

第三屆旺宏科學獎—成果報告書

作品名稱：千變萬化的橢圓盡在手中

參賽編號：SA3-095

摘要

一、作品創意：

『剪刀』為常見於生活的用具。已經不知跟隨著人類生活多少日子了！可是『剪刀』的變化卻不大，除了剪直線外，其他附加功能卻十分的少，大概只有剪花邊的美工剪刀吧！

此次作品『橢圓剪刀附件』是將原本一把單純的剪刀，附加了新的生命！也就是讓剪刀能隨意剪出所需大小的橢圓形，就像女孩們經過穿衣打扮後，有了更多的變化，展現出不同的風貌！

老師說過『創造力=創意+行動力』，而作品本身就是一個因創作意念，有意念後去行動完成的附件。因此『橢圓剪刀附件』非任何成品的改良，故沒有任何依歸、包袱，有的只是嘗試、嘗試、再嘗試！

二、特色：

平常需要橢圓形時，要如何剪（切）出一橢圓形呢？我想多數人都會做以下步驟：

(1) 先於紙張上用鉛筆畫出橢圓形。

(用何種方法畫橢圓呢？這就很傷腦筋了。)

(2) 畫完後，再用剪刀或美工刀剪（切）出來。

此作品能省略這些步驟，將橢圓製作變簡單了！只要調整幾顆螺絲，就能做出橢圓！除了剪出各式各樣的橢圓外，也能精確的調整長軸、短軸、焦距，故為一件具『**便利性**』、『**精確度**』的作品。

三、預期效果：

做出能附加於剪刀上的附件，讓剪（切）橢圓變成一件容易的事情！不僅如此，也讓生活中充滿更多的變化，更多變化的幾何圖形，而創意生活因而展開。

目錄

摘要	01
目錄	03
壹、 研究動機	04
貳、 研究目的	04
參、 研究設備及器材	05
肆、 研究過程與方法	05
一、 橢圓定義	06
二、 橢圓之標準式	07
三、 橢圓畫法	08
四、 機構設計	10
伍、 問題與討論	12
陸、 修正與計畫	14
柒、 研討橢圓	15
捌、 結論	17
玖、 參考資料	18

壹、研究動機

這學期佈置班上佈告欄主題，想以剪紙浮雕方式來呈現，為了讓那些動物或人物看起來更為可愛，因此臉上都設計了美美的『橢圓形』腮紅，手指與腳也都要以『橢圓形』來呈現。

本想說剪個『橢圓』應不難吧！結果卻是兩隻手或腳剪的不像圓或橢圓的樣子，最後只好將就的將手、腳都剪成『圓』，活像漫畫中的『小叮噹』，剎時讓我難過了一陣子。

回想先前常看朋友、同學們在作卡片時，道具好多！有印章、各式打洞器、各式印台、還有割圓器等，因此問同學有無剪（切）出『橢圓』的工具，但卻無人知道有任何剪（切）橢圓的器具。

因此就開始上網尋找剪（切）橢圓的器具！結果發現搜尋到的網路資料，好像沒任何關於橢圓的剪刀附件，可以直接用剪刀來剪出橢圓。當失望之餘，終於搜尋到『橢圓切割器』，高興之餘看了一下價錢 3000~5000 元左右，心情頓時又重了起來，也興起了自己試做的想法。

記得上數學課時，老師說橢圓因為長短軸的不同就會有不同的橢圓產生，這裡面好像有思考的機會與方向，因此利用數學概念去研究出剪（切）橢圓的原理，加上機工實習的知識，展開此一研究。

貳、研究目的

1. 期以最簡單的橢圓原理，製作出一個『橢圓剪刀附件』，與剪刀結合使其能順利剪出所想要形狀之橢圓。
2. 將機械機構概念與數學理論結合。

參、研究設備及器材

一、研究設備：

- (一) 個人電腦。
- (二) 數位相機一台。
- (三) SolidWorks2003 3D 繪圖軟體。

利用 SolidWorks2003 軟體，繪出所需工件之 3D 立體圖形及工作圖。

二、加工機具：

- (一) M/C 切削加工中心機。
- (二) 鑽床。
- (三) 車床。

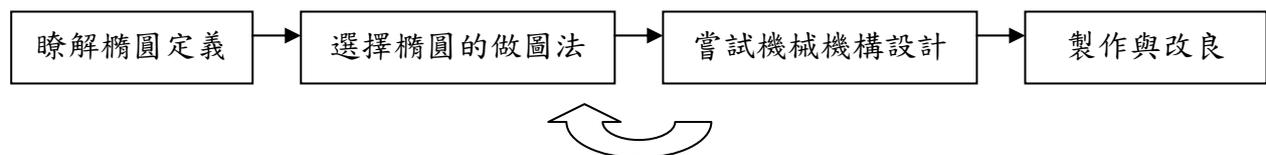
利用機械科工廠內設備，包含鉗工、車工、銑工等相關加工設備。

三、材料：

- (一) 鋁板、鋁塊、鋁條、銅棒…等為製作材料。
- (二) 剪刀。

肆、研究過程與方法

將數學理論實踐，做出成品，是一段漫長的過程。除了瞭解基本理論還要思考所學習的機械機構知識是否能實現出來，因此是嘗試再嘗試的。以下是進行流程圖：



一、橢圓定義

設 F 與 F' 為平面上二定點， a 為一正數，若 $FF' < 2a$ ，則在包含 F 與 F' 的平面上，至 F 與 F' 的距離之和等於定數 $2a$ 的所有點所成的圖形，稱為是一橢圓如【圖一】，而 F 與 F' 稱為這個橢圓的兩個焦點。

注意：

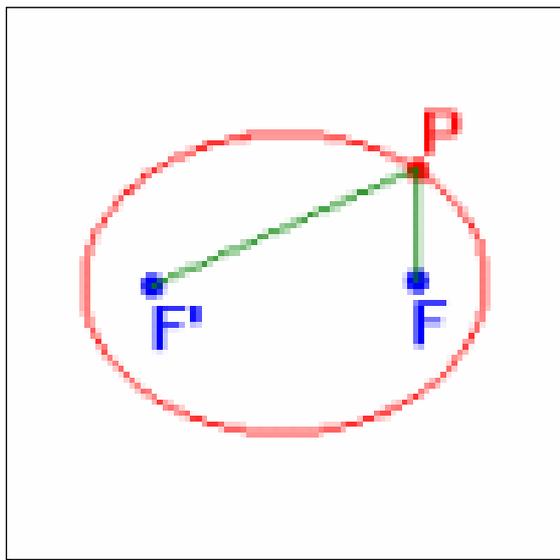
(1) 若 $FF' = 2a$ ，則 P 軌跡為一線段。

(2) 若 $FF' > 2a$ ，則 P 點不存在。

或：

F 與 F' 為相異兩點， $2a$ 為正數， $\Gamma = \{P \mid \overline{PF} + \overline{PF'} = 2a\}$ ，則

1. $FF' < 2a$ 時， Γ 為一橢圓， F 與 F' 為其兩焦點。
2. $FF' = 2a$ 時， Γ 為一線段（即線段 $\overline{FF'}$ ）。
3. $FF' > 2a$ 時， Γ 為無圖形（即 \emptyset ）。



圖一

二、橢圓之標準式

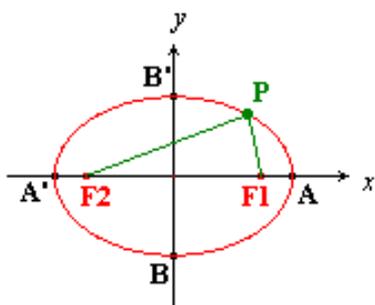
1. 由標準式求橢圓要項：

(a) 長軸為水平放置如【圖二】

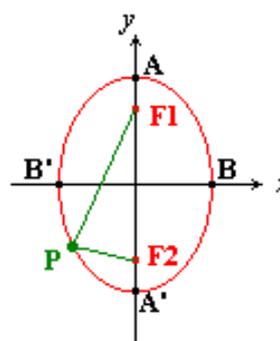
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, (a > b > 0)$$

(b) 長軸為垂直放置如【圖三】

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, (a > b > 0)$$



圖二



圖三

2. 名詞解釋：

(a) 軸： $\overline{AA'}$ ($\overline{F_1F_2}$)， $\overline{BB'}$ 為橢圓二對稱軸。

(b) 頂點： A, A', B, B' 為橢圓之四頂點（如果只講二頂點指 A, A' ）

(c) 長軸： $\overline{AA'} = 2a$ ，短軸： $\overline{BB'} = 2b$ （兩焦點相距 $2c$ ）

(d) 弦：橢圓上相異兩點的連線段稱為弦，

焦弦：過焦點的弦稱為焦弦，

正焦弦：焦弦垂直於長軸的稱為正焦弦。

(設 $a > b > 0$ ，則 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 或 $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ 之正焦弦長為 $\frac{2b^2}{a}$)

(e) 焦半徑：焦點與橢圓上任一點之連線段稱為焦半徑。

3. 基本關係：

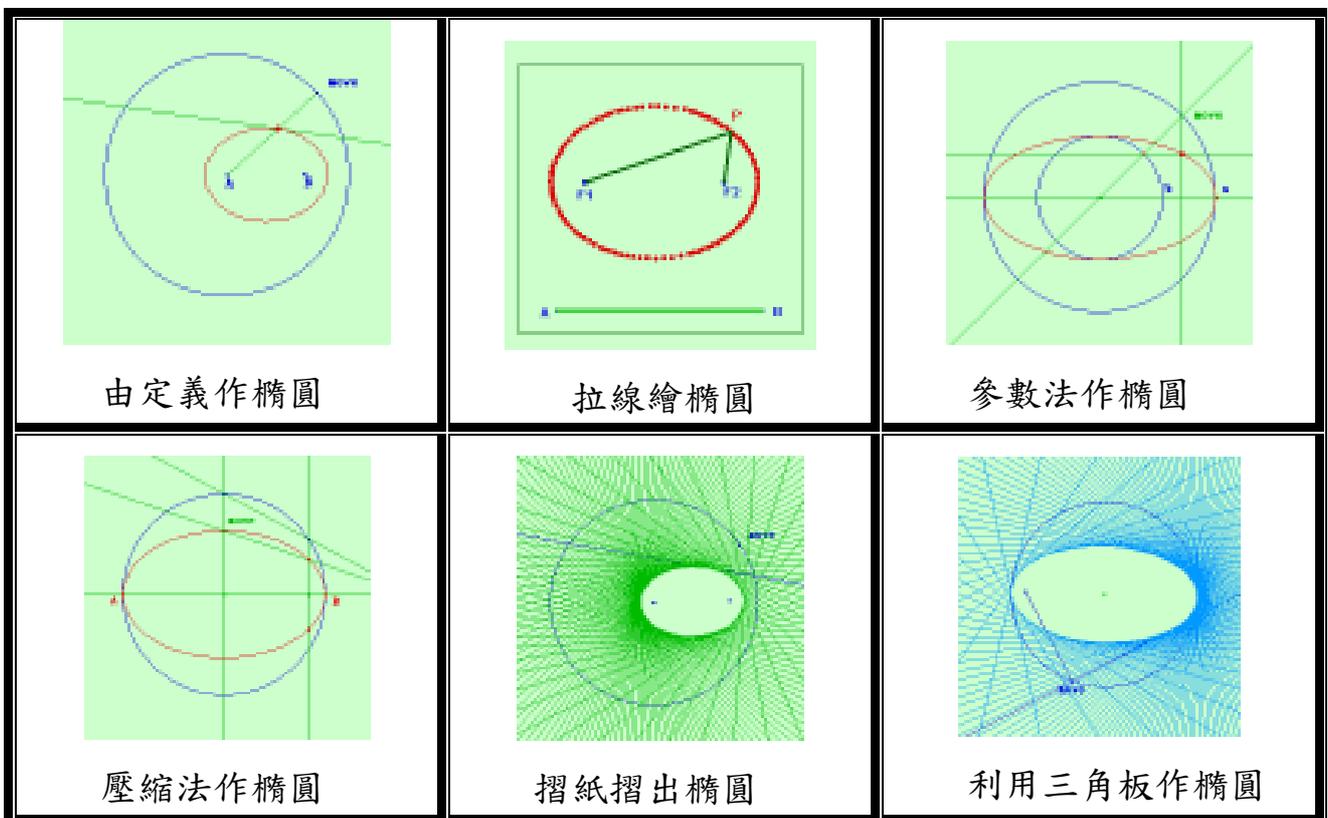
$$c^2 = a^2 - b^2 \text{ (選擇大的叫 } a^2 \text{，小的叫 } b^2 \text{，即 } a > b > 0 \text{)}$$

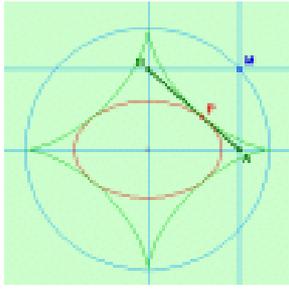
三、橢圓畫法

『為何要研究橢圓畫法呢?』

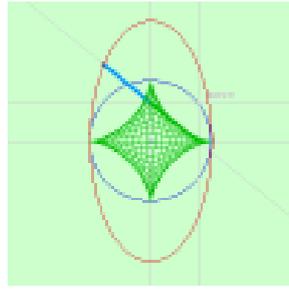
學 3D 製圖時，常有一個作圖概念，就是可將『線』當作割開平面的利具，用以刪除不要的物件，因此延伸出把『線』當作『剪刀』的概念。

橢圓畫法有許多種，因此如何選擇可用於機構設計之橢圓畫法，需經過思考與審慎評量的。以下為常見的橢圓畫法：





由 x, y 軸上固定長線段
上點的軌跡作橢圓



由 x, y 軸上固定長線段
延伸作橢圓



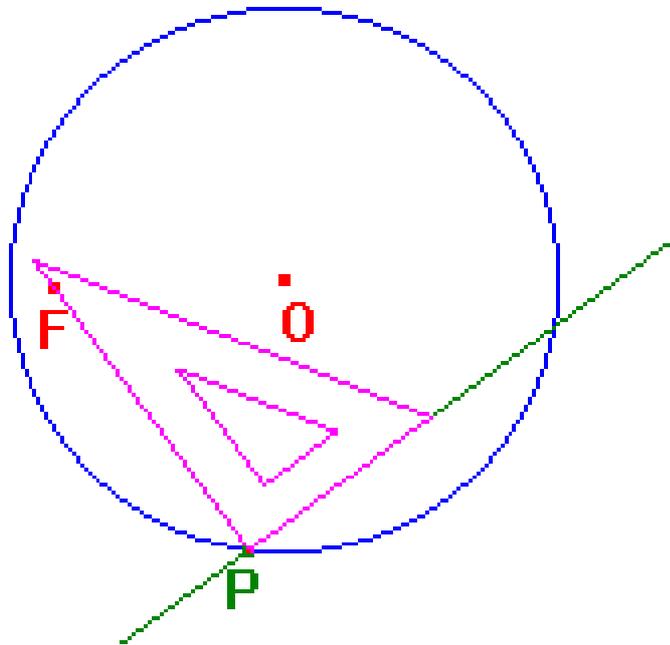
只用直尺作橢圓

最後我們採用『利用三角板做橢圓法』【圖四】，其做圖步驟如下：

Step1: 在圓內取異於圓心的一點 F (焦點)，圓上取一動點 P 。

Step2: 拿三角板將直角放在圓上 (P 點)，三角板的一邊通過 F 點。

Step3: 在三角板的另一邊畫一直線，移動 P 點，此直線即可包絡出橢圓！



圖四

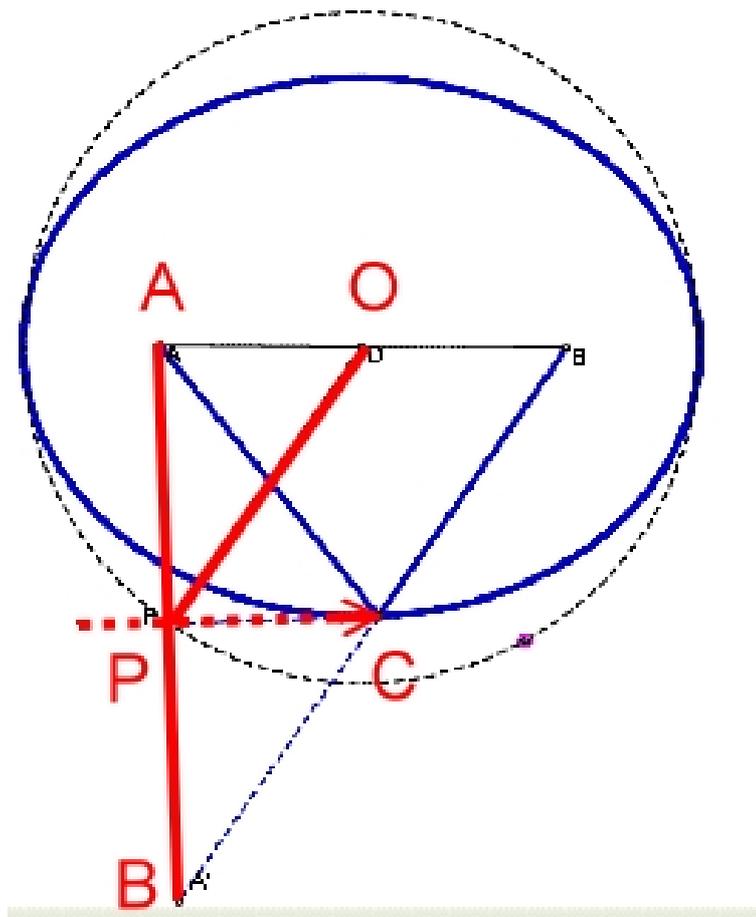
四、機構設計

1. 設計概念

參考『利用三角板做橢圓法』做圖步驟後，確定以下幾點是完成以三角板做橢圓的重要要件：

- (1) 使P點一直在圓上。 —> 對應做圖 Step2.
- (2) 有一連桿必通過『焦點』。 —> 對應做圖 Step2.
- (3) 於三角板的另一邊畫圓，即為成夾角 90 度。 —> 對應做圖 Step3.

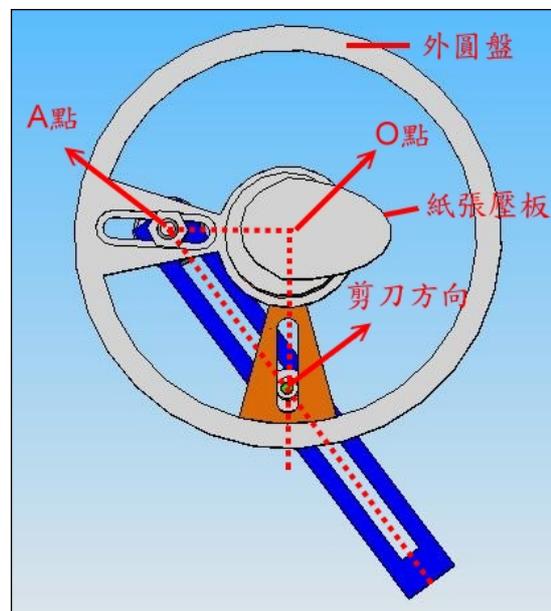
瞭解製作重點後，設計之連桿機構裝置如下【圖五】：



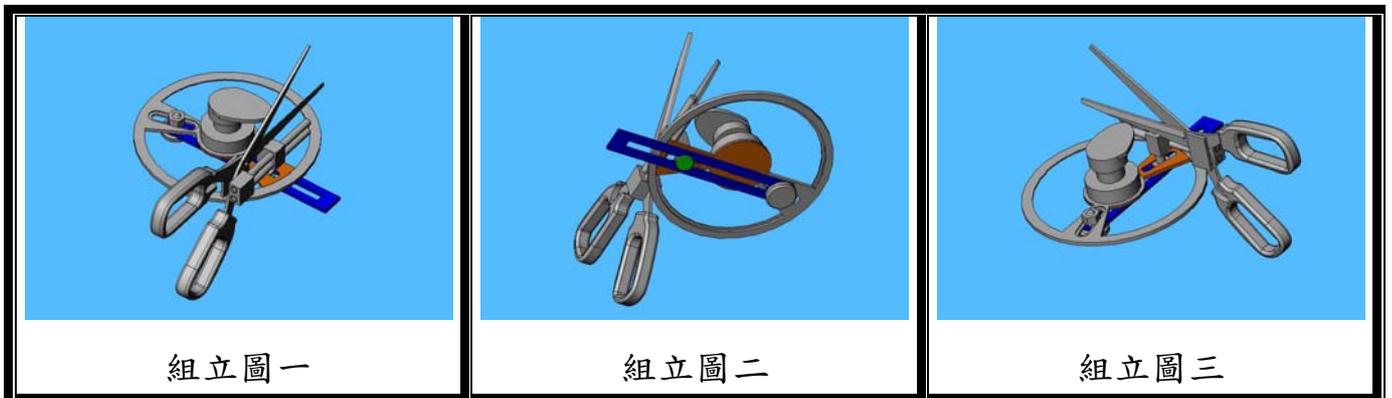
圖五

- (1) O 為固定點，設計 OP 桿，P 點以半徑 R 繞圓。
- (2) 設計一 AB 桿，使 AB 桿與 OP 桿，成連桿裝置相連。P 點會在 AB 連桿上滑動。
- (3) 於 P 點架設剪刀並使其垂直 AB 桿。
- (4) 剪刀 PC 方向即為橢圓之切線方向。當 OP 繞一圓時，PC 即包絡出橢圓。

2. 機構實體設計



3. 加工組立



4. 實做後試用

剪出來的橢圓，有符合需求，大小可以改變；紙的厚度薄到厚也是都適用的。由於第一次做此附件，不可避免的有不少缺失，但大前提『剪出橢圓』是做到了！



伍、問題討論

一、目前之剪刀附件設計有哪些需改良及加強的呢？

雖能順利剪出橢圓，總是第一次設計成品，故仍有許多零件或組

件需做變更，使此附件更便利的使用。

紙張固定方式由螺絲壓板改用磁鐵固定。並設計紙張固定器可旋轉 180 度就可直接剪出全橢圓，更符合『便利』需求。當然也是需要不斷嘗試才有最好的結果。

二、如何讓『橢圓剪刀附件』更精確得剪出所需之『長、短軸』橢圓呢？

能準確剪出所需長度，而擁有精度是成功作品的要素之一。故其校正及調整方式如下：【圖六】

1. 首先，將線段 AP 調整與線段 AO 『垂直』。

線段 AO 為 『半焦距長』。

線段 AP 為 『半短軸長』。

線段 OP 為 『半長軸長』。

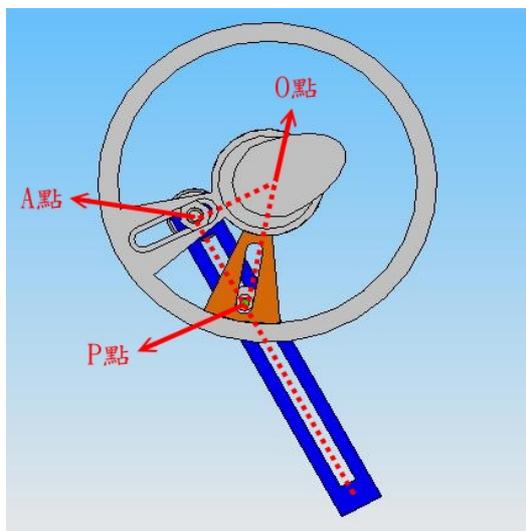
鋁製圓半徑為長、短軸最大長度限制。

2. 由上知

調整『A 點』即為調整『半焦距』。

調整『P 點』即為調整『半短軸』。

調整『線段 AP 長度』即為調整『半長軸』。



圖六

陸、修正與計畫

一、修正完成『橢圓剪刀附件』的紙張固定方式如下圖：

機構設計完成後，也如預期能檢出橢圓，但紙張挾持問題一直是個困擾，當然多撿幾次熟練了就沒此問題。因此紙若能固定越好，將能越易撿出橢圓，以下是修正情形：



原夾具

新夾具



分離圖



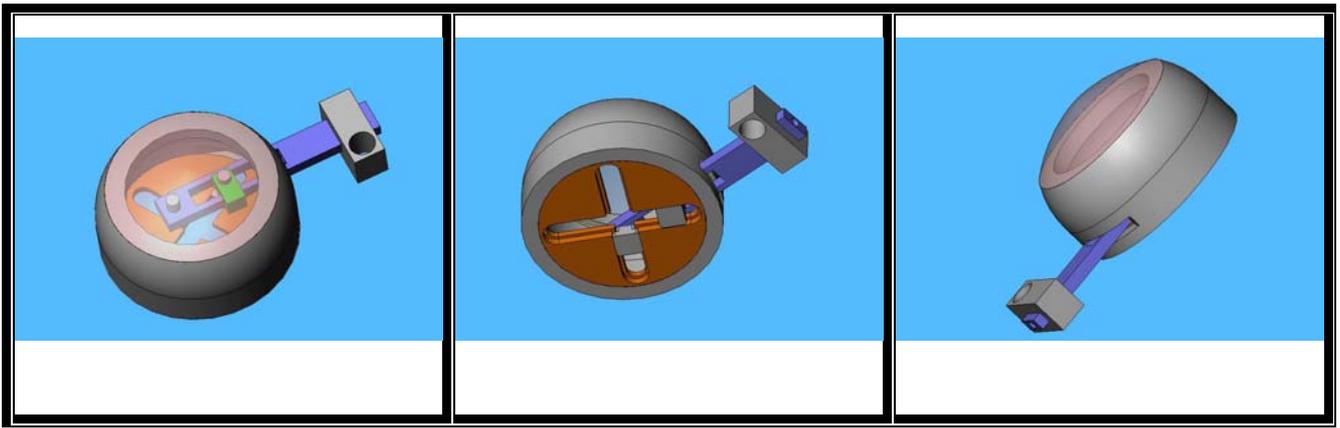
裝置圖

使用心得：

依然感覺不是很好用，所以…還需努力嘗試設計。

二、計畫中『橢圓切割器』之設計

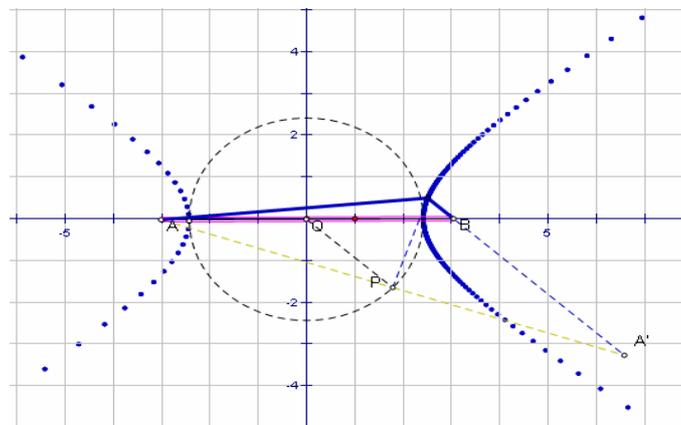
於製作『橢圓剪刀附件』時，由橢圓畫法與原理中，發現『由 x, y 軸上固定長線段延伸作橢圓』做圖法能適用於『橢圓切割器』，故先行於電腦設計出『橢圓切割器』草圖。以下為 3D 草圖：



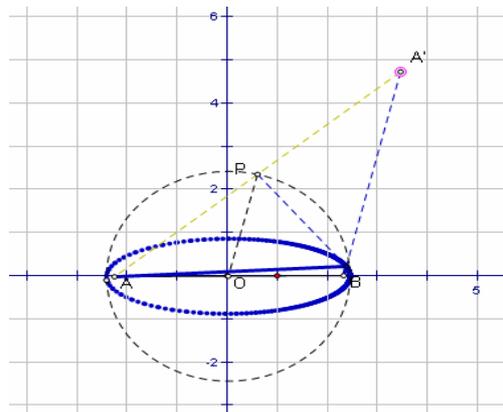
柒、研討橢圓

設計『千變萬化橢圓剪刀附件』的過程中，一開始常常發生問題，有不能檢出橢圓或機構卡住的問題，後來發現原來 OA 及 OP 的大小關係，會有不同的結果產生。

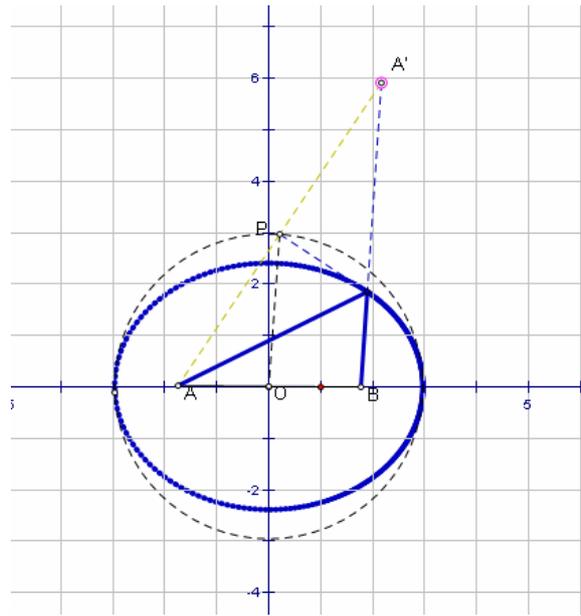
一、當 OA 大於 OP 時所得如下圖之雙曲線，當剪刀附件調整出這種狀態時，是無法剪出橢圓。



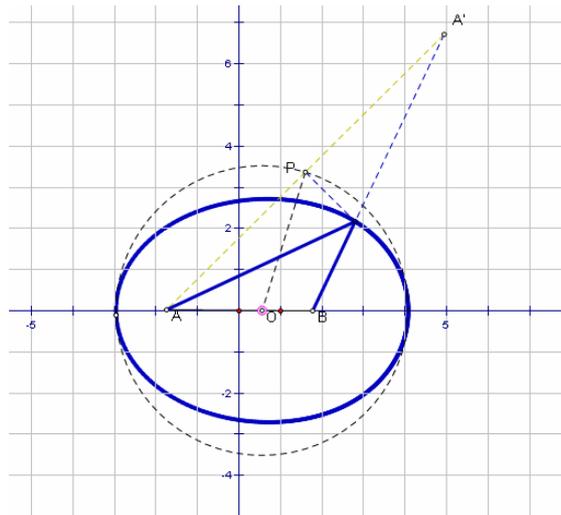
二、當 OP 大於 OA 且兩者接近時，剪出的橢圓較扁。



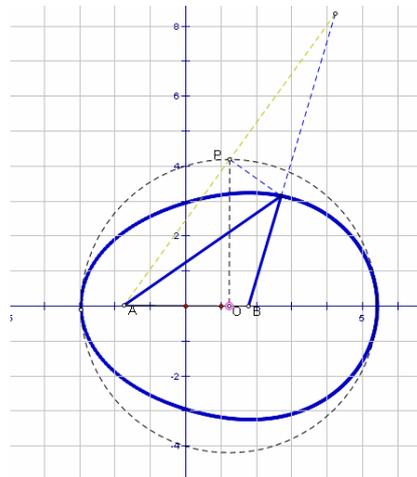
三、當 OP 較大於 OA 時，得到較胖的橢圓



四、當 OA 及 OB 不等長時，畫出如下的變形橢圓，剪刀附件無法剪出。



五、當 AO 遠大於 BO 時所得結果如下圖。



令人高興的！畢竟，一件作品從無到有；從設計到製作都有著不同的考驗，猶如母親待產。過程中的辛勞，結果的喜悅，就如老師所說都是一種『學習』，而這段過程就是一段美好的學習過程。

最後，想說一句：有了『橢圓剪刀附件』，千變萬化的橢圓都能在手中完成。

玖、參考資料

網站：閱讀橢圓

<http://steiner.math.nthu.edu.tw/ne01/tjy/edu-ellipse/index.htm>

網站：GSP

<http://myweb.ltsh.ilc.edu.tw/~longlife/gsp/gsp.htm>

網站：圓錐曲線的介紹

http://www.math.ntnu.edu.tw/~cyc/_private/gspst/89101/100.htm

網站：專業裁刀—捷登有限公司

http://www.jdarts.com.tw/html/_m__muo_m.htm