提出一些客觀的推論與證據，如此方能給國人一點省思空間。

本研究論文的目的是以科學的方法提出數據輔以理論做基礎，推論開獎的公正性，而不致流於想當然爾或是人云亦云隨著別人的論調盲從，進一步匡正社會大眾追求明牌的歪風。

貳、研究過程與方法

一、文獻探討

高中數學機率課程談到重複試驗的問題，對於一個成功機率 p 的白努利試驗連續做 N 次當中恰有 K 次成功的機會記為：

$$C_K^N p^K (1-p)^{N-K} \tag{1}$$

如果將(1-p)以 q 表示，事實上式（1）是二項展開式，$(p+q)^N=\sum_{j=0}^{N} C_j^N p^j q^{N-j}$，第 $j=K$ 項。

因此一般機率或統計的書本通稱此種機率分配模式為『二項分配』，以 B(n,p)表示，亦即重複 n 次白努利試驗每次成功機率為 p 的機率分配。

（一）二項分配

令 $X_P^n=K$ 表示具有 B(n,p)分配，重複 n 次白努利試驗得 K 次成功的事件，而且 $P(X_P^n=K)$ 表示事件 $X_P^n=K$ 的機率。因此，

$$P(X_P^n=K)=C_K^n p^K (1-p)^{n-K}\text{。} \tag{2}$$

（二）期望次數：重複 n 次白努利試驗每次成功機率為 p 的期望成功次數，以 m 表示。

$$\begin{aligned} m &= E(X_P^n) \\ &= \sum_{k=0}^{n} k\cdot C_k^n p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} np\cdot C_{k-1}^{n-1} p^{k-1}(1-p)^{n-k} \\ &= np\sum_{k=1}^{n} C_{k-1}^{n-1} p^{k-1}(1-p)^{n-k} \end{aligned}$$

$$=np(p+(1-p))^{n-1} \;=\; np。 \tag{3}$$

(三)變異數:即離均差平方之期望值,也就是標準差的平方,以s^2表示。

$$s^2=E[(X_p^n-m)^2]$$
$$=E[(X_p^n)^2-2mE(X_p^n)+m^2]$$
$$=E[(X_p^n)^2]-m^2。$$

因為 $$E[X_p^n(X_p^n-1)]=\sum_{k=0}^{n}k(k-1)\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$=\sum_{k=2}^{n}\frac{n!}{(k-2)!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$=n(n-1)p^2\sum_{k=2}^{n}\frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!}p^{k-2}(1-p)^{n-k}$$

$$=n(n-1)p^2。$$

又 $$E[X_p^n(X_p^n-1)]=E[(X_p^n)^2-X_p^n]=E(X_p^n)^2-E(X_p^n)=E(X_p^n)^2-m$$

$$\Rightarrow E(X_p^n)^2=n(n-1)p^2+m,$$

因此 $$s^2=E[(X_p^n)^2]-m^2=n(n-1)p^2+m-m^2=np(1-p)。 \tag{4}$$

標準差$s=\sqrt{np(1-p)}$。

(四)樣本成功次數與樣本平均每次成功次數:

每次成功機率為p的白努利試驗重複n次所得成功次數,稱為樣本成功次數。樣本成功次數除以n,稱為樣本平均每次成功次數以$\bar{X}$表示,也就是平均每做一次白努利試驗的成功次數,通常用來估計每次試驗之成功機率p。

$$X_i=\begin{cases}1\ ,\text{第}i\text{次成功}\\ 0\ ,\text{第次失敗}\end{cases},$$

樣本成功次數為K: $X_P^n=K\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}X_i=K$,

樣本平均每次成功次數$\bar{X}$: $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$。

在一個重複n次的白努利試驗中也就是二項式分配的機率模式,我們還可以探討累積機率分配或累積次數分配,其目的是利用n次試驗之成功次數若包含於某一段範圍內的話,我們就接受某一個原始的假設,因為在該假設成立之下,由累積機率分配知道成功次數包含於這一範圍內的機率特別高。相反地,成功次數若不在該一範圍內,我們就拒絕接受該原始的假設。因此無論以下累積或以上累積機率分配在提供一個科學性的判斷依據上將會扮演舉足輕重的角色。

(五)樣本變異數:

樣本與樣本平均每次成功次數差的平方之平均數叫做樣本變異數,通常用來估計$\frac{s^2}{n}$。

樣本變異數 $S^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$**，**

然而為了估計 s^2 **的正確性會將** S^2 **分母調整為 n-1，稱為不偏估計，如下式表示。**

樣本變異數 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 。

所謂不偏估計就是重複無限多次估計時，這些估計值的平均恰好為被估計之對像，亦即

$E(S^2)=\frac{s^2}{n}$ 。

樣本變異數的平方根叫做樣本標準差 S**。另外樣本平均數和樣本標準差也可以用來估計母體期望值的可能範圍。在章節參三當中將有進一步說明如何選取母體期望值的可能範圍。通常母群體的變異數不知道時才用樣本變異數來估計母體期望值的可能範圍。**

（六）範例圖形

1、機率分配散佈圖，圖表(1)**以** n=16，p=0.55 **為例：**

$P(X_{0.55}^{16}=K)$ **之最大值發生在** K=9，**期望次數** $E(X_{0.55}^{16})=16\times 0.55=8.8$ 。

變異數 $s^2=np(1-p)=16\times 0.55\times 0.45=3.96$。**標準差** $s=\sqrt{np(1-p)}=1.98997487$。

2、機率分配散佈圖，圖表(2)**以** n=16，p=0.5 **為例：**

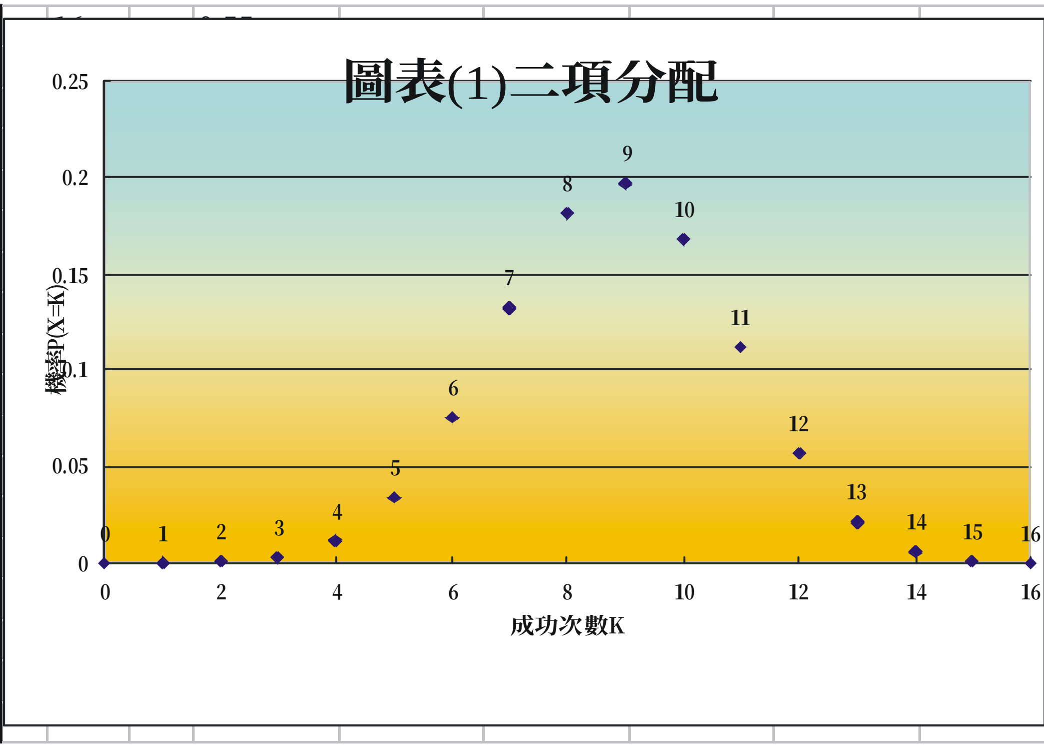
$P(X_{0.5}^{16}=K)$ **之最大值發生在** K=8，**期望次數** $E(X_{0.5}^{16})=16\times 0.5=8$ 。

變異數 $s^2=np(1-p)=16\times 0.5\times 0.5=4$。**標準差** $s=\sqrt{np(1-p)}=2$。

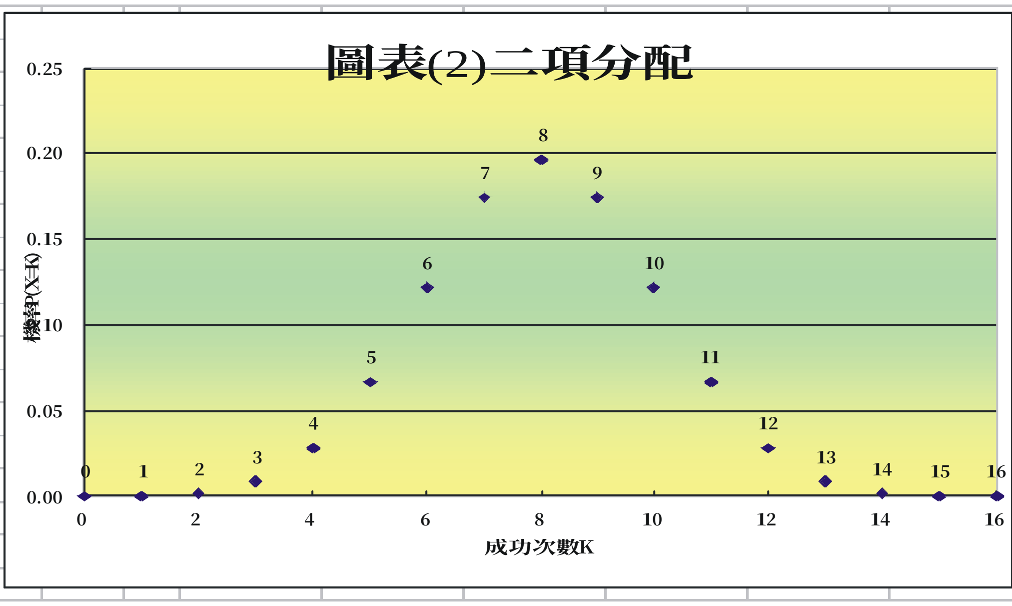
變異數的單位是觀察值單位的平方，標準差的單位與原來觀察值的單位一致，因此兩者可依情況互相換算，功能也有相類似性。標準差接近離均差的期望值，可以表示資料分布的離散情形，統計上又可用來估計統計數值的誤差範圍，可信度的大小。

由圖表（1**）與圖表（**2**），知道** $P(X_P^n=K)$ **之最大值發生的** K **值與期望次數** $E(X_P^n)$ **有密切的關係，**K **值是與期望值最接近的整數。這個觀察是直覺式的印象在此我們不做深入的探討，因為它與本篇研究論述關聯性不強。我們不做證明。**

K	P(X=K)
0	2.83E-06
1	5.53E-05
2	0.000507
3	0.002891
4	0.011483
5	0.033685
6	0.075479
7	0.131788
8	0.181209
9	0.196869
10	0.168433
11	0.112288
12	0.057184
13	0.021505
14	0.005632
15	0.000918
16	7.01E-05



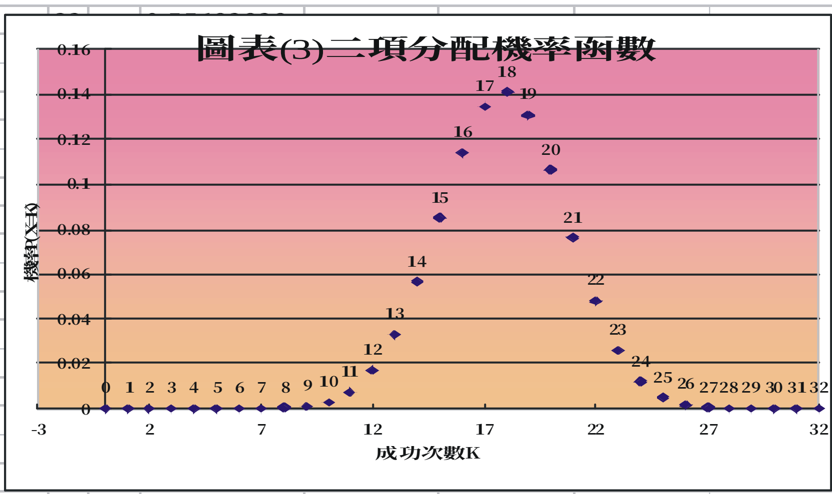
K	P(X=K)
0	0.000015
1	0.000244
2	0.001831
3	0.008545
4	0.027771
5	0.066650
6	0.122192
7	0.174561
8	0.196381
9	0.174561
10	0.122192
11	0.066650
12	0.027771
13	0.008545
14	0.001831
15	0.000244
16	0.000015

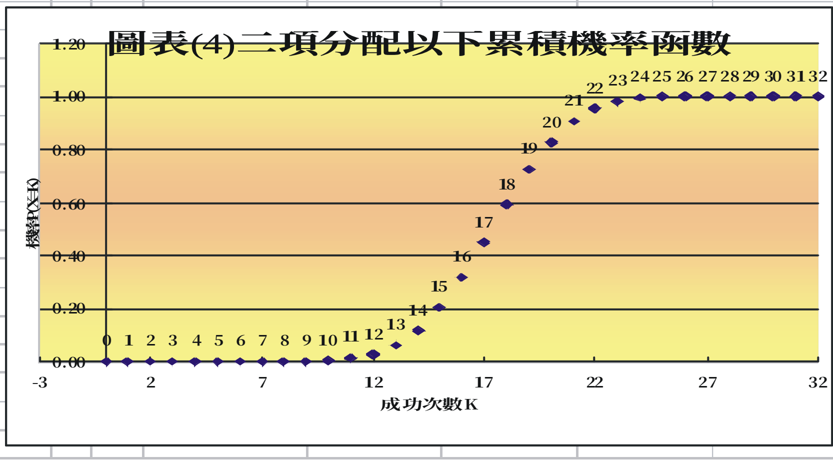


3、累積分配，圖表(3)、圖表(4)以 n=32，p=0.55682828 **為例：**

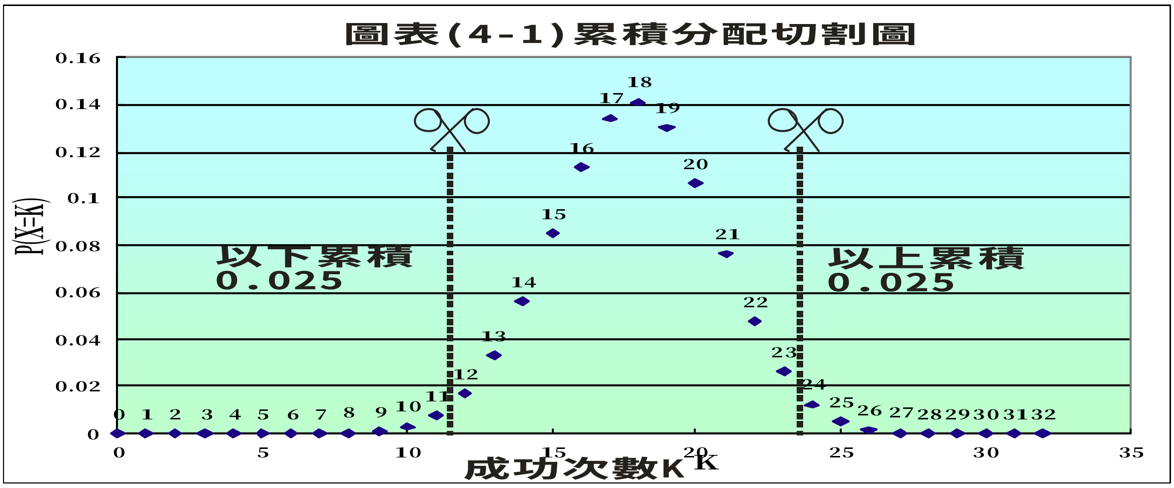
$P(12 \le X^{32}_{0.55682828} \le 23) = P(11 < X^{32}_{0.55682828} < 24)$ = 1-0.012388-0.019598 =0.968014 **表示重複做** 32 **次每次成功機率** 0.55682828 **的白努利試驗，成功次數介於** 12 **與** 23 **之間的機率為** 0.968014。**反之，成功的次數小於** 12 **次或大於** 23 **次的機會只有** 0.012388+0.019598=0.031986。

K	P(X=K)	以下累積	以上累積
0	4.9E-12	0.000000	1.000000
1	1.97E-10	0.000000	1.000000
2	3.84E-09	0.000000	1.000000
3	4.82E-08	0.000000	1.000000
4	4.39E-07	0.000000	1.000000
5	3.09E-06	0.000004	1.000000
6	1.75E-05	0.000021	0.999996
7	8.16E-05	0.000103	0.999979
8	0.00032	0.000423	0.999897
9	0.001073	0.001496	0.999577
10	0.003101	0.004596	0.998504
11	0.007791	0.012388	0.995404
12	0.017132	0.029520	0.987612
13	0.033116	0.062636	0.970480
14	0.05647	0.119106	0.937364
15	0.085143	0.204249	0.880894
16	0.113665	0.317913	0.795751
17	0.134414	0.452328	0.682087
18	0.140739	0.593067	0.547672
19	0.130298	0.723365	0.406933
20	0.106414	0.829779	0.276635
21	0.076403	0.906182	0.170221
22	0.047999	0.954181	0.093818
23	0.026221	0.980402	0.045819
24	0.012355	0.992757	0.019598
25	0.004967	0.997724	0.007243
26	0.00168	0.999405	0.002276
27	0.000469	0.999874	0.000595
28	0.000105	0.999979	0.000126
29	1.82E-05	0.999998	0.000021
30	2.29E-06	1.000000	0.000002
31	1.86E-07	1.000000	0.000000
32	7.3E-09	1.000000	0.000000





如果將圖表(3)、(4)視為連續函數並將較不可能發生的偏大與偏小次數切除，也就是將以上與以下累積各 0.025 切除如下圖表(4-1)，中間的次數介於 12 與 23 之間是比較可能發生處，此處發生的機率約 0.95。



二、42 選 6 小樂透

(一) 出現連續整數的機率：

由 1 至 42 正整數當中取出 6 個數字方法數有 $C_6^{42}=5245786$。被選的 6 個數當中含有連

續整數的方法數：

令開獎球號依先後順序 $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6$，

開獎球號由小而大 $X_{(1)}, X_{(2)}, X_{(3)}, X_{(4)}, X_{(5)}, X_{(6)}$。

$$\begin{cases} d_1 = X_{(1)} \in N, \\ d_j = X_{(j)} - X_{(j-1)} \in N,\ j = 2,3,4,5,6 \end{cases} \tag{5}$$

因為 $1 \le d_j \le 37, \forall j = 1,2,3,4,5,6$ **而且** $6 \le X_{(6)} = d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 + d_6 \le 42$

因此，最後一個不等式正整數解共有 $H_{36}^{7} = C_6^{42} = 5245786$ **組，也就是全部方法數。**

開獎球號有連續整數方法數

$\Leftrightarrow$ d_2, d_3, d_4, d_5, d_6 **至少一個變數為** 1 **之正整數解個數。**

$\Leftrightarrow$ $d_2' = d_2 - 1, d_3' = d_3 - 1, d_4' = d_4 - 1, d_5' = d_5 - 1, d_6' = d_6 - 1$ **至少一個變數為** 0 **之非負整數解個數。**

$\Leftrightarrow$ **全部方法數** $-\{d_2', d_3', d_4', d_5', d_6'$ **皆為正整數方法數**$\}$。

$6 \le X_{(6)} = d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 + d_6 \le 42$ **而且** $d_2', d_3', d_4', d_5', d_6'$ **皆為正整數解個數：**

$d_1' = d_1 - 1, d_2'' = d_2' - 1, d_3'' = d_3' - 1, d_4'' = d_4' - 1, d_5'' = d_5' - 1, d_6'' = d_6' - 1$ **為非負整數，**

$d_1' + d_2'' + d_3'' + d_4'' + d_5'' + d_6'' \le 31$ **非負整數個數** $H_{31}^{7} = C_{31}^{37} = 2324784$，

開獎球號有連續整數方法數

$$5245786 - H_{31}^{7} = 5245786 - 2324784 = 291002。 \tag{6}$$

開獎球號有連續整數機率

$$\frac{2921002}{5245786} = 0.55682828。 \tag{7}$$

（二）X_j **的機率分配：**

由 42 **個號碼球任意取出一球，球號數記為** X_1。**由於每個球被選中的機會均等，機率分配很均勻，因此機率函數可以定義為，** $P(X_1 = K) = \dfrac{1}{42}, K \in \{1,2,3,\cdots,42\}$。（8）

第一個被選取的球號數記為 X_1 **不放回，第二個被選球號數記為** X_2。X_2 **的機率函數求法，**

$$\begin{aligned} P(X_2 = K) &= P(X_2 = K \cap X_1 \ne K),\ K \in \{1,2,3,\cdots,42\} \\ &= P(X_1 \ne K) P(X_2 = K \mid X_1 \ne K) = \frac{41}{42} \cdot \frac{1}{41} = \frac{1}{42}。 \end{aligned} \tag{9}$$

同理，第一、二個被選取的球號數分別記為 X_1、X_2 **不放回，第三個被選球號數記為** X_3。X_3 **的機率函數求法，**

$$P(X_3 = K) = P(X_1 \ne K) P(X_1 \ne K \cap X_2 \ne K) P(X_3 = K \mid X_1 \ne K \cap X_2 \ne K) = \frac{41}{42} \cdot \frac{40}{41} \cdot \frac{1}{40} = \frac{1}{42}。 \tag{10}$$

X_4, X_5, X_6 **的機率函數求法，**

$$P(X_4 = K) = \frac{41}{42} \cdot \frac{40}{41} \cdot \frac{39}{40} \cdot \frac{1}{39} = \frac{1}{42}, K \in \{1,2,3,\cdots,42\}。 \tag{11}$$

$$P(X_5=K)=\frac{41}{42}\cdot\frac{40}{41}\cdot\frac{39}{40}\cdot\frac{38}{39}\cdot\frac{1}{38}=\frac{1}{42},\ K\in\{1,2,3,\cdots,42\}。\tag{12}$$

$$P(X_6=K)=\frac{41}{42}\cdot\frac{40}{41}\cdot\frac{39}{40}\cdot\frac{38}{39}\cdot\frac{37}{38}\cdot\frac{1}{37}=\frac{1}{42},\ K\in\{1,2,3,\cdots,42\}。\tag{13}$$

(三) $X_{(j)}$的機率分配：

1. **假設** $X_{(j)}=K$ **,則** $X_{(1)},\cdots,X_{(j-1)}\in\{1,2,\cdots,K-1\}$ **且** $X_{(k+1)},\cdots,X_{(6)}\in\{K+1,K+2,\cdots,42\}$。**因此對於序號** $j=1,2,3,4,5,6$，**獎號** $K=j,j+1,j+2,\cdots,j+36$

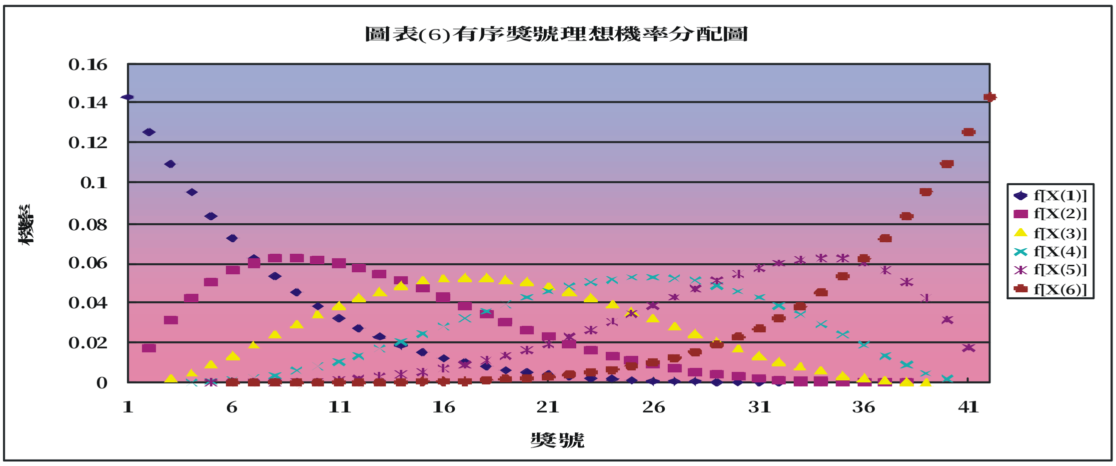
$$\mathrm{P}(\mathrm{X}_{(j)}=K)=\frac{C_{j-1}^{K-1}C_1^1C_{6-j}^{42-K}}{C_6^{42}}=\frac{1}{5245786}\cdot\frac{(K-1)!}{(j-1)!(K-j)!}\cdot\frac{(42-K)!}{(6-j)!(36+j-K)!}。\tag{14}$$

2. **圖表(5)有序獎號** $X_{(j)}$ **理想機率分配表：**

圖表(5)有序獎號機率分配表

K	X(1)	X(2)	X(3)		K	X(1)	X(2)	X(3)		K	X(1)	X(2)	X(3)	
1	0.142857			42	15	0.015389	0.046838	0.050741	28	29	0.00025	0.003816	0.020609	14
2	0.125436	0.017422		41	16	0.01254	0.042749	0.052042	27	30	0.00015	0.002736	0.017027	13
3	0.109756	0.031359	0.001742	40	17	0.010128	0.038583	0.052614	26	31	8.81E-05	0.001887	0.013682	12
4	0.095685	0.042214	0.004824	39	18	0.008103	0.034436	0.052473	25	32	4.80E-05	0.001241	0.010637	11
5	0.083095	0.05036	0.008887	38	19	0.006414	0.030384	0.051653	24	33	2.40E-05	0.000769	0.007942	10
6	0.071866	0.056145	0.013611	37	20	0.00502	0.026495	0.0502	23	34	1.07E-05	0.00044	0.005637	9
7	0.061884	0.059888	0.018715	36	21	0.003879	0.022818	0.048172	22	35	4.00E-06	0.000227	0.003743	8
8	0.053044	0.061884	0.023955	35	22	0.002956	0.019396	0.045637	21	36	1.14E-06	0.0001	0.002268	7
9	0.045243	0.062404	0.029122	34	23	0.002217	0.016255	0.04267	20	37	1.91E-07	3.43E-05	0.001201	6
10	0.038388	0.061695	0.034039	33	24	0.001633	0.013416	0.039355	19	38		7.05E-06	0.000508	5
11	0.03239	0.059981	0.03856	32	25	0.00118	0.010889	0.035777	18	39			0.000134	4
12	0.027166	0.057466	0.042568	31	26	0.000833	0.008674	0.032026	17	40				3
13	0.022638	0.054332	0.045973	30	27	0.000572	0.006765	0.028189	16	41				2
14	0.018735	0.050741	0.048711	29	28	0.000382	0.005152	0.024356	15	42				1
	X(6)	X(5)	X(4)	k		X(6)	X(5)	X(4)	k		X(6)	X(5)	X(4)	k

3. **圖表(6)有序獎號** $X_{(j)}$ **理想機率分配函數圖形：**



三、開獎過程公正性檢定

我們將台北銀行公告的 91 年 1 月 22 日 091001 期至 93 年 3 月 26 日 093025 期止共 224 期的樂透獎號整理好，參見附錄之圖表，並節錄部份資料於圖表（7），表中分別列出原始落球順序獎號與大小排序獎號。

（一）首先，我們利用統計學之假說檢定方法，來檢驗開獎號碼當中連續整數出現的成功次數是否合乎理想機率分配模式。我們將前後連續 224 期的樂透獎號，每連續 32 期劃分成一組，總共分成 193 組。例如第 1 組試驗包含 091001 期~091032 期，第 2 組試驗包含 091002 期~091033 期，依此類推。因為每次開出 6 個獎號中出現連續整數的理想機率為 0.55682828，由圖表(3)、圖表(4)得知，每連續 32 期開獎，成功出現連續整數次數介於 12 次與 23 次之間的機率約為 0.968014。換句話說，如果連續 32 期中，成功出現連續整數次數為 12，13，…，23 當中任何一個數字的話，我麼就有 0.968014 的信心支持該連續 32 期開獎的公正性。當成功出現連續整數次數小於 12 次或大於 23 次時，我麼就只有 0.031986 的信心支持連續 32 期開獎的公正性。果真如此，我們寧可不支持開獎是公正的。另外由圖表（7）中第 17、18 欄知道當第 22 組資料被支持開獎公正性之後，第 23 組資料被拒絕開獎公正性，然而這兩組資料當中有三十二分之三十一的資料是共同的，判斷結果兩相矛盾。這由資料的分組可知道，因為第 1 組試驗資料是取自第 091001 期至 091032 期開獎號碼，第 2 組試驗資料是取自第 091002 期至 091033 期開獎號碼。所以，我們僅能取獨立的第 1，33，65，97，129，161，193 組試驗的成功次數當作檢定依據。當我們選取這七組資料作檢定時，就相當於重複七次白努利試驗的二項分配 B(7, 0.968014)。

（二）其次，我們利用樣本成功次數與樣本變異數寫出母群體的期望成功次數可能範圍，這個區間又叫做母群體的期望成功次數的信賴區間。假若信賴區間包含公正性理想母群體的期望成功次數，我們便接受開獎公正性。因為

理想的母群體的期望成功次數 $= np = 224\times 0.55682828 = 124.73$,

附錄圖表與圖表（7）第 16 欄表示全部 224 次試驗共有 121 次成功,

母群體的標準差 $=\sqrt{np(1-p)}=\sqrt{224\times 0.55682828\times(1-0.55682828)}=7.434824$,

取母群體的期望成功次數信賴區間為 121 ± 7.434824 即為區間（113.565176, 128.434824），由於以下累積 $P(113\le X^{224}_{0.55682828})=0.066$，以上累積 $P(X^{224}_{0.55682828}\ge 129)=0.307$。因此取區間（114, 128）為信賴區間，在公正情況之下該區間包含實際成功次數機率達到 1- 0.066- 0.307 = 0.627，因此我們也推定包含母群體的期望成功次數機率達到 0.627。

另外，我們截取區間（114, 128）當作母群體的期望成功次數的信賴區間時，捨去的以下累積 $P(113\le X^{224}_{0.55682828})=0.066$ 和以上累積 $P(X^{224}_{0.55682828}\ge 129)=0.307$ 似乎兩端不平衡。康熙版數學課本提到統計量的標準化問題，當隨機選取的資料量足夠大而且彼此獨立時，利用標準化統計量具有標準常態分佈就可以解決兩端不平衡的問題。

（三）最後，我們利用統計學的適合度檢驗，來驗證連續 224 期開獎號碼之有序獎號 $X_{(j)}$ 的相對次數分配與 $X_{(j)}$ 的機率分配的適合度是否足夠支持開獎的公正性。我們使用的是皮爾森-卡方統計,

$$X_{(j)}^2=\sum_{i=j}^{36+j}\frac{(f_i-224p_i)^2}{224p_i},\ \ j=1,2,3,4,5,6 \tag{15}$$

式(15)中 i 表示獎號，j 表示有序獎號由小而大第 j 個，f_i 表示連續 224 期有序獎號碼中 $X_{(j)}=i$ 發生次數，p_i 表示連續 224 期有序獎號碼中 $X_{(j)}=i$ 的理想機率，$224\times p_i$ 表示理想發生次數。

由式（14）與圖表(5)知道 $X_{(j)}$ 的理想機率分配 p_i，連同連續 224 期有序獎號碼中 $X_{(j)}=i$ 發生次數 f_i 參考圖表（8），代入皮爾森-卡方統計式（15）中。若樣本發生次數 f_i 與理想次數之差距過大，則式（15）的分子會變大，皮爾森-卡方統計數值就太大，因此我們便沒有足夠信心支持開獎的公正性。統計書本建議，資料個數最好取資料分類的 4 至 5 倍，下結論時比較客觀。由於獎號分成 42 個不同整數，理想的資料個數 168 到 210，我們取 224 期資料來下結論應該足夠。事實上對於 j=1,2,3,4,5,6 任何一個有序獎號 $X_{(j)}$ 資料分類只有 37 類，而不是 42 類，因為 $1\le X_{(1)}\le 37$，$2\le X_{(2)}\le 38$，$j\le X_{(j)}\le 36+j$，取 224 期的資料量相當於 37 的 6 倍應該足夠，但是資料量太大也有缺點，接下來討論時我們會詳加說明。

圖表 (7) 開獎號碼

期別	原始落球順序						特	大小排序號碼						特	連續整數 1 成功 0 失敗	每一組連續32期成功次數	0.968信心支持公正性	組別
91001	10	32	13	4	9	33	37	4	9	10	13	32	33	37	1			
91002	28	31	16	35	6	30	2	6	16	28	32	33	35	2	1			
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
91032	42	30	17	27	15	7	5	7	15	17	27	30	42	5	0	20	1	1
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
91053	18	29	7	26	19	5	33	5	7	18	19	26	29	33	1	23	1	22
91054	27	9	2	1	39	37	26	1	2	9	27	37	39	26	1	24	0	23
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
91064	38	28	8	17	21	9	15	8	9	17	21	28	38	15	1	20	1	33
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
91096	10	11	14	40	13	16	32	10	11	13	14	16	40	32	1	22	1	65
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
92029	39	12	22	14	8	41	38	8	12	14	22	39	41	38	0	12	1	97
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
92061	9	1	22	25	12	16	42	1	9	12	16	22	25	42	0	13	1	129
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
92093	3	33	17	8	34	24	38	3	8	17	24	33	34	38	1	16	1	161
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
93021	17	33	37	8	11	7	12	7	8	11	17	33	37	12	1	18	1	193

(詳細表格見附錄)

至於皮爾森-卡方統計多少以下才接受開獎公正性，這是統計學比較深入的部分我們實在不甚瞭解為何機率分佈具有卡方分佈，老師建議我們先使用其結果即可，我們參考統計書本如下：

式（15）具有卡方分配，自由度為項數再減掉 1，因此（15）所描述的統計量具有 36 個自由度。

肆、研究結果

一、我們選取獨立的第 1，33，65，97，129，161，193 組試驗結果共有 7 次成功，這 7 組試驗資料具有 B(7, 0.968014)。由二項分配機率模式知道：

$P(X_{0.968014}^{7}\le 5)=0.01930157$，$P(X_{0.968014}^{7}\le 6)=0.203526247$。如果這七組成功次數為 6 次或 7 次時，我們有 1-0.01930157 = 0.98069843 的信心接受開獎的公正性。因為總共 7 次成功，所以我們接受開獎公正性的假說。這樣的檢驗，縱使開獎本身很公正也只有 0.98069843 的機率能通過公正性檢驗，卻有 0.01930157 的機率會被誤判為不公正。

二、圖表（7）第 16 欄告訴我們全部 224 次開獎中，開出連續整數共有 121 次，成功次數屬於期望次數正負 1 個標準差區間內 124.73±7.434824 亦即（118, 132）範圍內。因此我們也接受開獎公正性的假說。另外由二項分配機率模式知道：

$P(109 \le X^{224}_{0.55682828}) = 0.020538514$，$P(X^{7}_{0.968014} \ge 140) = 0.02293704$，**為了達成兩個尾端平衡大約各為 0.02，我們可以選取信賴區間為（110, 139），因為這個區間包含 121，我們將有 0.956524446 的信心支持開獎公正性。**

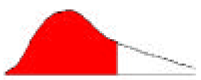
三、最後我們利用皮爾森-卡方統計檢驗有序獎號的次數分配與理想分配的適合度，我們進一步整理出有序獎號的次數分配表如圖表(8)，將圖表(5)與圖表(8)同時代入式（15）得到六個有序獎號之皮爾森-卡方統計值：

$X^2_{(1)} = 24.868009$，$X^2_{(2)} = 40.26985$，$X^2_{(3)} = 32.0097$，$X^2_{(4)} = 34.76984$，$X^2_{(5)} = 49.2998$，$X^2_{(6)} = 25.89596$。

對照圖表（9）自由度 36 之卡方表數值，縱使卡方值最大的 $X^2_{(5)} = 49.2998$ 仍然滿足 0.95 之信心支持開獎公正性。因此有序獎號次數分配通過皮爾森-卡方適合度統計檢驗。

圖表(8)自091001期~093025期共224期有序獎號次數分配表

號碼	X(1)	X(2)	X(3)	X(4)	X(5)	X(6)	號碼	X(1)	X(2)	X(3)	X(4)	X(5)	X(6)	號碼	X(1)	X(2)	X(3)	X(4)	X(5)	X(6
1	31						15	6	9	15	7	0	0	29	0	0	6	8	9	4
2	22	6					16	1	4	12	4	1	0	30	0	0	8	7	10	0
3	21	5	0				17	1	10	13	6	1	0	31	0	1	4	8	13	4
4	25	7	1	0			18	1	7	12	6	2	1	32	0	0	4	6	13	11
5	12	16	1	0	0		19	1	11	14	4	2	0	33	0	0	1	14	19	6
6	18	11	1	0	0	0	20	1	13	7	8	5	1	34	0	0	3	10	14	13
7	19	5	4	1	0	0	21	2	4	13	15	3	0	35	0	0	0	7	12	13
8	10	12	3	0	1	0	22	0	3	12	10	4	0	36	0	0	0	4	18	16
9	14	10	10	2	0	0	23	1	2	11	13	3	1	37	0	0	0	3	16	18
10	7	19	4	1	0	0	24	1	3	7	18	8	1	38		0	0	1	10	11
11	13	17	7	0	0	0	25	0	4	7	13	4	3	39			0	0	12	24
12	8	18	15	2	0	0	26	0	0	8	11	7	2	40				1	0	32
13	7	11	6	3	1	0	27	0	3	3	8	18	2	41					3	33
14	2	11	10	5	2	0	28	0	2	2	18	13	5	42						23



圖表（9）Critical Points of the Chi Square Distribution

Cumulative probability

D.F.	0.005	0.010	0.025	0.05	0.10	0.25	0.50	0.75	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995
34	16.5	17.8	19.8	21.7	24.0	28.1	33.3	39.1	44.9	48.6	52.0	56.1	59.0
35	17.2	18.5	20.6	22.5	24.8	29.1	34.3	40.2	46.1	49.8	53.2	57.3	60.3
36	17.9	19.2	21.3	23.3	25.6	30.0	35.3	41.3	47.2	51.0	54.4	58.6	61.6
37	18.6	20.0	22.1	24.1	26.5	30.9	36.3	42.4	48.4	52.2	55.7	59.9	62.9
38	19.3	20.7	22.9	24.9	27.3	31.8	37.3	43.5	49.5	53.4	56.9	61.2	64.2

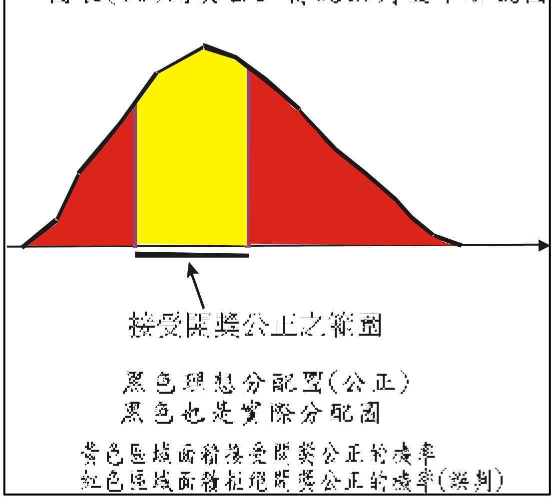
伍、討論

在應用統計的理論處理檢定問題時常遇到以下兩大類的情形：第一種已知理想的機率模式，想要檢驗實際數據是否符合理想模式；第二種對於母群體的機率模式毫無所悉想要從實際操作所得之數據推論母群體的機率模式，我們從教科書上知道這其中又細分為母群體期望值未知與變異數未知等各種情形。由於我們的目的是檢定樂透開獎過程與結果的公正性，對北銀的開獎過程檢驗即屬於第一種情形，想要檢驗實際數據是否符合理想的公正機率模式。我們使用了三個檢驗方法來檢驗開獎過程的公正性，三個檢驗結果均呈現過去的連續 224 期開獎是公正的。事實上我們也可以只使用一個方法即可，即直接採取原始的 224 期資料做檢驗，這是教科書介紹的方法，也就是我們做的第二種檢驗方法。在第一種檢驗時，選取獨立的七次連續試驗具備二項式分佈 B(7, 0.9680)，我們選擇從獨立的連續 32 期開獎資料才得到一個檢驗值，總共得到 7 個檢驗值。目的是為了修正一般教科書檢驗方法的缺點。我們將結果討論如下：

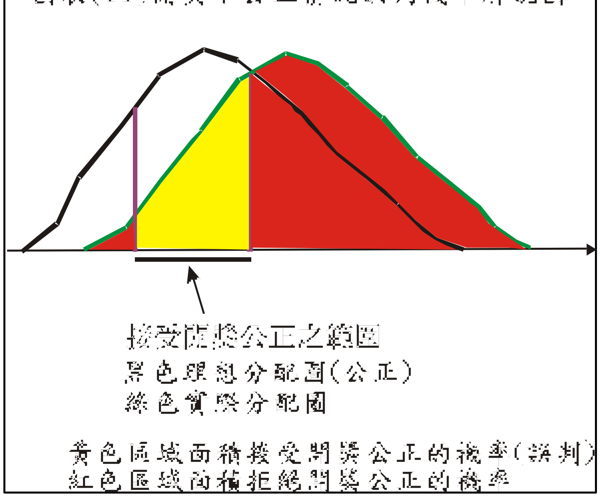
圖表（7）第 16 欄表示全部 224 次試驗共有 121 次成功，我們利用母群體期望成功次數與標準差取得信賴區間121±7.4348 即為區間（113.5652, 128.4348），也就是成功次數加減一個標準差，這是當母群體的期望成功次數未知的情況時用來估計母群體的期望成功次數落入多大範圍使用的。事實上理想的母群體的期望成功次數 $np = 224 \times 0.5568 = 124.73$ 包含於這個信賴區間內，台北銀行可以利用這個檢驗方法從事檢驗開獎機器的公正性。縱使公正的機器與公正的人士操作機器能通過公正性檢驗的機率也只有 $1 - P(X_{0.5568}^{224} \geq 129) - P(113 \leq X_{0.5568}^{224}) \approx 0.627$。這個方法是教科書的方法，但是不能檢驗成功次數是否過度集中，也就是說 121 次成功與另外 103 次失敗過度集中時不是公正開獎，卻無從檢驗起。因此我們自創第一種檢驗方法，將 224 期每段 32 期分段檢驗，假設成功與失敗過度集中時，必定通不過二項式分佈 B(7, 0.9680)的檢驗，我們自創的第一種檢驗方法可以檢驗是否過度集中的問題。至於為何每段是 32 期是因為大數法則告訴我們期數越大越好，老師告訴我們最好取 30 期以上，另外每季恰好開獎 32 期也是一個原因。

另一方面，以賣出開獎機器的公司立場而言，他們相信機器是公正無誤的，因此會檢驗台北銀行的操作過程是否公正無私。基於本身的立場，他們會取母群體期望成功次數加減一個標準差124.73±7.434824，亦即區間（117.2952, 132.1648），做為公正操作過程成功次數的信賴區間。若該區間包含實際成功次數，就接受台北銀行的操作過程公正無私。根據二項機率分配得知：

$P(X_{0.5568}^{224} \leq 117) = 0.1654$ 與 $P(X_{0.5568}^{224} \geq 133) = 0.1479$，因此 $P(118 \leq X_{0.5568}^{224} \leq 132) = 0.6867$。假設台北銀行操作過程公正條件成立之下能通過檢驗的機率大約只有 0.6867。以上所敘述有關嚴格檢驗，縱使公正開獎通過檢驗機率小於 0.7 之概念可以用以下圖表（10）解釋：



圖表(10)開獎公正情況誤判機率解說圖



圖表(11)開獎不公正情況誤判機率解說圖

當被檢定的值不在公正性可被接受的範圍內時我們將拒絕接受開獎是公正的，它發生的機率如圖表（10）紅色區域面積表示，然而當被檢定的值在可被接受的範圍內時我們接受開獎是公正的，它發生的機率以黃色區域面積表示，也就是接受公正開獎時的信賴度。另外假設開獎不公正時如圖表（11）所示，被檢定的值有可能發生在公正性可被接受的範圍內，如此將導致於誤判為公正的，此事件發生的機率為黃色區域面積。

在章節參三（二）提到統計量的標準化問題，當隨機選取的資料量足夠大而且彼此獨立時，利用標準化統計量具有標準常態分布就可以解決不平衡的問題。在這裡可以看出：取母群體期望成功次數加減一個標準差124.73±7.4348，**亦即區間**（117.2952, 132.1648）**的機率約** 0.68，**而且母群體期望成功次數與加減一個標準差之間的機率分別約為** 0.34，**相當符合資料量足夠大而且彼此獨立時可以標準化成為常態分佈的性質。觀察以下運算式說明：**

$P(X^{224}_{0.5568} \le 117) = 0.1654$， $P(X^{224}_{0.5568} \le 124) = 0.4867$，

$\Rightarrow P(118 \le X^{224}_{0.5568} \le 124) = 0.4867 - 0.1654 = 0.3213$， $P(125 \le X^{224}_{0.55682828} \le 132) = 0.6867 - 0.3213 =$ 0.3654。

因此區間（117.2952, 132.1648）**的機率約** 0.68，**而且期望成功次數之上下各約** 0.34 **是一個合理的估計。**

我們還可以引入更複雜的情況加以說明各方立場，在章節參一（四）、（五）提到樣本成功次數與樣本變異數（為了方便，我們不採用不偏估計值），

樣本成功次數為 K：$X_p^n = K \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i = K$，

樣本變異數 $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$。

為了表達方便我們以符號 $(a \pm b)$ **表示區間範圍**（$a-b$, $a+b$）。**我們以台北銀行這 224 期開獎資料求得各統計數值如下：**

$n = 224$，$\sum X_i = 121$（**成功次數**），$\bar{X} = \frac{121}{224} \approx 0.54$

$$np = 224*0.55682828 = 124.73$$

$$s = \sqrt{np(1-P)} = 7.434824$$

$$S^2 = \frac{1}{224}\left[121\times(1-\bar{X})^2 + 103\times(0-\bar{X})^2\right] \approx 0.248386$$

$$\sqrt{nS^2} = 7.459$$

不同立場的人會選擇性喜好這四個區間$(np \pm s)$、$(\sum X_i \pm s)$、$(np \pm \sqrt{nS^2})$、$(\sum X_i \pm \sqrt{nS^2})$**，作為特定目的之信賴區間使用。前面已針對開獎機器買賣雙方說明前二個區間**$(np \pm s)$、$(\sum X_i \pm s)$**之用途，北銀利用**$(np \pm s)$**當做檢定機器是否公正之依據，機器賣方則利用**$(\sum X_i \pm s)$**當做檢定開是否公正之依據。**

第三方面，購買彩券的消費者對於機器與操作機器本來皆存有戒心，擔心機器不公正也擔心開獎過程會有舞弊情事，因此對於機器與操作過程兩者會同時進行檢驗，兩種不同信賴區間都是購買彩券的消費者關心的對象。以上所討論的情形均假定標準差固定為s **之下所進行之各種檢定，如果我們連開獎結果的資料分散程度也有所懷疑時，我們可能需要更進一步討論**$(np \pm \sqrt{nS^2})$、$(\sum X_i \pm \sqrt{nS^2})$**二個區間所代表的意義了。另外以台北銀行的立場而言，他們應該最相信區間**$(\sum X_i \pm \sqrt{nS^2})$**了，因此以此區間來檢定理想的成功次數** np **是否屬於區間內作為是否買到公正的開獎機器的依據。我們也知道如果台北銀行對開獎機器之檢定結果是不公正時，將會是一場大災難的開始，還好以這 224 期開獎資料而言各種區間都包含理想的成功次數** np**。以上概念列表說明如下：**

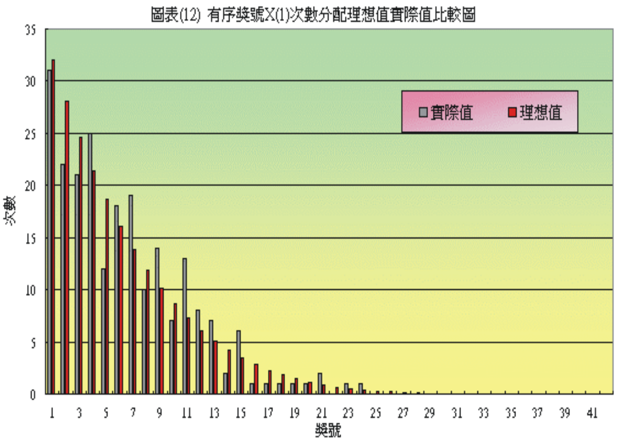
檢定方法	**使用機率分配**	**檢定課題**	**信賴區間**	**信賴度**
（一）	B(7, 0.9680)	**成功次數屬於信賴區間**	[6, 7]	0.98069843
（二）	B(224, 0.55682828)	**期望成功次數屬於信賴區間**	$(\sum X_i \pm s)$	0.627
（二）	B(224, 0.55682828)	**成功次數屬於信賴區間**	$(np \pm s)$	0.6867

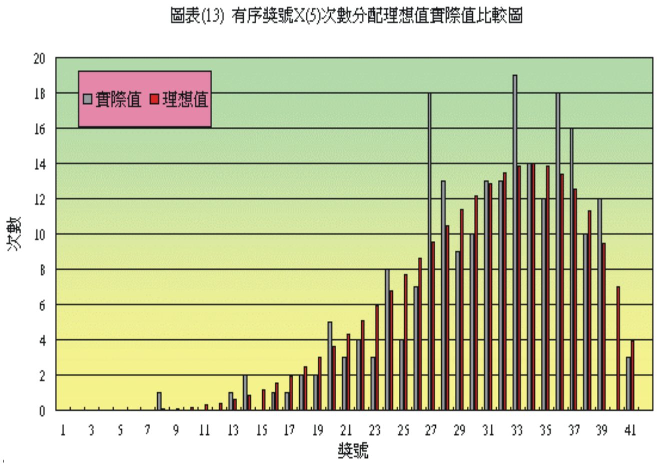
接著，我們討論第三個檢驗方法皮爾森-卡方統計檢驗有序獎號與理想分配的適合度，由式（14）與圖表（5）、（6）知道 $X_{(1)}$**與** $X_{(6)}$ **兩者機率分配圖形關於直線** $x = 21$ **成對稱** $X_{(2)}$、$X_{(5)}$ **和** $X_{(3)}$、$X_{(4)}$ **兩對機率分配圖形關於直線** $x = 21$ **也成對稱。這是由於由小而大排列或是由大而小排列時順位的編號的關係，因此我們比較興趣的是將圖表（5）、（8）同時帶入式（15）的結果是否也會成對出現約略相等的統計值。由章節肆三的數據觀察得知**

$X^2_{(1)} = 24.8680$，$X^2_{(2)} = 40.2699$，$X^2_{(3)} = 32.0097$，$X^2_{(4)} = 34.7698$，$X^2_{(5)} = 49.2998$，$X^2_{(6)} = 25.8960$

有該對稱的數據約略出現一致性增大現象，$X_{(1)}$**與** $X_{(6)}$**卡方統計值約略相等而且** $X_{(3)}$**與** $X_{(4)}$**卡方統計值也約略相等，雖然** $X_{(2)}$**與** $X_{(5)}$**卡方統計值差距較大，但是在同一對稱組的兩個卡方統計值會同時變大與同時變小，這個現象相當符合對稱性的性質。可是至今我們仍然想不出為何** $X_{(2)}$**與** $X_{(5)}$**這一組數據較大？又為何** $X_{(1)}$**與** $X_{(6)}$**這一組據據會較小？也就是為何** $X_{(1)}$**與** $X_{(6)}$**這一組卡方統計值最小？因為由式（15）知道皮爾森-卡方統計值愈小表示式子中每項的分子均很小，得到實際開獎的次數分配圖與理想次數分配圖密合度愈高。我們畫出圖表（12）（13）分**

別為 $X_{(1)}$、$X_{(5)}$的理想次數與實際次數分配比較圖，其中 $X_{(1)}$的卡方值最小，$X_{(5)}$的卡方值最大，由圖中可以觀察出卡方值越小理想次數與實際次數越吻合。





為甚麼 $X_{(1)}$與 $X_{(6)}$密合度最佳？$X_{(2)}$與 $X_{(5)}$密合度最差？我們尚未討論出所以然來，到目前為止我們僅知道任意兩個相鄰有序獎號之次數分配有關。也就是 $X_{(1)}$與 $X_{(2)}$有關，$X_{(2)}$與 $X_{(3)}$有關，$X_{(3)}$與 $X_{(4)}$有關，‧‧‧，$X_{(5)}$與 $X_{(6)}$有關等。任意兩個不相鄰的有序獎號之次數分配也有關，但是不像相鄰有序獎號之關係密切。例如有序開獎號 3、5、6、25、36、42 當中的號碼 5 換成 10 只會影響 $X_{(2)}$與 $X_{(3)}$變成有序獎號 3、6、10、25、36、42，但是當獎號 5 換成更大數 30 時也會影響到 $X_{(4)}$變成有序獎號 3、6、25、30、36、42，因此我們猜想最大與最小數受影響程度小，排序中間者受影響程度較嚴重，又 $X_{(2)}$比 $X_{(3)}$容易受到影響。這個猜想大約可以解釋為何 $X_{(1)}$、$X_{(2)}$與 $X_{(3)}$密合度會越來越差，另外由對稱性也可以解釋為何 $X_{(6)}$、$X_{(5)}$與 $X_{(4)}$密合度會越來越差。我們所提出的猜想還沒有以數學方法證明，然而這些猜想也不足以解釋為何 $X_{(1)}$比 $X_{(6)}$密合度佳，$X_{(2)}$比 $X_{(5)}$密合度佳還有 $X_{(3)}$比 $X_{(4)}$密合度佳？或許這一切密合度之好壞的現象，只不夠是單純這二年來開獎的巧合而已。還有一點值得討論的是在章節參三（三）提到皮爾森-卡方檢驗時最好選取資料量是分類個數的 4 至 5 倍，實際上我們取 224 個資料 37 個分類，資料量大約是分類個數的 6 倍。資料量大會使皮爾森-卡方值變大，會降低適合度檢驗通過機會，觀察式（15）得知，如果同樣的 224 個資料再重複選取一次，總共 448 個資料，式（15）分子放大 4 倍、分母 2 倍皮爾森卡方值放大 2 倍 ，但是機率分配沒有不同。因此我們選取分類量的 6 倍當資料，會導致皮爾森-卡方值增大現象，增加通過適合度檢驗的難度。

最後，我們還討論到很重要的一點便是，從今以後要在其它科學實驗之後多多利用皮爾森-卡方檢驗方法進行驗證實驗數據與猜測模式之間的適合度，不能僅由目測兩者圖形之外觀即輕率下結論。

陸、結論

每一個買樂透彩券的人內心最期待的不外乎開獎的公正性與中獎機率，由前面章節伍的討論中得知出現連續整數的機率為 0.55682828 比完全不連續的機率大，因此建議購買樂透的人最好挑選有連續整數的彩券。另外一項有趣的事情是到底挑哪些號碼比較省時又不傷腦筋，我們也給購買樂透的人如下的建議，所挑選的號碼可以隨機從前一期 6 個中獎號碼當中取出一個號碼再從前一期 36 個未中獎號碼任取出 5 個這樣比較可能中獎，理由很簡單：

前一期中獎號這一期出現一個的機率 $\frac{C_1^6 \cdot C_5^{36}}{C_6^{42}} = \frac{6 \times 376992}{5245786} = 0.431194105$，

前一期中獎號這一期皆不出現的機率 $\frac{C_0^6 \cdot C_6^{36}}{C_6^{42}} = \frac{1947792}{5245786} = 0.371306035$，

前一期中獎號這一期至少出現二個的機率 1-0.431194105-0.371306035 = 0.19749986，

前一期中獎號這一期至少出現一個的機率 1-0.371306035 = 0.628693965。但是千萬記得這個不是中獎機率。

最後回到一開始的研究動機，電子媒體每晚有報樂透明牌的帶狀節目，平面媒體也不甘示弱開闢整個版面專門報導明牌消息，而我們看到的是電子媒體上竟然出現一些新聞主播也在報明牌的節目中，他們在節目中引一些似是而非的理由，穿鑿附會一番然後串聯出一堆數字，就是所謂明牌，讓我們很懷疑他們的知識水平如何能當上主播。經過我們的推論與檢定，我們相信台北銀行的開獎是公正的，媒體的名牌消息只是八卦不需理會。最後再提出一點，雖然我們在前一段主張由前一期 6 個獎號中任取一個號碼搭配前一期未開出的 36 個獎號中任取 5 個，然而每當選好了 6 個號碼，在還沒開獎之前這一組號碼完全中獎的機會永遠只有 $\frac{1}{C_6^{42}}$ 而已。這就是機率迷人的地方。

柒、參考資料

1.余文卿等三人著，高中數學（四）（甲上），91 學年版，台北縣，龍騰文化事業公司

2.余文卿等三人著，高中數學（四）（甲上）教師手冊，92 學年版，台北縣，龍騰文化事業公司

3.李虎雄等六人著，高中數學（甲下）教師手冊，二版，台中市，康熙圖書，民 92

4.曹亮吉，二項分布與大數法則，原載於科學月刊第十六卷第六期，http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/sm/sm_16_06_1/

5.台北市銀行，中華民國公益彩券網站，http://www.roclotto.com.tw

6. Bernard W. Lindgren, Statistical Theory, 3rd ed., Taiwan 1st ed., 台北市華泰書局, p.423-428, 1978

7. NIST SEMATECH, Engineering Statistics Handbook, 1.3.5.15. Chi-Square Goodness-of-Fit Test, http://www.itl.nist.gov/div898/handbook/eda/section3/eda35.htm

8.Robert V. Hogg And Elliot A. Tanis, Probability and Statistical Inference, 4th ed., NY, Macmillan Publishing Company, P.589-P.594,1993

9.William Knight, Calculators for Chi Square Distribution, http://www.math.unb.ca/~knight

捌、附錄

台北銀行第 091001 期至 093025 期樂透彩開獎號碼

期別	原始落球順序						特	大小排序號碼						特	連續整數 1 成功 0 失敗	連續 32 期成功次數	0.968 信心支持公正性
091001	10	32	13	4	9	33	37	4	9	10	13	32	33	37	1		
091002	28	31	16	35	6	30	2	6	16	28	32	33	35	2	1		

091003	7	9	29	34	39	36	16	7	9	29	34	36	39	16	0			
091004	13	39	28	30	25	29	21	13	25	28	29	30	39	21	1			
091005	17	39	3	15	11	1	34	1	3	11	15	17	39	34	0			
091006	16	2	15	29	4	33	39	2	4	15	16	29	33	39	1			
091007	25	39	20	38	29	37	28	20	25	29	37	38	39	28	1			
091008	1	6	7	12	42	20	35	1	6	7	12	20	42	35	1			
091009	24	20	36	19	7	12	26	7	12	19	20	24	36	26	1			
091010	32	10	15	2	30	23	36	2	10	15	23	30	32	36	0			
091011	40	6	20	29	38	35	41	6	20	29	35	38	40	41	0			
091012	30	12	40	32	35	20	34	12	20	30	32	35	40	34	0			
091013	29	4	10	23	39	14	36	4	10	14	23	29	39	36	0			
091014	4	40	27	21	14	5	12	4	5	14	21	27	40	12	1			
091015	36	16	12	26	8	34	5	8	12	16	26	34	36	5	0			
091016	15	29	5	36	13	10	1	5	10	13	15	29	36	1	0			
091017	5	25	2	16	32	9	7	2	5	9	16	25	32	7	0			
091018	32	21	9	27	31	6	2	6	9	21	27	31	32	2	1			
091019	5	18	25	26	35	42	29	5	18	25	26	35	42	29	1			
091020	22	31	34	25	21	19	13	19	21	22	25	31	34	13	1			
091021	26	37	32	13	30	20	4	13	20	26	30	32	37	4	0			
091022	27	37	7	10	17	14	28	7	10	14	17	27	37	28	0			
091023	20	26	21	6	37	36	27	6	20	21	26	36	37	27	1			
091024	15	36	12	24	14	39	1	12	14	15	24	36	39	1	1			
091025	10	21	29	17	22	12	25	10	12	17	21	22	29	25	1			
091026	24	9	27	5	39	6	15	5	6	9	24	27	39	15	1			
091027	18	2	1	7	8	4	9	1	2	4	7	8	18	9	1			
091028	19	15	34	33	22	23	20	15	19	22	23	33	34	20	1			
091029	37	23	36	11	33	31	34	11	23	31	33	36	37	34	1	每一組	0.968信	
091030	36	18	17	7	15	28	8	7	15	17	18	28	36	8	1	連續32期	心支持	
091031	26	41	33	21	37	25	20	21	25	26	33	37	41	20	1	成功次數	成功失敗	組別
091032	42	30	17	27	15	7	5	7	15	17	27	30	42	5	0	20	1	1
091033	9	27	18	36	20	2	4	2	9	18	20	27	36	4	0	19	1	2
091034	21	32	14	23	27	2	35	2	14	21	23	27	32	35	0	18	1	3
091035	3	4	32	35	12	19	29	3	4	12	19	32	35	29	1	19	1	4
091036	34	6	22	10	27	19	7	6	10	19	22	27	34	7	0	18	1	5
091037	41	27	39	19	18	34	40	18	19	27	34	39	41	40	1	19	1	6
091038	24	14	11	8	36	31	23	8	11	14	24	31	36	23	0	18	1	7
091039	26	10	15	42	16	27	3	10	15	16	26	27	42	3	1	18	1	8
091040	34	18	19	13	28	38	9	13	18	19	28	34	38	9	1	18	1	9
091041	29	21	13	27	41	23	17	13	21	23	27	29	41	17	0	17	1	10
091042	4	14	20	15	11	41	10	4	11	14	15	20	41	10	1	18	1	11
091043	30	37	9	35	13	32	28	9	13	30	32	35	37	28	0	18	1	12
091044	28	2	6	37	1	21	31	1	2	6	21	28	37	31	1	19	1	13

091045	4	11	33	8	26	39	37	4	8	11	26	33	39	37	0	19	1	14
091046	37	41	12	4	5	39	27	4	5	12	37	39	41	27	1	19	1	15
091047	32	12	33	22	13	6	25	6	12	13	22	32	33	25	1	20	1	16
091048	12	27	28	25	8	17	30	8	12	17	25	27	28	30	1	21	1	17
091049	1	5	19	18	9	31	37	1	5	9	18	19	31	37	1	22	1	18
091050	38	12	23	15	11	37	31	11	12	15	23	37	38	31	1	22	1	19
091051	8	19	20	15	12	1	17	1	8	12	15	19	20	17	1	22	1	20
091052	40	29	2	1	8	20	17	1	2	8	20	29	40	17	1	22	1	21
091053	18	29	7	26	19	5	33	5	7	18	19	26	29	33	1	23	1	22
091054	27	9	2	1	39	37	26	1	2	9	27	37	39	26	1	24	0	23
091055	42	3	21	9	8	17	41	3	8	9	17	21	42	41	1	24	0	24
091056	26	33	34	16	30	22	3	16	22	26	30	33	34	3	1	24	0	25
091057	34	13	38	30	3	40	35	3	13	30	34	38	40	35	0	23	1	26
091058	17	35	29	33	40	4	12	4	17	29	33	35	40	12	0	22	1	27
091059	22	4	31	17	12	3	7	3	4	12	17	22	31	7	1	22	1	28
091060	27	24	10	33	21	12	7	10	12	21	24	27	33	7	0	21	1	29
091061	31	12	13	34	28	17	27	12	13	17	28	31	34	27	1	21	1	30
091062	42	20	35	29	8	38	31	8	20	29	35	38	42	31	0	20	1	31
091063	36	4	15	24	10	18	1	4	10	15	18	24	36	1	0	19	1	32
091064	38	28	8	17	21	9	15	8	9	17	21	28	38	15	1	20	1	33
091065	23	34	30	31	41	24	42	23	24	30	31	34	41	42	1	21	1	34
091066	14	39	34	3	38	42	26	3	14	34	38	39	42	26	1	22	1	35
091067	15	8	7	1	26	21	10	1	7	8	15	21	26	10	1	22	1	36
091068	23	16	20	8	14	7	13	7	8	14	16	20	23	13	1	23	1	37
091069	32	19	41	16	24	11	39	11	16	19	24	32	41	39	0	22	1	38
091070	18	3	11	20	40	28	12	3	11	18	20	28	40	12	0	22	1	39
091071	30	20	15	31	35	22	14	15	20	22	30	31	35	14	1	22	1	40
091072	34	11	42	17	40	41	33	11	17	34	40	41	42	33	1	22	1	41
091073	39	8	26	17	25	2	13	2	8	17	25	26	39	13	1	23	1	42
091074	23	40	32	28	22	7	25	7	22	23	28	32	40	25	1	23	1	43
091075	17	15	37	22	33	28	41	15	17	22	28	33	37	41	0	23	1	44
091076	40	5	2	37	28	23	29	2	5	23	28	37	40	29	0	22	1	45
091077	1	6	38	14	30	9	34	1	6	9	14	30	38	34	0	22	1	46
091078	19	29	35	20	7	32	30	7	19	20	29	32	35	30	1	22	1	47
091079	8	15	41	34	7	19	33	7	8	15	19	34	41	33	1	22	1	48
091080	34	24	10	1	39	41	42	1	10	24	34	39	41	42	0	21	1	49
091081	5	12	11	33	40	25	1	5	11	12	25	33	40	1	1	21	1	50
091082	30	39	9	41	10	34	26	9	10	30	34	39	41	26	1	21	1	51
091083	6	40	4	21	7	26	35	4	6	7	21	26	40	35	1	21	1	52
091084	37	14	27	32	4	26	12	4	14	26	27	32	37	12	1	21	1	53
091085	13	11	32	25	41	31	21	11	13	25	31	32	41	21	1	21	1	54
091086	18	38	41	24	21	9	32	9	18	21	24	38	41	32	0	20	1	55
091087	37	32	40	31	33	3	30	3	31	32	33	37	40	30	1	20	1	56

091088	20	34	41	32	11	30	39	11	20	30	32	34	41	39	0	19	1	57
091089	42	23	20	36	35	12	7	12	20	23	35	36	42	7	1	20	1	58
091090	9	13	21	18	26	12	3	9	12	13	18	21	26	3	1	21	1	59
091091	19	40	33	39	20	7	5	7	19	20	33	39	40	5	1	21	1	60
091092	34	27	33	19	41	4	11	4	19	27	33	34	41	11	1	22	1	61
091093	42	41	1	25	10	18	11	1	10	18	25	41	42	11	1	22	1	62
091094	11	4	1	39	18	13	10	1	4	11	13	18	39	10	0	22	1	63
091095	13	35	21	28	30	8	27	8	13	21	28	30	35	27	0	22	1	64
091096	10	11	14	40	13	16	32	10	11	13	14	16	40	32	1	22	1	65
091097	20	37	30	39	24	10	19	10	20	24	30	37	39	19	0	21	1	66
091098	41	11	22	18	25	23	31	11	18	22	23	25	41	31	1	21	1	67
091099	26	24	11	30	39	14	41	11	14	24	26	30	39	41	0	20	1	68
092001	39	42	11	14	20	36	23	11	14	20	36	39	42	23	0	19	1	69
092002	35	12	13	10	6	14	27	6	10	12	13	14	35	27	1	20	1	70
092003	9	15	13	39	37	35	10	9	13	15	35	37	39	10	0	20	1	71
092004	41	31	17	14	20	10	39	10	14	17	20	31	41	39	0	19	1	72
092005	36	28	41	2	18	3	23	2	3	18	28	36	41	23	1	19	1	73
092006	19	28	39	21	6	31	4	6	19	21	28	31	39	4	0	18	1	74
092007	24	5	13	10	3	9	7	3	5	9	10	13	24	7	1	18	1	75
092008	27	15	13	21	16	38	39	13	15	16	21	27	38	39	1	19	1	76
092009	15	41	31	7	33	12	27	7	12	15	31	33	41	27	0	19	1	77
092010	33	15	4	21	35	28	31	4	15	21	28	33	35	31	0	19	1	78
092011	16	37	34	29	3	17	33	3	16	17	29	34	37	33	1	19	1	79
092012	42	25	21	2	5	34	3	2	5	21	25	34	42	3	0	18	1	80
092013	33	37	32	38	24	27	13	24	27	32	33	37	38	13	1	19	1	81
092014	9	2	35	7	5	28	19	2	5	7	9	28	35	19	0	18	1	82
092015	25	1	30	18	5	32	21	1	5	18	25	30	32	21	0	17	1	83
092016	21	28	42	33	35	30	37	21	28	30	33	35	42	37	0	16	1	84
092017	36	22	15	38	40	20	32	15	20	22	36	38	40	32	0	15	1	85
092018	40	20	38	21	11	18	22	11	18	20	21	38	40	22	1	15	1	86
092019	27	15	23	31	19	3	17	3	15	19	23	27	31	17	0	15	1	87
092020	7	39	25	37	32	34	20	7	25	32	34	37	39	20	0	14	1	88
092021	14	28	1	42	21	13	19	1	13	14	21	28	42	19	1	15	1	89
092022	42	7	12	21	3	34	38	3	7	12	21	34	42	38	0	14	1	90
092023	5	15	41	24	17	3	21	3	5	15	17	24	41	21	0	13	1	91
092024	27	15	38	5	12	21	16	5	12	15	21	27	38	16	0	12	1	92
092025	34	37	40	27	9	38	6	9	27	34	37	38	40	6	1	12	1	93
092026	27	25	6	4	26	23	2	4	6	23	25	26	27	2	1	12	1	94
092027	29	19	15	27	18	28	6	15	18	19	27	28	29	6	1	13	1	95
092028	38	10	40	24	19	5	21	5	10	19	24	38	40	21	0	13	1	96
092029	39	12	22	14	8	41	38	8	12	14	22	39	41	38	0	12	1	97
092030	22	6	16	18	11	29	23	6	11	16	18	22	29	23	0	12	1	98
092031	6	35	23	4	29	27	11	4	6	23	27	29	35	11	0	11	0	99

092032	24	42	22	4	5	39	11	4	5	22	24	39	42	11	1	12	1	100
092033	41	10	16	26	2	24	14	2	10	16	24	26	41	14	0	12	1	101
092034	24	10	28	1	41	17	6	1	10	17	24	28	41	6	0	11	0	102
092035	4	31	18	21	7	36	15	4	7	18	21	31	36	15	0	11	0	103
092036	4	22	24	27	37	26	18	4	22	24	26	27	37	18	1	12	1	104
092037	27	20	25	8	33	11	19	8	11	20	25	27	33	19	0	11	0	105
092038	27	9	16	24	12	28	14	9	12	16	24	27	28	14	1	12	1	106
092039	16	35	10	29	1	33	20	1	10	16	29	33	35	20	0	11	0	107
092040	10	35	6	25	12	23	5	6	10	12	23	25	35	5	0	10	0	108
092041	1	27	13	37	20	22	31	1	13	20	22	27	37	31	0	10	0	109
092042	16	32	28	11	20	2	10	2	11	16	20	28	32	10	0	10	0	110
092043	34	33	13	6	26	39	35	6	13	26	33	34	39	35	1	10	0	111
092044	28	37	41	26	21	17	34	17	21	26	28	37	41	34	0	10	0	112
092045	20	23	34	11	33	22	42	11	20	22	23	33	34	42	1	10	0	113
092046	10	36	25	41	3	4	40	3	4	10	25	36	41	40	1	11	0	114
092047	3	10	15	28	24	5	26	3	5	10	15	24	28	26	0	11	0	115
092048	14	1	24	41	5	39	36	1	5	14	24	39	41	36	0	11	0	116
092049	9	41	12	37	11	21	27	9	11	12	21	37	41	27	1	12	1	117
092050	11	25	29	34	14	26	38	11	14	25	26	29	34	38	1	12	1	118
092051	10	36	11	20	9	14	39	9	10	11	14	20	36	39	1	13	1	119
092052	9	1	34	28	18	6	40	1	6	9	18	28	34	40	0	13	1	120
092053	4	14	39	35	25	28	7	4	14	25	28	35	39	7	0	12	1	121
092054	23	32	17	26	4	27	7	4	17	23	26	27	32	7	1	13	1	122
092055	5	40	35	27	32	17	37	5	17	27	32	35	40	37	0	13	1	123
092056	31	36	4	18	9	35	29	4	9	18	31	35	36	29	1	14	1	124
092057	21	24	41	12	11	2	28	2	11	12	21	24	41	28	1	14	1	125
092058	6	10	36	15	37	28	2	6	10	15	28	36	37	2	1	14	1	126
092059	40	3	36	12	26	33	22	3	12	26	33	36	40	22	0	13	1	127
092060	42	20	30	35	25	6	3	6	20	25	30	35	42	3	0	13	1	128
092061	9	1	22	25	12	16	42	1	9	12	16	22	25	42	0	13	1	129
092062	30	23	34	17	22	2	9	2	17	22	23	30	34	9	1	14	1	130
092063	36	40	12	35	19	15	29	12	15	19	35	36	40	29	1	15	1	131
092064	2	20	11	36	15	24	32	2	11	15	20	24	36	32	0	14	1	132
092065	29	28	4	13	15	38	41	4	13	15	28	29	38	41	1	15	1	133
092066	36	31	19	12	37	39	28	12	19	31	36	37	39	28	1	16	1	134
092067	21	13	17	36	23	33	29	13	17	21	23	33	36	29	0	16	1	135
092068	28	4	9	33	12	40	41	4	9	12	28	33	40	41	0	15	1	136
092069	3	26	6	22	16	32	34	3	6	16	22	26	32	34	0	15	1	137
092070	7	36	9	8	14	39	30	7	8	9	14	36	39	30	1	15	1	138
092071	33	7	37	23	19	17	21	7	17	19	23	33	37	21	0	15	1	139
092072	32	22	39	6	19	8	4	6	8	19	22	32	39	4	0	15	1	140
092073	23	32	27	9	11	24	26	9	11	23	24	27	32	26	1	16	1	141
092074	29	12	33	19	41	4	30	4	12	19	29	33	41	30	0	16	1	142

092075	21	14	11	22	23	28	25	11	14	21	22	23	28	25	1	16	1	143
092076	14	3	40	30	1	22	13	1	3	14	22	30	40	13	0	16	1	144
092077	27	36	34	33	14	38	30	14	27	33	34	36	38	30	1	16	1	145
092078	36	24	28	19	7	21	26	7	19	21	24	28	36	26	0	15	1	146
092079	6	10	15	28	17	32	26	6	10	15	17	28	32	26	0	15	1	147
092080	24	37	3	40	23	34	5	3	23	24	34	37	40	5	1	16	1	148
092081	8	15	19	21	23	31	25	8	15	19	21	23	31	25	0	15	1	149
092082	31	32	22	42	9	21	27	9	21	22	31	32	42	27	1	15	1	150
092083	1	11	27	25	2	15	33	1	2	11	15	25	27	33	1	15	1	151
092084	3	31	1	40	25	28	33	1	3	25	28	31	40	33	0	15	1	152
092085	5	31	18	2	34	30	39	2	5	18	30	31	34	39	1	16	1	153
092086	33	31	24	39	35	10	16	10	24	31	33	35	39	16	0	15	1	154
092087	32	5	34	7	31	22	14	5	7	22	31	32	34	14	1	16	1	155
092088	22	15	20	32	35	13	34	13	15	20	22	32	35	34	0	15	1	156
092089	31	12	42	35	16	6	2	6	12	16	31	35	42	2	0	14	1	157
092090	25	12	39	33	5	2	41	2	5	12	25	33	39	41	0	13	1	158
092091	5	42	34	32	41	28	40	5	28	32	34	41	42	40	1	14	1	159
092092	16	42	25	2	34	3	13	2	3	16	25	34	42	13	1	15	1	160
092093	3	33	17	8	34	24	38	3	8	17	24	33	34	38	1	16	1	161
092094	9	33	2	41	36	4	40	2	4	9	33	36	41	40	0	15	1	162
092095	28	20	3	15	4	19	7	3	4	15	19	20	28	7	1	15	1	163
092096	30	16	40	9	29	24	13	9	16	24	29	30	40	13	1	16	1	164
092097	37	6	28	20	36	23	7	6	20	23	28	36	37	7	1	16	1	165
092098	29	25	1	31	24	37	18	1	24	25	29	31	37	18	1	16	1	166
092099	4	35	17	27	14	34	1	4	14	17	27	34	35	1	1	17	1	167
092100	11	21	1	12	40	36	24	1	11	12	21	36	40	24	1	18	1	168
092101	14	21	19	36	24	33	39	14	19	21	24	33	36	39	0	18	1	169
092102	3	33	8	22	28	41	35	3	8	22	28	33	41	35	0	17	1	170
092103	34	1	10	39	11	42	18	1	10	11	34	39	42	18	1	18	1	171
092104	17	18	40	26	2	24	30	2	17	18	24	26	40	30	1	19	1	172
093001	40	23	5	22	1	2	19	1	2	5	22	23	40	19	1	19	1	173
093002	39	9	12	16	28	34	32	9	12	16	28	34	39	32	0	19	1	174
093003	12	2	32	41	29	36	22	2	12	29	32	36	41	22	0	18	1	175
093004	14	8	25	1	9	6	16	1	6	8	9	14	25	16	1	19	1	176
093005	24	11	33	39	5	40	26	5	11	24	33	39	40	26	1	19	1	177
093006	38	33	31	19	5	36	4	5	19	31	33	36	38	4	0	19	1	178
093007	8	36	18	9	23	24	25	8	9	18	23	24	36	25	1	20	1	179
093008	6	23	37	35	31	1	19	1	6	23	31	35	37	19	0	19	1	180
093009	11	32	12	33	34	7	21	7	11	12	32	33	34	21	1	20	1	181
093010	17	36	23	37	40	9	3	9	17	23	36	37	40	3	1	20	1	182
093011	7	36	19	20	37	9	30	7	9	19	20	36	37	30	1	20	1	183
093012	26	31	8	2	13	38	25	2	8	13	26	31	38	25	0	20	1	184
093013	14	18	10	6	1	25	13	1	6	10	14	18	25	13	0	19	1	185

093014	3	24	7	12	32	5	38	3	5	7	12	24	32	38	0	19	1	186
093015	41	11	29	7	34	13	18	7	11	13	29	34	41	18	0	18	1	187
093016	38	18	24	19	15	41	39	15	18	19	24	38	41	39	1	19	1	188
093017	33	11	29	4	17	26	14	4	11	17	26	29	33	14	0	19	1	189
093018	40	13	35	12	37	30	15	12	13	30	35	37	40	15	1	20	1	190
093019	42	26	12	19	37	35	20	12	19	26	35	37	42	20	0	19	1	191
093020	6	18	36	28	25	12	29	6	12	18	25	28	36	29	0	18	1	192
093021	17	33	37	8	11	7	12	7	8	11	17	33	37	12	1	18	1	193
093022	18	24	8	1	40	4	34	1	4	8	18	24	40	34	0	18	1	194
093023	23	35	21	1	34	24	22	1	21	23	24	34	35	22	1	18	1	195
093024	41	36	15	11	7	30	18	7	11	15	30	36	41	18	0	17	1	196
093025	33	40	39	28	23	27	4	23	27	28	33	39	40	4	1	17	1	197