二〇〇四年第三屆旺宏科學獎成果報告書

與特殊型質數之倒數關聯的兩平方總和的整數分解

On the Decomposition of a VR Number Associated with Reciprocalsof Primes of Particular Forms

參賽編號：SA3-119

中 華 民 國 九十三 年 十 月 二十 日

與特殊型質數之倒數關聯的兩平方總和的整數分解

On the Decomposition of a VR Number Associated with Reciprocals of Primes of Particular Forms

一、研究動機：

給定下面範例：

$$0588235294117647 0588^2 + 2352941176470588 2353^2$$

$$= 0588235294117647058823529411764705882353$$

其所得到的等式結果竟然是相同的兩段數字並列且與質數 17 **之倒數結果有某種的關聯，即**

$$\frac{1}{17} = 0.\overline{0588235294117647}$$

$$= 0.\underline{05882352941176470588}\underline{\underline{2352941176470588235}}294117647\cdots\cdots \quad (\text{Len}(1/17) = 16)$$

這個式子引導出更多與 $1/17$ **循環節相關的有趣想法，這個源自於【3】兩平方數之和問題在電腦科學上本來就很具挑戰性的且是絕對有用的；不但出現** 17 **的一個奇妙特質，也與對稱整數矩陣的對稱分解有著密切的演算關係，未來可以發展出很富創意的定理及其主要論述，並更進一步將運算法則作深入的考量，探討質數之倒數更有趣的性質及推廣。**

這個創意發展是從幾年前發現 $1/17$ **循環節數字串中存在非常有趣的特性開始，它令人驚訝的結果就已經開始醞釀循環小數的奧秘。在前年底（2002）老師曾將這個問題交給數理資優班的兩個同學去研究，然後他們花了幾個月做出了初步的基本結果【3】並參加台灣 2003 年國際科展（ISF），拿到了數學科大會獎的佳作；這個作品的部分新穎結果曾參加去年的第二屆旺宏科學獎（2003 MXIC2）的初賽，最後幸運的入圍最後之全國決賽；因故，乃至現在於第三屆旺宏科學獎（2004 MXIC3）再次飆創意，並結合一些有趣的演算法；且在偶然的機會中，曾經在相關網站上發現過幾組數字（挑戰試題），引起我極大的興趣，不僅只是滿足了對數值的好奇與樂趣而已，更做出了更創新的前所未有研究結果及許多類似的精采分解【1】。**

深陷其中並將焦點聚集在有理數的特性上，因為一個小小的契機我得以深入研究純循環小數，可以發現事實上真的存在很多更有趣的特性。這些有趣的現象，經過我深入的研究之後，深深受到它的「有趣」吸引。為能充分了解這些「有趣」並明白樂趣所在，指導老師更建議我實際去試做 $1/257$ **和** $1/65537$ **，並研究觀察其他類似的變化，它們確實與特殊型質數之倒數的循環節有密不可分的關聯性，更顯示出「**$\text{VR}-C_{2n}$**」一定是脫離不了單純且特定質數之倒數的循環節形式。**

二、研究目的：

(一) 簡化不定方程 $\sum_{k=0}^{n-1}(x_k \cdot r^k) = \sum_{k=0}^{n-1} x_k^2$ **。**

(二)「r^2+1**」、「**r^4+r^2+1**」～「**$\text{VR}-C_{2n}$**」、「**$\text{VR}-C_{3n}$**」。**

(三) 10^k+1 **之質因數分解：「**$\text{VR}-C_{2n}$**」之列表彙整及其與「**$10^{2n}+1$**」所蘊釀的奧秘。**

(四) 證明「$\text{VR}-C_{2n}$**」之對稱性及其個數是無限多個（存在有無限多個有趣的分解）。**

(五) 證明「$\text{VR}-C_{2n}$**」與其有理數表示成純循環節數字串的關聯性（「**$1/p$**」&「**m^2/p**」）。**

(六) 探討「$\text{VR}-C_{2n}$**」更多的性質法則及其「主要定理」，並作對稱整數矩陣的對稱分解。**

(七) 擬定一個主要論述並結合歐幾里得演算法則（Euclidean algorithm）的直接方法，研究與特殊型質數倒數關聯的兩半部分數字平方總和之性質及其整數分解。

三、研究過程與方法：

(一) On the representation of VR-ConcatenatingSquares as a sum of two squares

首先，討論在【2】所看到的發現兩個平方和的整數分解，由於它是無限多諸如此類有趣分解的預言者，更是其他許多類似精采分解的開始。

$\boxed{\text{符號說明}}$

A_n **：前（左）半部的** n **位數字；** B_n **：後（右）半部的** n **位數字；** $\text{VR}-C_{2n}$ **：由** $2n$ **位數字組成的「**Visual Representation Concatenating Squares**」；** $\text{Len}(q)$ **：表示有理數** q **若能寫成純循環小數時的循環節長度。根據【3】，得到關於「** $\text{VR}-C_{2n}$ **」的不定方程之基本概念。**

「 r^2+1 **」~「**VR-ConcatenatingSquares C_{2n} **」** $ar+b=a^2+b^2$ **之等價簡化：**

Diophantine Equation**：** $ar+b=a^2+b^2 \Leftrightarrow r^2+1=s^2+t^2=(2a-r)^2+(2b-1)^2$
$r^2+1=(m^2+n^2)(u^2+v^2)\,;\, mu-nv=1\,,\, mv+nu=r$
① $(a,b)=(mv,mu)$ ② $(a,b)=(nu,mu)$ ③ $(a,b)=(mv,-nv)$ ④ $(a,b)=(nu,-nv)$

(1)**當** $r=10^4$ **時；** (C_8) **：** $u=2353=\dfrac{4\cdot 10^4+1}{17}, v=0588=\dfrac{10^4-4}{17}$ **，即**

$$\begin{cases} 05882353=0588^2+2353^2=\dfrac{10^8+1}{17} \\ 94122353=9412^2+2353^2=\dfrac{(4\cdot 10^4+1)^2}{17} \end{cases}。$$

(2)**當** $r=10^{64}$ **時；** (C_{128}) **：**

$$u=\frac{16\cdot 10^{64}+1}{257}$$
$$=0622568093385214007782101167315175097276264591439688715953307393$$

(Symmetric Decomposition of Symmetric Integer Matrices)

$$\left(\frac{10^{64}-16}{257}\right)^2+\left(\frac{16\cdot 10^{64}+1}{257}\right)^2$$
$$=0038910505836575875486381322957198443579766536964980544747081712$$
$$0622568093385214007782101167315175097276264591439688715953307393$$
$$=0038910505836575875486381322957198443579766536964980544747081712^2$$
$$+0622568093385214007782101167315175097276264591439688715953307393^2$$
$$=\frac{10^{128}+1}{257}$$

$$\left(\frac{256\cdot 10^{64}+16}{257}\right)^2+\left(\frac{16\cdot 10^{64}+1}{257}\right)^2$$
$$=9961089494163424124513618677042801556420233463035019455252917288$$
$$0622568093385214007782101167315175097276264591439688715953307393$$
$$=9961089494163424124513618677042801556420233463035019455252917288^2$$
$$+0622568093385214007782101167315175097276264591439688715953307393^2$$
$$=\frac{(16\cdot 10^{64}+1)^2}{257}$$

(二)**直接計算法：**

由C_{2n}**的不定方程及令**$r=10^{\{[\log b]+1\}}$**；得出**$a=5\cdot 10^{[\log b]}\pm\sqrt{D}$**，且**$a$**是偶數。**

(三)r^2+1**：從**$10^{2n}+1$**之標準分解式（即**$r=10^n$**）可看出有許多的**n**使得**$10^{2n}+1$**有許多**$(4m+1)$**形狀的質因數（摘自** ftp:sable.ox.ac.uk/pub/math/cunningham/10+**）。** r^2+1**寫成兩個因子之積的觀念是非常重要的，但有無限多個有趣之分解的說法並不是很令人信服；總而言之，目的在於推廣有趣的**$2n$**位「**VR-ConcatenatingSquares C_{2n}**」。**

(四)**彙整**「VR-ConcatenatingSquares C_{2n}」**之列表：** $C_4, C_6, C_8, C_{10}, C_{12}, C_{14}, C_{16}, C_{18}, C_{20}$

$2n$	$A_n\cdot 10^n+B_n$	$(10^n-A_n)\cdot 10^n+B_n$
C_{20}	**9999000100**0099990001	**0000999900**0099990001
	88321167883211678833	**1167883212**3211678833
	87671232883287671233	**1232876712**3287671233
	83245449123734621953	**1675455088**3734621953
	48508723804997775601	**5149127620**4997775601
C_{18}	**999999000**001000000	**000001000**001000000
	990099010099009901	**009900990**099009901
	989900010099989901	**010099990**099989901
C_{16}	**98939412**10243728	**01060588**10243728
	9831031212888513	**01689688**12888513
	9750390015600625	**02496100**15600625
	9686424017428225	**03135760**17428225
	9330008825002048	**06699912**25002048
	9187718827318513	**08122812**27318513
	8908686031180401	**10913140**31180401
	8186968838526913	**18130312**38526913
	7972858840202128	**20271412**40202128
	7657044042355776	**23429560**42355776
	7086160045440001	**29138400**45440001
	6825781246547313	**31742188**46547313
	6570091247470848	**34299088**47470848
	6202846048531600	**37971540**48531600
	5564230049680625	**44357700**49680625
C_{14}	**9231820**2663025	**0768180**2663025
	91103202846976	**0889680**2846976
	86206903448276	**1379310**3448276
	84651703604525	**1534830**3604525
C_{12}	**883212**321168	**116788**321168
	876712328768	**123288**328768
	999900010000	**000100**010000
C_{10}	**82350**38125	**17650**38125
	7416043776	**25840**43776
	9901009901	**00990**09901
C_8	**9412**2353	**0588**2353
C_6	**990**100	**010**100
C_4	**88**33	**12**33
形式：「兩半」、「平方」、「成對」~ Visual Basic 6.0 **執行所得出的結果**		

(**五**)「VR-ConcatenatingSquares C_{2n}」**有多少解：**

以歸納法推得相異且 F **為** $10^{2n}+1$ **的質因數（經過模數** 4 **的運算之結果是** 1**）分解個數，則有** $2^{(F-1)}$ **個不同的平方和表示法；結論指出的是有多少方法可用來演算** $(10^{2n}+1)$ **為兩個平方的總和，**「VR-ConcatenatingSquares C_{2n}」**的答案對數「最多」可達** $2^{(F-1)}-1$ **對。**

(**六**)**一般化之推廣：**

(1)**一組數字等於其依序各三位數（三部份數字）平方的總和（數字串）。**

(2)**一組數字等於其依序各** n-th **位數（** n **部分數字）的平方總和。**

http://www.domino.research.ibm.com/Comm/wwwr_pondernsf/challenges/March2000.html
http://www.math.smsu.edu/~les/POW08_96.html
http://www.primepuzzles. net/puzzles/puzz_104.html
http://www.primepuzzles. net/puzzles/puzz_180.html

(**七**) $1/17$ **與** $1/257$ **的趣味：**

聯想到在給定（或已知）一個平方根 z **，以滿足** $-1 \bmod n$ **之情形下，將整數** n **寫成兩個平方數之和的著名演算技巧。簡單地說，** n **及** z **可利用歐幾里得演算法（**Euclidean algorithm**），直到第一個對** x **及** y **之餘數小於** $\sqrt{n}$ **為止，即可得出** $n=x^2+y^2$ **。當然，** -1 **的平方根不同於** z **，自然也導致將** n **表示為兩個平方數之和的不同表示法。一般而言，在【**1**】中把簡化的二元二次式用來表示** n **時，可以對稱矩陣的對稱分解法來求得，此過程名為「簡化」；而這有助於理解為何有些餘數在歐幾里得演算法中可適用於** n**，而有些平方根模數** n **可產生此種表示法。這正是研究與特殊型質數倒數關聯的兩半部分數字平方總和之構造的令一出發點，成為一個很重要且必須要關心的問題。**

(**八**)**整數的表示法** x^2+y^2 **：（**Symmetric Decomposition of Symmetric Integer Matrices**）**

所謂的「對稱分解」其實就是二次式的簡化

用二元二次式來表示整數的問題是最古老的數論問題之一，可討論任意二次式表示法的問題，主要是在於要表示那些整數且探究其原因為何，且找整數表示法亦是一個很有趣的問題。最後，本文中的主要論述是由對決定固定形式表示法的已知演算法稍微改變而來，主要的想法可用一簡單的例子來加以說明。試找出非負整數 x **及** y **，使得**

$$05882353=x^2+y^2\ ,$$

當然，真正的問題是要找出 $-1 \pmod{n}$ **的平方根；幸運地，** $10^{2u}+1$ **的任一個質因數** n **都能滿足** $z^2\equiv -1 \pmod{n}$ **，其中** $z\equiv 10^u \pmod{n}$ **，由** $10^8+1=17\cdot 5882353$ **可導出：**

		588	4	
	5882353	10^4		
588	10^4	17	4	
4	2353	4	1	0
		1	0	1

也就是說，

$$\begin{bmatrix} 5882353 & 10^4 \\ 10^4 & 17 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 588 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 588 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2353 & 588 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2353 & 4 \\ 588 & 1 \end{bmatrix}\ ;$$

所以，我們因此得出了

$$05882353=588^2+2353^2$$

這個巧妙的分解！

如此很容易可以證實每個整數 $\frac{10^{8(4k+1)}+1}{17}$ **有一個其本來就有的自動分解，下一個是**

$$\begin{aligned}&05882352941176470588235294117647058823 53\\&=0588235294117647058 8^2+2352941176470588235 3^2\end{aligned}$$ ；

然而，指數 $8(4k-1)$ **是比較不自動的，當** $k=1$ **的情況可產生**

$$058823529412235294117648=058823529412^2+235294117648^2$$ ，

可以尋找其他 $10^{2u}+1$ **的奇特的因數且看出所說的表示法就是分解，而分解可以產生平方數之和。為了能強調其正確性並體會樂趣，再試試** $\frac{(10^{128}+1)}{257}$ **，的確**

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix}(10^{128}+1)/257 & 10^{64}\\ 10^{64} & 257\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}(10^{64}-16)/257 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}16 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}16 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(10^{64}-16)/257 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}(16\cdot10^{64}+1)/257 & (10^{64}-16)/257\\ 16 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(16\cdot10^{64}+1)/257 & 16\\ (10^{64}-16)/257 & 1\end{bmatrix};\end{aligned}$$

總而言之，我提出的歐幾里德演算法當然是已知的且有效率的，然而透過簡化二次式來作對稱分解的作法很容易就可以推導出有關此研究主題的作法；另外，當然也可推廣應用到我沒提及的有關不定形式之表示法，在【1】中有一章節說明作法。

四、討論及其應用：

(一)「VR-C_{2n}~平方加總」：

(1) $a^2+b^2=a\cdot10^n+b$ **等同於** $10^{2n}+1=(10^n-2a)^2+(2b-1)^2$ **，故只要考慮** $10^{2n}+1$ **的平方和表示法** s^2+t^2 **，其中** $s=10^n-2a$ **為偶數，** $t=2b-1$ **為奇數。**

C_{2n}	$a^2+b^2=ar+b\Leftrightarrow(2a-r)^2+(2b-1)^2=r^2+1=s^2+t^2$	
$r=10^n$	$10^{n-1}+1\le a,b\le10^n-1$	$2a-r=\pm s,2b-1=t,1\le s<r,1\le t<r$
(a,b)	**對稱性：** $(r-a,b)\leftrightarrow(a,b)$	**搜尋簡化成** $(a,b)\to2a\ge r,2b\le r$

(2)**若** r^2+1 **為質數，則沒有相對應的** (a,b) **；若** r^2+1 **為非質數，則一定可寫成兩個整數因子的乘積（假設已確知** 2 **及每一個質數** $p\equiv1(\mathrm{mod}4)$ **都可唯一表示成兩個平方數之和），即** $r^2+1=(m^2+n^2)(u^2+v^2)$ **，** r^2+1 **的所有質因數都是** $(4k+1)$ **的形式且** $m^2+n^2\le r$ **，得等式**

$$r^2+1=(mu-nv)^2+(mv+nu)^2 \text{ 或 } r^2+1=(mu+nv)^2+(mv-nu)^2,$$

故

$$(s,t)\Rightarrow(a,b)\Rightarrow \text{數組} C=a^2+b^2=(r^2+1+t+sr)/2\text{。}$$

(二)代數數論：闡釋兩半部份數字的平方總和「VR-C_{2n}」 $\Leftrightarrow a^2-10^n\cdot a+(b^2-b)=0$

(1) **兩根和：在既定** b **值下，若答案存在，則其** a **值必然成對，且其總和等於** 10^n **。**

(2) **兩根積：** $b(b-1)\Leftrightarrow4b(b-1)+1=4a(10^n-a)+1=4E(a)+1=F(a)$ **是否為完全平方數；**

Þ **並將每個** A **試算值（約** $9\times10^{n-1}$ **次）計算出** $F(A)$ **，得** $B-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{4\cdot E(A)+1}$ **，即**

$$\sqrt{E(A)}<B-\frac{1}{2},$$

假設 b **是** $E(A)$ **的平方根；四捨五入至最近的正整數，得出** $E(A)=B^2-B$ **。**

Þ 指出此運算式中 a 的最後一位數字是多少，可很快確定 $F(a)$ 是否能成為完全平方；

Þ 「VR-C_{2n}」之列表中 A_n 的個位數字是 $\{0,2,8\}$ 且 B_n 的個位數字是 $\{0,1,3,5,6,8\}$；

Þ r^2+1 的質因數分解是為了能將其寫成兩組平方和的乘積。

(三)由 C_{2n} 之列表，得出「對稱性」且存在有無限多個有趣的分解是與「等比級數」稍微有關。

(1).

性質一：假如 $X = A\cdot 10^n + B$ 是「VR-C_{2n}」，
則 $Y = (10^n - A)\cdot 10^n + B$ 必是另一對稱之「VR-C_{2n}」。

(2).

性質二：(必存在有無限多個有趣的分解)「VR-C_{2n}」與 $1/17$ 之關係（Len$(1/17)=16$）：
「VR-C_{2n}」之個數是無限多個的，且其數列是包含許多無限多個的子數列。

若 $C_8 = A_4^2 + B_4^2$ ：$0588^2 + 2353^2 = 05882353 = \dfrac{10^8+1}{17} = C_8$ 且 $1/17 = 0.\overline{0588235294117647}$ ，則

① $05882352941176470588^2 + 23529411764705882353^2$

$= 0588235294117647058823529411764705882353$

$$= \left(\frac{10^{20}-4}{17}\right)^2 + \left(\frac{4\cdot 10^{20}+1}{17}\right)^2 = \left(\frac{10^{20}-4}{17}\right)\cdot 10^{20} + \left(\frac{4\cdot 10^{20}+1}{17}\right) = \frac{10^{40}+1}{17} = A_{20}^2 + B_{20}^2$$ 。

② $058823529412^2 + 235294117648^2$

$= 058823529412235294117648$

$$= \left(\frac{10^{12}+4}{17}\right)^2 + \left(\frac{4\cdot 10^{12}+16}{17}\right)^2 = \left(\frac{10^{12}+4}{17}\right)\cdot 10^{12} + \left(\frac{4\cdot 10^{12}+16}{17}\right) = \frac{(10^{12}+4)^2}{17} = A_{12}^2 + B_{12}^2$$ 。

③**設** k Î N ，C_{32k+8} **之「VR-C_{2n}」如下：代表數之推廣** $C_{32k+8} = A_{16k+4}^2 + B_{16k+4}^2$。

$a(k)$ $= \left[\dfrac{10^{4(4k+1)}-4}{17}\right]^2 + \left[\dfrac{4\cdot 10^{4(4k+1)}+1}{17}\right]^2$ $= \dfrac{10^{8(4k+1)}+1}{17}$ $= 058823529411\cdot \sum_{j=1}^{2k} 10^{8(2j-1)} + \langle C_8 \rangle$	$a(k)$ $= \left[\dfrac{16\cdot 10^{4(4k+1)}+4}{17}\right]^2 + \left[\dfrac{4\cdot 10^{4(4k+1)}+1}{17}\right]^2$ $= \dfrac{[4\cdot 10^{4(4k+1)}+1]^2}{17}$

④**設** k Î N ，C_{32k-8} **之「VR-C_{2n}」如下：代表數之推廣** $C_{32k-8} = A_{16k-4}^2 + B_{16k-4}^2$。

$a(k)$ $= \dfrac{\left[10^{4(4k-1)}+4\right]^2}{17}$ $= \left[\dfrac{10^{4(4k-1)}+4}{17}\right]^2 + \left[\dfrac{4\cdot 10^{4(4k-1)}+16}{17}\right]^2$	$a(k)$ $= \dfrac{16\left[10^{8(4k-1)}+1\right]}{17}$ $= \left[\dfrac{16\cdot 10^{4(4k-1)}-4}{17}\right]^2 + \left[\dfrac{4\cdot 10^{4(4k-1)}+16}{17}\right]^2$

(四)由「性質二」得知「VR-C_{2n}」之個數必是無限多個，且揭露反映出其清晰的無限循環小數之結果，取其循環節數字串之長度為組合位數，便能生成具此特殊性質的數。

(1).$\boxed{\text{性質三}}$：「VR-ConcatenatingSquares」與創意的$1/257$（存在有無限多個有趣的分解）

已知 $A_{64}^2+B_{64}^2=C_{128}=(10^{128}+1)/257$，即

$$
\begin{aligned}
C_{128} &= 0038910505836575875486381322957198443579766536964980544747081712^2+\\
&\quad\ 0622568093385214007782101167315175097276264591439688715953307393^2\\
&= 0038910505836575875486381322957198443579766536964980544747081712\\
&\quad\ 0622568093385214007782101167315175097276264591439688715953307393;
\end{aligned}
$$

且 $\mathrm{Len}(1/257)=256$，

$$
\begin{aligned}
1/257 = 0.&\overline{0038910505836575875486381322957198443579766536964980544747081712}\\
&\overline{0622568093385214007782101167315175097276264591439688715953307392}\\
&\overline{9961089494163424124513618677042801556420233463035019455252918287}\\
&\overline{9377431906614785992217898832684824902723735408560311284046692607};
\end{aligned}
$$

則① C_{640}：$A_{320}^2+B_{320}^2=C_{640}$，即 $C_{640}=\dfrac{10^{640}+1}{257}=\left[\dfrac{10^{320}-16}{257}\right]^2+\left[\dfrac{16\cdot 10^{320}+1}{257}\right]^2$。

$$
\begin{aligned}
&\{\overline{0038910505836575875486381322957198443579766536964980544747081712}\\
&\ \overline{0622568093385214007782101167315175097276264591439688715953307392}\\
&\ \overline{9961089494163424124513618677042801556420233463035019455252918287}\\
&\ \overline{9377431906614785992217898832684824902723735408560311284046692607}\}\\
&\ 0038910505836575875486381322957198443579766536964980544747081712^2+\\
&\{\overline{0622568093385214007782101167315175097276264591439688715953307392}\\
&\ \overline{9961089494163424124513618677042801556420233463035019455252918287}\\
&\ \overline{9377431906614785992217898832684824902723735408560311284046692607}\\
&\ \overline{0038910505836575875486381322957198443579766536964980544747081712}\}\\
&\ 0622568093385214007782101167315175097276264591439688715953307393^2\\
=&\{\overline{0038910505836575875486381322957198443579766536964980544747081712}\\
&\ \overline{0622568093385214007782101167315175097276264591439688715953307392}\\
&\ \overline{9961089494163424124513618677042801556420233463035019455252918287}\\
&\ \overline{9377431906614785992217898832684824902723735408560311284046692607}\}\\
&\ 0038910505836575875486381322957198443579766536964980544747081712\ \&\\
&\{\overline{0622568093385214007782101167315175097276264591439688715953307392}\\
&\ \overline{9961089494163424124513618677042801556420233463035019455252918287}\\
&\ \overline{9377431906614785992217898832684824902723735408560311284046692607}\\
&\ \overline{0038910505836575875486381322957198443579766536964980544747081712}\}\\
&\ 0622568093385214007782101167315175097276264591439688715953307393
\end{aligned}
$$

②**設** k Î N，$C_{512k+128}$ **之「**VR-C_{2n}**」如下：代表數之推廣** $C_{512k+128}=A_{256k+64}^2+B_{256k+64}^2$。

$$a(k)=\frac{10^{128(4k+1)}+1}{257}=\left[\frac{10^{64(4k+1)}-16}{257}\right]^2+\left[\frac{16\cdot 10^{64(4k+1)}+1}{257}\right]^2$$

$$=\frac{10^{128}\cdot(10^{256k}-1)\cdot(10^{256k}+1)}{257}+\langle C_{128}\rangle=\left(\frac{10^{256}-1}{257}\right)\cdot\sum_{j=1}^{2k}10^{128(2j-1)}+\langle C_{128}\rangle$$

$$a(k)=\frac{[16\cdot 10^{64(4k+1)}+1]^2}{257}$$

$$=\left[\frac{256\cdot 10^{64(4k+1)}+16}{257}\right]^2+\left[\frac{16\cdot 10^{64(4k+1)}+1}{257}\right]^2$$

是 $C_{512k+128}$ **之「**VR-ConcatenatingSquares**」；即** $A_{256k+64}^2+B_{256k+64}^2=C_{512k+128}\ \ (k\in N)$。

③ C_{384}：$A_{192}^2+B_{192}^2=C_{384}$，**即** $\left[\frac{10^{192}+16}{257}\right]^2+\left[\frac{16\cdot 10^{192}+256}{257}\right]^2=\frac{[10^{192}+16]^2}{257}$。

0038910505836575875486381322957198443579766536964980544747081712
0622568093385214007782101167315175097276264591439688715953307392
9961089494163424124513618677042801556420233463035019455252918288 ^{2} +
0622568093385214007782101167315175097276264591439688715953307392
9961089494163424124513618677042801556420233463035019455252918287
9377431906614785992217898832684824902723735408560311284046692608 ^{2}
= 0038910505836575875486381322957198443579766536964980544747081712
0622568093385214007782101167315175097276264591439688715953307392
9961089494163424124513618677042801556420233463035019455252918288 &
0622568093385214007782101167315175097276264591439688715953307392
9961089494163424124513618677042801556420233463035019455252918287
9377431906614785992217898832684824902723735408560311284046692608

④**設** k Î N，$C_{512k-128}$ **之「**VR-C_{2n}**」如下：代表數之推廣** $C_{512k-128}=A_{256k-64}^2+B_{256k-64}^2$。

$$a(k)=\frac{[10^{64(4k-1)}+16]^2}{257}=\left[\frac{10^{64(4k-1)}+16}{257}\right]\cdot 10^{64(4k-1)}+\left[\frac{16\cdot 10^{64(4k-1)}+256}{257}\right]^2$$

$$=\left[\frac{10^{64(4k-1)}+16}{257}\right]^2+\left[\frac{16\cdot 10^{64(4k-1)}+256}{257}\right]^2$$

$$a(k)=\frac{256\cdot[10^{128(4k-1)}+1]}{257}=\left[\frac{256\cdot 10^{64(4k-1)}-16}{257}\right]\cdot 10^{64(4k-1)}+\left[\frac{16\cdot 10^{64(4k-1)}+256}{257}\right]^2$$

$$=\left[\frac{256\cdot 10^{64(4k-1)}-16}{257}\right]^2+\left[\frac{16\cdot 10^{64(4k-1)}+256}{257}\right]^2$$

是 $C_{512k-128}$ **之「**VR-ConcatenatingSquares**」；即** $A_{256k-64}^2+B_{256k-64}^2=C_{512k-128}\ \ (k\in N)$。

(2).$\boxed{\text{性質四}}$：「VR-C_{2n}」與$1/65537$鮮為人知的關係【$\mathrm{Len}(1/65537)=65536$ 】：

若C_{32768}：$A_{16384}^2+B_{16384}^2=C_{32768}=\dfrac{10^{32768}+1}{65537}$，

且得知$1/65537$之純循環長度之數字串的表示式（請參閱附錄資料-Visual Basic 6.0 程式），

$$0000152585562354090055998901383\cdots 770572348444390191800051879091 2^2+$$
$$0039061903962647054335718754291\cdots 266521201763889100813281047347 3^2$$
$$=\{0000152585562354090055998901383\cdots 7705723484443901918000518790912\,|$$
$$0039061903962647054335718754291\cdots 2665212017638891008132810473473\}$$

則① $A_{81920}^2+B_{81920}^2=C_{163840},A_{147456}^2+B_{147456}^2=C_{294912},A_{212992}^2+B_{212992}^2=C_{425984},\ldots$；

$A_{49152}^2+B_{49152}^2=C_{98304},A_{114688}^2+B_{114688}^2=C_{229376},A_{180224}^2+B_{180224}^2=C_{360448},\ldots$。

②

$$a(k)=\frac{10^{32768}\cdot(10^{65536k}-1)\cdot(10^{65536k}+1)}{65537}+\frac{10^{32768}+1}{65537}$$
$$=\left[\frac{10^{16384(4k+1)}-256}{65537}\right]^2+\left[\frac{256\cdot 10^{16384(4k+1)}+1}{65537}\right]^2$$
$$=\frac{10^{32768(4k+1)}+1}{65537}$$

是$C_{131072k+32768}$ 之「VR-C_{2n}」；即$A_{65536k+16384}^2+B_{65536k+16384}^2=C_{131072k+32768}^2\ (k\in N)$。

③

$$a(k)=\frac{[10^{16384(4k-1)}+256]^2}{65537}$$
$$=\left[\frac{10^{16384(4k-1)}+256}{65537}\right]^2+\left[\frac{256\cdot 10^{16384(4k-1)}+65536}{65537}\right]^2$$
$$a(k)=\frac{65536\cdot[10^{32768(4k-1)}+1]}{65537}$$
$$=\left[\frac{65536\cdot 10^{16384(4k-1)}-256}{65537}\right]^2+\left[\frac{256\cdot 10^{16384(4k-1)}+65536}{65537}\right]^2$$

是$C_{131072k-32768}$ 之「VR-C_{2n}」；即$A_{65536k-16384}^2+B_{65536k-16384}^2=C_{131072k-32768}^2\ (k\in N)$。

(五) $\boxed{\text{性質五}}$：Primes as a Sum of Two Squares

我們都知道一個形如$(4k+1)$的質數p可唯一表示成兩平方數之和；再根據我的研究過程「VR-ConcatenatingSquares ?列表，只有質數101與05882353，使得

$$101=10^2+1^2,05882353=0588^2+2353^2=\boxed{0588}\,\&\,\boxed{2353}\text{，}$$

是否能再找出此類質數嗎？我發現展出一套絕妙的方法來研究下面這個性質。

設p是可表為兩個平方數和的一種特定型式的數，即滿足等式

$$p=\mathrm{E}\,\&\,\mathrm{O}=\mathrm{E}^2+\mathrm{O}^2\text{，}$$

其中「&?是連接符號，E是偶數，O是奇數，則p為質數之解只有二個：

101及5882353，

且5882353是與質數17之倒數有著密切關聯的數。

(六)由$\boxed{\text{性質二}}$、$\boxed{\text{性質三}}$、$\boxed{\text{性質四}}$ 顯示出「Concatenating Squares」~

$(10^8+1)/17,(10^{128}+1)/257,(10^{32768}+1)/65537$ 皆是可表為「兩半部分數字的平方總和」。

$\boxed{\text{定理}}$：詳述「VR-ConcatenatingSquares C_{2n}」與 $\frac{1}{p}$ 之關聯性(提出了一個決定性的證據)

設 p 是型如 $\mathrm{F}_n = 2^{2^n}+1$ 的質數，且滿足 $10^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$；又令

$$C_{\frac{p-1}{2}} = A^2_{\frac{p-1}{4}} + B^2_{\frac{p-1}{4}} = \left[\frac{10^{\frac{p-1}{2}}+1}{p}\right] = \left[A_{\frac{p-1}{4}} \middle| B_{\frac{p-1}{4}}\right],$$

即 $10^{\frac{p-1}{2}}+1\equiv 0 \pmod{p}$，$C_{\frac{p-1}{2}}$ 表為兩個平方數之和的一種特定形式的數；則

$$a(k)=\frac{10^{\frac{(p-1)(4k+1)}{2}}+1}{p} = \left[\frac{10^{(p-1)}-1}{p}\right]\cdot\left[\sum_{j=1}^{2k}10^{\frac{(p-1)(2j-1)}{2}}\right]+\left\langle C_{\frac{p-1}{2}}\right\rangle,$$

且 $a(k)$ 是 $C_{\frac{(p-1)(4k+1)}{2}}$ 之「VR-ConcatenatingSquares C_{2n}」。

綜合「三、研究過程與方法」與「六、討論及其應用(一) ~ (五)」之結果，顯示出「VR-C_{2n}」之毗鄰並列並不一定是單純 $1/p$ 的循環節形式；當然，也是脫離不了 $1/p$ 的循環節形式。

(七)「VR-C_{2t} & m^2/p」【p 是 $(4k+1)$ 型的質數或是其數個之連乘積】

$\boxed{\text{主要定理}}$：詳述「VR-ConcatenatingSquares C_{2t} & $\frac{m^2}{p}$」較鮮為人知的關聯性：「VR-C_{2kL+2t}」

根據我上述的結果且不妨給定 (m, n)，再令

$$\frac{m^2}{p}=\frac{m^2}{m^2+n^2}=0.\overline{\mathrm{A_L}}=0.\overline{\boxed{\mathrm{X}}\&\boxed{\mathrm{Y}}}$$

，且 $\mathrm{Len}\left(\frac{m^2}{p}\right)=L$，

其中「&」表連接兩數字串 $\boxed{\mathrm{X}}$ 和 $\boxed{\mathrm{Y}}$ 的符號且 $\boxed{\mathrm{X}}$ 與 $\boxed{\mathrm{Y}}$ 的位數分別是 t 位與 $(L-t)$ 位，即「$\boxed{\mathrm{X}}\&\boxed{\mathrm{Y}}$」是此有理數寫成純循環小數時的整組數字串；也就是說

$$\mathrm{A_L}=\boxed{\mathrm{X}}\&\boxed{\mathrm{Y}}=\frac{m^2(10^L-1)}{p},$$

①能找到 $0.\overline{\boxed{\mathrm{Y}}\&\boxed{\mathrm{X}}}=0.\overline{\mathrm{B_L}}=\frac{mn}{p}$，且 $\mathrm{B_L}=\boxed{\mathrm{Y}}\&\boxed{\mathrm{X}}=\frac{(mn)(10^L-1)}{p}$，

②取 $\mathrm{A_L}$ 與 $\mathrm{B_L}$ 為其代表數的 k 段組合數字串，有

$$\left\{\boxed{\mathrm{A_L}}\boxed{\mathrm{A_L}}\boxed{\mathrm{A_L}}\cdots\boxed{\mathrm{A_L}}\boxed{\mathrm{A_L}}\boxed{mv}\right\}^2+\left\{\boxed{\mathrm{B_L}}\boxed{\mathrm{B_L}}\boxed{\mathrm{B_L}}\cdots\boxed{\mathrm{B_L}}\boxed{\mathrm{B_L}}\boxed{mu}\right\}^2$$

$$=\left[mv+\left(\sum_{j=1}^{k}\mathrm{A_L}\cdot10^{(j-1)L+t}\right)\right]^2+\left[mu+\left(\sum_{j=1}^{k}\mathrm{B_L}\cdot10^{(j-1)L+t}\right)\right]^2$$

$$=\left[\frac{m^2(10^L-1)}{p}\right]\cdot\left[\sum_{j=1}^{2k}10^{(j-1)L+2t}\right]+\left\langle\frac{m^2(10^{2t}+1)}{p}\right\rangle,$$

$$C_{2kL+2t}=(A_{k\,L+t}\cdot10^{k\,L+t})+(B_{k\,L+t})=A^2_{k\,L+t}+B^2_{k\,L+t}=\frac{m^2(10^{2kL+2t}+1)}{p}$$

是與特殊型質數之倒數有關聯的兩平方總和（結果是由兩段數字毗鄰並列而得出）。

定理詳述了與特殊型質數之倒數的循環節數字串有著密不可分的關聯性，可以透過「等比級數」來證明，雖顯示出「VR-C_{2kL+2t}」不一定是單純$\dfrac{1}{p}$的循環節形式，但卻也脫離不了$\dfrac{1}{p}$的循環節形式。

取$(L,t)=\left(p-1,\dfrac{p-1}{4}\right)$，得與質數$17,257,65537$之倒數有關的兩平方總和(取$m=1$時)，即

$$C_{\frac{(4k+1)(p-1)}{2}}=\left[\frac{10^{p-1}-1}{p}\right]\cdot\left[\sum_{j=1}^{2k}10^{\frac{(2j-1)(p-1)}{2}}\right]+\left[\frac{10^{\frac{p-1}{2}}+1}{p}\right]=\left[\frac{10^{\frac{(4k+1)(p-1)}{2}}+1}{p}\right],$$

也就是說

$$\begin{aligned}
&A^2_{\frac{(4k+1)(p-1)}{4}}+B^2_{\frac{(4k+1)(p-1)}{4}}\\
&=\left[A_{\frac{(4k+1)(p-1)}{4}}\cdot 10^{\frac{(4k+1)(p-1)}{4}}\right]+\left[B_{\frac{(4k+1)(p-1)}{4}}\right]\\
&=\left[\frac{\left(\dfrac{10^{p-1}-1}{p}\right)\cdot 10^{\frac{p-1}{4}}\cdot\left[10^{(p-1)k}-1\right]}{10^{p-1}-1}+A_{\frac{p-1}{4}}\right]^2+\left[\frac{\sqrt{p-1}\cdot\left(\dfrac{10^{p-1}-1}{p}\right)\cdot 10^{\frac{p-1}{4}}\cdot\left[10^{(p-1)k}-1\right]}{10^{p-1}-1}+B_{\frac{p-1}{4}}\right]^2。
\end{aligned}$$

(1)「VR-C_{2t}」主要定理之簡單程序

<table>
<tr><th>說　　　　明</th></tr>
<tr><td>①$10^{L}\equiv 1\pmod p$；其中p是適當得質數【$p\equiv 1\pmod 4$】或是其數個之連乘積，
且一定存在L值$(1<L<p)$，使得$(L,p)=1$；</td></tr>
<tr><td>②$10^{2t}+1\equiv 0\pmod p$；</td></tr>
<tr><td>③由①&②：得$10^{(2kL+2t)}\equiv -1\pmod p\quad (k\in N)$；</td></tr>
<tr><td>④為能滿足「VR-C_{2t}」)，必要時得將③所得之同餘式再乘上賦予值$m^2(m$ Î $N)$，使得
$m^2\cdot 10^{(2kL+2t)}\equiv(-m^2)\pmod p$，且能符合$\left[m^2(10^{2t}+1)\right]\equiv 0\pmod p$；並將其
$\left[\dfrac{m^2(10^{2t}+1)}{p}\right]$表成「VR-$C_{2t}$」，$\dfrac{m^2(10^{2t}+1)}{p}=A_t^2+B_t^2=\left[A_t\,\middle|\,B_t\right]$；如此，

$$\begin{aligned}
a(k)&=\frac{m^2\left[10^{(2kL+2t)}+1\right]}{p}\\
&=\frac{m^2\left[10^{(2kL+2t)}-10^{2t}\right]}{p}+\left[\frac{m^2(10^{2t}+1)}{p}\right]\\
&=\left[\frac{m^2(10^{L}-1)}{p}\right]\cdot\left[\sum_{j=1}^{2k}10^{(j-1)L+2t}\right]+\langle C_{2t}\rangle,
\end{aligned}$$

也就是說

$$C_{2kL+2t}=(A_{kL+t}\cdot 10^{kL+t})+(B_{kL+t})=A^2_{kL+t}+B^2_{kL+t}$$

是與特殊型質數之倒數的循環節數字串有關聯的兩平方總和。</td></tr>
</table>

(2)「VR-ConcatenatingSquares C_{2t}」與有理數(m^2/p)能表示成純循環小數的關聯性：可以得到下列有特性之列表，分母是$(4k+1)$形式的質數或是其連乘積是研究的出發點。

C_{2n}	「VR-ConcatenatingSquares C_{2t}」 & m^2/m^2+n^2		m^2/p
C_4	$12^2+33^2=1233$	$(4^2+11^2=137)$	$121/137$
C_4	$88^2+33^2=8833$	$(8^2+3^2=73)$	$9/73$
C_6	$010^2+100^2=10100$	$(1^2+10^2=101)$	$100/101$
C_6	$990^2+100^2=990100$	$(99^2+10^2=9901)$	$100/9901$
C_8	$0588^2+2353^2=05882353$	$(0588^2+2353^2=05882353)$	$5536609/5882353$
C_8	$9412^2+2353^2=05882353$	$(4^2+1^2=17)$	$1/17$
C_{10}	$99010^2+09901^2=9901009901$	$(10^2+1^2=101)$	$1/101$
C_{10}	$82350^2+38125^2=8235038125$	$(54^2+25^2=3541)$	$625/3541$
C_{12}	$123288^2+328768^2=123288328768$	$(3^2+8^2=73)$	$64/73$
C_{12}	$883212^2+321168^2=883212321168$	$(11^2+4^2=137)$	$16/137$
C_{14}	$8620690^2+3448276^2=86206903448276$	$(5^2+2^2=29)$	$4/29$
C_{14}	$0889680^2+2846976^2=08896802846976$	$(5^2+16^2=281)$	$256/281$
C_{14}	$9231820^2+2663025^2=92318202663025$	$(52^2+15^2=2929)$	$225/2929$
C_{16}	$55642300^2+49680625^2=5564230049680625$	$(28^2+25^2=1409)$	$625/1409$
C_{16}	$89086860^2+31180401^2=8908686031180401$	$(20^2+7^2=449)$	$49/449$
C_{16}	$70861600^2+45440001^2=708616004540001$	$(800^2+513^2=903169)$	$263169/903169$
C_{16}	$18130312^2+38526913^2=1813031238526913$	$(8^2+17^2=353)$	$289/353$
C_{16}	$02496100^2+15600625^2=0249610015600625$	$(4^2+25^2=641)$	$625/641$

(八)冪數生成原理：On the Representation of VR-C_{2t} as a Sum of Two Squares

$\begin{cases} mu-nv=1 \\ mu+nv=r \end{cases}$	$(m,n)\to(u,v)$ $C_{2t}=a^2+b^2=ar+b$	$(a,b)=(mv,mu)$ $(a,b)=(nu,mu)$
① $r=10^t$ $r^2+1=10^{2t}+1$ $m^2+n^2 \mid r^2+1$	$\left(\dfrac{n\cdot r+m}{m^2+n^2},\dfrac{m\cdot r-n}{m^2+n^2}\right)$ $C_{2t}=\dfrac{m^2(r^2+1)}{m^2+n^2}\leftrightarrow\dfrac{(nr+m)^2}{m^2+n^2}$	$\left(\dfrac{m^2\cdot r-mn}{m^2+n^2},\dfrac{mn\cdot r+m^2}{m^2+n^2}\right)$ $\left(\dfrac{n^2\cdot r+mn}{m^2+n^2},\dfrac{mn\cdot r+m^2}{m^2+n^2}\right)$
② $r_1=r^{4k+1}$ $r_1^2+1=r^{8k+2}+1$ $m^2+n^2 \mid r^{8k+2}+1$	$\left(\dfrac{n\cdot r^{4k+1}+m}{m^2+n^2},\dfrac{m\cdot r^{4k+1}-n}{m^2+n^2}\right)$ $C_{(8k+2)t}=\dfrac{m^2(r^{8k+2}+1)}{m^2+n^2}\leftrightarrow\dfrac{(nr^{4k+1}+1)^2}{m^2+n^2}$	$\left(\dfrac{m^2\cdot r^{4k+1}-mn}{m^2+n^2},\dfrac{mn\cdot r^{4k+1}+m^2}{m^2+n^2}\right)$ $\left(\dfrac{n^2\cdot r^{4k+1}+mn}{m^2+n^2},\dfrac{mn\cdot r^{4k+1}+m^2}{m^2+n^2}\right)$
	$C_{(8k+2)t}=\dfrac{m^2(r^{8k+2}+1)}{m^2+n^2}=\dfrac{m^2(r^2+1)}{m^2+n^2}+\left[\dfrac{m^2(r^4-1)}{m^2+n^2}\right]\cdot\sum_{j=1}^{2k}r^{2(2j-1)}$	

③ $r_2=r^{4k-1}$ $r_2^2+1=r^{8k-2}+1$ $n^2+m^2 \mid r^{8k-2}+1$	$\left(\dfrac{m\cdot r^{4k-1}+n}{m^2+n^2},\dfrac{n\cdot r^{4k-1}-m}{m^2+n^2}\right)$	$\left(\dfrac{n^2\cdot r^{4k-1}-mn}{m^2+n^2},\dfrac{mn\cdot r^{4k-1}+n^2}{m^2+n^2}\right)$ $\left(\dfrac{m^2\cdot r^{4k-1}+mn}{m^2+n^2},\dfrac{mn\cdot r^{4k-1}+n^2}{m^2+n^2}\right)$
	$C_{(8k-2)t}=\dfrac{n^2(r^{8k-2}+1)}{m^2+n^2}\leftrightarrow\dfrac{(mr^{4k-1}+n)^2}{m^2+n^2}$	
	$C_{(8k-2)t}=\dfrac{n^2(r^{8k-2}+1)}{m^2+n^2}=\dfrac{n^2(r^2+1)}{m^2+n^2}+\left[\dfrac{n^2(r^4-1)}{m^2+n^2}\right]\cdot\sum_{j=1}^{2k-1}r^{2(2j-1)}$	

(1) **根據主要定理，令** $\dfrac{m^2}{m^2+n^2}=\dfrac{m^2}{p}=0.\overline{\mathrm{A_L}}$ **，即** $\mathrm{A_L}=\dfrac{m^2(10^L-1)}{p}$ **且** $\mathrm{Len}\left(\dfrac{m^2}{p}\right)=L$ **，可得**

$$\begin{aligned}C_{2kL+2t}&=\frac{m^2(10^{2kL+2t}+1)}{m^2+n^2}\\&=\frac{m^2(10^{2t}+1)}{m^2+n^2}+\left[\frac{m^2(10^L-1)}{m^2+n^2}\right]\cdot\left[\sum_{j=1}^{2k}10^{(j-1)L+2t}\right]=\frac{m^2(10^{2t}+1)}{p}+\mathrm{A_L}\cdot\left[\sum_{l=1}^{2k}10^{(j-1)L+2t}\right]\end{aligned}$$

稱之為「VR-C_{2t} Class**」；即結果是由**$2k$**段所對應的有理數寫成純循環小數時的循環節之數字串來連接而得，即**

$$C_{2kL+2t}=A^2_{kL+t}+B^2_{kL+t}\text{，}$$

再根據主要定理，並以此「VR-C_{2t} Class**」為新的代表數，同時依序組合接上**a **段循環節之數字串，意即由**$(L,t)\to(L,kL+t)$**，得**

$$\begin{aligned}C_{2aL+(2kL+2t)}&=A^2_{aL+(kL+t)}+B^2_{aL+(kL+t)}\\&=\frac{m^2[10^{2aL+(2kL+2t)}+1]}{p}\\&=\left[\frac{m^2(10^L-1)}{p}\right]\cdot\left[\sum_{j=1}^{2a}10^{(j-1)L+(2kL+2t)}\right]+\left\langle\frac{m^2(10^{2kL+2t}+1)}{p}\right\rangle\\&=\left[\frac{m^2(10^L-1)}{p}\right]\cdot\sum_{j=1}^{2a}10^{(j-1)L+(2kL+2t)}+\left[\frac{m^2(10^L-1)}{p}\right]\cdot\sum_{j=1}^{2k}10^{(j-1)L+2t}+\left\langle\frac{m^2(10^{2t}+1)}{p}\right\rangle\\&=\left[\frac{m^2(10^L-1)}{p}\right]\cdot\left[\sum_{j=1}^{2a}10^{(j-1)L+(2kL+2t)}+\sum_{j=1}^{2k}10^{(j-1)L+2t}\right]+\left\langle\frac{m^2(10^{2t}+1)}{p}\right\rangle\\&=\left[\frac{m^2(10^L-1)}{p}\right]\cdot\left[\sum_{j=1}^{2(a+k)}10^{(j-1)L+2t}\right]+\left\langle\frac{m^2(10^{2t}+1)}{p}\right\rangle\text{，}\end{aligned}$$

其結果是相當於由原來的代表數「VR-C_{2t}**」再依序接上**$(a+k)$**段循環節之組合數字串；又當取**$L=4t$**時，可得**

$$C_{8(a+k)t+2t}=A^2_{4(a+k)t+t}+B^2_{4(a+k)t+t}\ \textbf{或}\ C_{(8k+2)t}=A^2_{(4k+1)t}+B^2_{(4k+1)t}\text{，}$$

因其與同一特殊型質數之倒數的循環節數字串有密切的關聯性，故將「VR$-C_{(8k+2)\,t}$**」與「**VR$-C_{(8k-2)\,t}$**」稱之為** ConjugateVR-ConcatenatingSquares C_{2t}**，意即共軛「**VR-C_{2t}～**平方加總」。**

(2) **性質六**：On the Representation of VR-C_{2t} as a Sum of Two Squares

「VR−C_{2t} Numbers Associated with Reciprocals of Primes of Particular Forms**」冪數生成原理等同於主要定理「**VR-ConcatenatingSquares C_{2t} & $\dfrac{m^2}{p}$ **」的內容。**

冪數生成原理說明了與前面主要定理所敘述的內容相互吻合，展露了與特殊型質數之倒數的循環節數字串有密切之關聯，其主要精神是為能提高組合位數（代表數之推廣），說明了所具有異曲同工之妙的趣味性；換句話說，詮釋了主要定理等同於r^2+1冪數生成原理。

① $m^2+n^2 \mid r^2+1$	$r=10^n \to r=10^{8k-2}$	$(u,v)\Rightarrow(a,b)=(mv,mu)$
	$a^2+b^2=C_{2n}$	
$8^2+3^2 \mid 10^{16k-4}+1$	$\left(\dfrac{3\cdot10^{8k-2}+8}{73},\dfrac{8\cdot10^{8k-2}-3}{73}\right)\Leftrightarrow\left(\dfrac{64\cdot10^{8k-2}-24}{73},\dfrac{24\cdot10^{8k-2}+64}{73}\right)$	
	$C_{16k-4}=\dfrac{64(10^{16k-4}+1)}{73}=\left\langle\dfrac{64(10^{12}+1)}{73}\right\rangle+\left[\dfrac{64(10^{8}-1)}{73}\right]\cdot\left[\sum_{j=1}^{2(k-1)}10^{4(2j+1)}\right]$	
$4^2+11^2 \mid 10^{16k-4}+1$	$\left(\dfrac{11\cdot10^{8k-2}+4}{137},\dfrac{4\cdot10^{8k-2}-11}{137}\right)\Leftrightarrow\left(\dfrac{16\cdot10^{8k-2}-44}{137},\dfrac{44\cdot10^{8k-2}+16}{137}\right)$	
	$C_{16k-4}=\dfrac{16(10^{16k-4}+1)}{137}=\left\langle\dfrac{16(10^{12}+1)}{137}\right\rangle+\left[\dfrac{16(10^{8}-1)}{137}\right]\cdot\left[\sum_{j=1}^{2(k-1)}10^{4(2j+1)}\right]$	

② $m^2+n^2 \mid r^2+1$	$r=10^n \to r=10^{8k+2}$	$(u,v)\Rightarrow(a,b)=(mv,mu)$
	$a^2+b^2=C_{2n}$	
$3^2+8^2 \mid 10^{16k+4}+1$	$\left(\dfrac{8\cdot10^{8k+2}+3}{73},\dfrac{3\cdot10^{8k+2}-3}{73}\right)\Leftrightarrow\left(\dfrac{9\cdot10^{8k+2}-24}{73},\dfrac{24\cdot10^{8k+2}+9}{73}\right)$	
	$C_{16k+4}=\dfrac{9(10^{16k+4}+1)}{73}=\left\langle\dfrac{9(10^{4}+1)}{73}\right\rangle+\left[\dfrac{9(10^{8}-1)}{73}\right]\cdot\left[\sum_{j=1}^{2k}10^{8(2j-1)}\right]$	
$11^2+4^2 \mid 10^{16k+4}+1$	$\left(\dfrac{4\cdot10^{8k+2}+11}{137},\dfrac{11\cdot10^{8k+2}-4}{137}\right)\Leftrightarrow\left(\dfrac{121\cdot10^{8k+2}-44}{137},\dfrac{44\cdot10^{8k+2}+121}{137}\right)$	
	$C_{16k+4}=\dfrac{121(10^{16k+4}+1)}{137}=\left\langle\dfrac{121(10^{4}+1)}{137}\right\rangle+\left[\dfrac{121(10^{8}-1)}{137}\right]\cdot\left[\sum_{j=1}^{2k}10^{4(2j-1)}\right]$	

③ $m^2+n^2 \mid r^2+1$	$r=10^n \to r=10^{65536k+16384}$	$(u,v)\Rightarrow(a,b)=(mv,mu)$
	$1^2+256^2 \mid 10^{32768}+1$	$a^2+b^2=C_{2n}$
$\left(\dfrac{256\cdot10^{16384(4k+1)}+1}{65537},\dfrac{10^{16384(4k+1)}-256}{65537}\right)\Leftrightarrow\left(\dfrac{10^{16384(4k+1)}-256}{65537},\dfrac{256\cdot10^{16384(4k+1)}+1}{65537}\right)$		
$C_{131072k+32768}=\dfrac{10^{32768(4k+1)}+1}{65537}=\dfrac{10^{32768}+1}{65537}+\left[\dfrac{10^{65536}-1}{65537}\right]\cdot\left[\sum_{j=1}^{2k}10^{32768(2j-1)}\right]$		

<table>
<tr><td rowspan="2">④ $m^2+n^2 \mid r^2+1$</td><td>$r=10^n \to r=10^{65536k-16384}$</td><td>$(u,v):(a,b)=(mv,mu)$</td></tr>
<tr><td>$256^2+1^2 \mid 10^{32768}+1$</td><td>$a^2+b^2=C_{2n}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$\left(\dfrac{10^{16384(4k-1)}+256}{65537},\dfrac{256\cdot 10^{16384(4k-1)}-1}{65537}\right)\Leftrightarrow\left(\dfrac{65536\cdot 10^{16384(4k-1)}-256}{65537},\dfrac{256\cdot 10^{16384(4k-1)}+65536}{65537}\right)$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$C_{131072k-32768}=\dfrac{65536[10^{32768(4k-1)}+1]}{65537}=\dfrac{65536(10^{98304}+1)}{65537}+\left[\dfrac{65536(10^{65536}-1)}{65537}\right]\cdot\left[\sum_{j=1}^{2(k-1)}10^{32768(2j+1)}\right]$</td></tr>
</table>

(3)

①**由「**VR$-C_{2t}$**」與有理數**(m^2/p)**表示成純循環小數的關聯性（主要定理），即可找出兩個有理數並表成純循環小數，藉純循環數字串來提高「**VR$-C_{2t}$**」之組合位數，且結果完全取決於「** VR$-C_{2t}$**」的基本定義及其研究原理，且經由整體的計算及數據驗證而得，進而延伸推廣「**VR-C_{2t} Class**」。**

②**研究充分結合了「同餘式的概念及其應用」，發展創新方法「主要定理之簡單程序」來探討分類歸納與特殊型質數倒數關聯的「**VR$-C_{2t}$**」。**

③**根據性質六：冪數生成原理，得「**$\boxed{\text{VR}-C_{2t}}\to\boxed{\text{VR}-C_{(8k\pm2)t}}$**」；即**$d$**是**$(4k\pm1)$**型之奇數，得**$r=10^t \to r^{(4k\pm1)}=(10^t)^{(4k\pm1)}$**，使得**$m^2+n^2 \mid r^{8k+2}+1$**或**$n^2+m^2 \mid r^{8k-2}+1$**，便能把與同一特殊型質數之倒數的「**VR$-C_{2t}$**」加以擴充，產生共軛之「**VR$-C_{2t}$ Class**」~「**VR$-C_{(8k\pm2)t}$**」。**

④**最後，最重要的是性質三、性質四、性質五及主要定理的論證與結果，且得到的「**C_{2t}**」代表數**$\left[\dfrac{10^{2t}+1}{p}\right]$**或**$\left[\dfrac{m^2(10^{2t}+1)}{p}\right]$**皆須由【3】得出；當**$m=1$**，「**VR$-C_{2t}$**」正好與特定質數之倒數的循環節數字串有重要且密切之關係。**

(九)主要論述：On the Representation of VR$-C_{2t}$ as a Sum of Two Squares

擬定的一個主要論述與歐幾里德 Euclidean **運算法則的直接方法，作對稱整數矩陣的對稱分解（**Symmetric Decomposition of Symmetric Integer Matrices**）。**

> **假設** $z^2\equiv-1 \pmod n$ **，其中** $z\equiv 10^u \pmod n$**，再令** $k=\left(\dfrac{z^2+1}{n}\right)$**，則**
>
> **對稱整數矩陣**$\begin{bmatrix} n & z \\ z & k \end{bmatrix}$**的對稱分解會產生一個幺模的非負整數矩陣**$\begin{bmatrix} x & x' \\ y & y' \end{bmatrix}$**，使得**
>
> $$M=\begin{bmatrix} n & z \\ z & k \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x & y \\ x' & y' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & x' \\ y & y' \end{bmatrix},$$
>
> **也就是說**
>
> $$n=x^2+y^2\ ;$$
>
> **反之，**n**的每一個此類的表示法可由**$z^2\equiv-1 \pmod n$**的解答之對稱分解而得。**

能更進一步以主要論述來找出所要的表示法，並說明主要定理的結果及其推廣，更解釋了為何此方法是可行的。研究過程兼具了趣味性及實用性，做出了前所未有且創新的研究結果，進而發展新穎的方法來研究「On the Decomposition of a V-R Number Associated with Reciprocals of Primes of Particular Forms**」，這正是我們值得喝采的地方！**

五、結論及未來研究方向：

(一) 討論如何將整數分解成兩個數的平方和（如何發現兩個平方和的整數分解），直到 $n=10$ **之完整「** $\mathrm{VR}-C_{2n}$ **」列表：** $C_{2n}\ \{n=2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ **之結果以成對的形式出現，顯示「兩半」、「平方」和「成對」。**

(二) 解決一些猜想與問題：「 $\mathrm{VR}-C_{2n}$ **」與** $1/17, 1/257, 1/65537$ **的關聯性（性質），提出完全決定性的證據。又** $n>4$ **時，** F_n **都是合成數？能否再發現任何一個** F_n **是質數，使之能產生「** $\mathrm{VR}-C_{2n}$ **」！**

(三) 若將 $r=10^n$ **改為** $r=q^n$ **時，可得出** q **進位的「VR-ConcatenatingSquares」；電腦輸出之結果是由程式語言 Visual Basic 6.0 電腦程式所得，這是專為「平方加總」所設計的獨立程式。**

(四) 探討「 $\mathrm{VR}-C_{2n}$ **」與特殊型質數之倒數關聯的兩平方總和的整數分解之性質一、性質二、性質三、性質四、定理、主要定理及性質六：冪數生成原理。**

(五) 分類「 $\mathrm{VR}-C_{2t}$ **」與「特定有理數表示成純循環小數」之對應，結合可表為兩個平方數之和的一種特定型式的數，即循環節長度** $\mathrm{Len}(m^2/p)$ **與「主要定理」所歸納對應的簡單程序。**

(六)列表擴充之「VR- C_{2t} **Class」與「** m^2/p **」，即列表與有關之特定有理數與純循環小數的互化。**

C_4	C_{16k+4}	$\mathrm{Len}(1/73)=8$、$\mathrm{Len}(1/137)=8$
C_6	C_{24k+6}	$\mathrm{Len}(1/9901)=12$
C_8	C_{32k+8}	$\mathrm{Len}(1/17)=16$、$\mathrm{Len}(1/5882353)=16$
C_{10}	C_{40k+10}	$\mathrm{Len}(1/3541)=20$、$\mathrm{Len}(1/27961)=20$
C_{12}	C_{48k+12}	$\mathrm{Len}(1/99990001)=24$
C_{14}	C_{56k+14}	$\mathrm{Len}(1/29)=28$、$\mathrm{Len}(1/281)=28$、$\mathrm{Len}(1/121499449)=28$
C_{16}	C_{64k+16}	$\mathrm{Len}(1/353)=32$、$\mathrm{Len}(1/449)=32$、$\mathrm{Len}(1/641)=32$、$\mathrm{Len}(1/1409)=32$、$\mathrm{Len}(1/69857)=32$

(七) 由性質二、性質三、性質四、定理，可得出與 $\left\{\frac{1}{p}\,\middle|\,p=17,257,65537\right\}$ **的關聯性；透過「** $\mathrm{VR}-C_{2t}$ **」與「有理數表成純循環小數」之對應，應用主要定理的簡單程序及性質六，更可以從無限多的「** $\mathrm{VR}-C_{2t}$ **」再推廣至更無限多的「VR-** C_{2t} **Class」。**

Step①**：直接計算法；「VR-** C_{2t} **~平方加總」與「** $\mathrm{VR}-C_{2t}$ **」基本代表數。**

Step②**：應用主要定理：「** $\mathrm{VR}-C_{2t}$ **」與「有理數表示成純循環小數」之對應、計算搜尋** m^2/p **並結合「主要定理之簡單程序」，研究出與「** $\mathrm{VR}-C_{2t}$ **」有關之特定有理數，並表示成純循環小數（有理數與純循環小數的互化），並找出其循環節之數字串及其長度。**

Step③**：應用性質二、性質三、性質四、主要定理之簡單程序及性質六：冪數生成原理，加以擴充「VR-** C_{2t} **Class」。**

Step④**：性質一的對稱概念，對稱「** $\mathrm{VR}-C_{2t} \to \mathrm{VR}\text{-}C_{2t}\ \mathrm{Class} \to \mathrm{ConjugateVR}\text{-}C_{2t}\ \mathrm{Class}$ **」。**

Step⑤**：結合電腦程式於研究中，互相驗證其全部結果（詳細紀錄資料請參閱說明書）。**

(**八**)**「**$\mathrm{VR}-C_{2t}$**」概念一般化，得** $10^n\cdot A+B=A^2+B^2$ **，令** $E(A)=10^n\cdot A-A^2=(B^2-B)$ **；並將每個** A **試算值(約** $9\times10^{n-1}$ **次)計算出** $E(A)$ **，得** $B-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{4\cdot E(A)+1}$ **，即** $\sqrt{E(A)}<B-\frac{1}{2}$ **，假設** b **是** $E(A)$ **的平方根，四捨五入至最近的正整數，得出** $E(A)=b^2-b$ **。**

(1) **等式改寫成** $(10^n)^2+1=(2A-10^n)^2+(2B-1)^2$ **，**
(2) **由** $(10^{2n}+1)$ **之標準分解式，即計算要點是在於** $(10^{2n}+1)$ **的質因數分解，**
(3) **以各質因子（**prime factor**）作為平方值的總和，即將其寫成平方和（兩因子之積），**
(4) **依據與複數之乘法運算相關聯的法則且結合等式：**

$$(m^2+n^2)(u^2+v^2)=(mv+nu)^2+(mu-nv)^2\text{，}$$

此即為得出 A **值和** B **值之關鍵；且** $(2B-1)$ **是奇數，** $(2A-10^n)$ **是偶數，則**

$$(A,B)=(mv,mu)\text{、}(mv,-nu)\text{、}(nu,mu)\text{、}(nu,-nv)$$

滿足不定方程。

(**九**) **使用** Visual Basic **程式解決** C_{20} **的問題時，找到了兩半數字平方總和的質數答案：** 00990_09901 (C_{10}) **及** 0000999900_0099990001 (C_{20}) **；找到一個模式為此類** C_{10k} **產生更多類似的答案**

$$\{0\}2k\{9\}2k\{0\}k\_\{0\}k\{9\}2k\{0\}2k-1\{1\}1\text{，}$$

且 C_{160} **數字（**128**位數）是一個質數：** $\{9\}32\{0\}32\{9\}32\{0\}31\{1\}1$ **；理論上我們要尋找的是具有** $a=t_k\cdot10^k, b=t_k\cdot10^{2k}+1$ **形式的** a **和** b **答案，若且唯若** $t_k=10^{2k}-1$**。以下是此類不可接受的「**$\mathrm{VR}-C_{2t}$**」之結果（結合了「性質一」、「性質二」、「性質三」、「性質四」之原理）。**

C_{2n}	m^2+n^2	A_n	B_n	C_{2n}
C_{10k}	$1+(10^k)^2$	$10^k(10^{2k}-1)$	$10^{4k}-10^{2k}+1$	$\sum_{i=1}^{5}(-1)^{i-1}\cdot10^{2(i-1)k}$
	型式： $\{0\}2k\{9\}2k\{0\}k\_\{0\}k\{9\}2k\{0\}2k-1\{1\}1$			
C_{6k}	$(10^k)^2+1$	$10^k(10^{2k}-1)$	10^{2k}	$\sum_{i=1}^{3}(-1)^{i+1}\cdot10^{2ik}$
	型式： $\{9\}2k\{0\}k\_\{0\}k-1\{1\}1\{0\}2k$			
C_{8k-2}	10^2+1	$\frac{10(10^{4k}-1)}{101}$	$\frac{10^2(10^{4k-2}+1)}{101}$	$\sum_{i=1}^{4k-1}(-1)^{i-1}\cdot10^{2(i-1)}$
	型式： $\{9900\}k-1\{990\}1\_\{0990\}k-1\{100\}1$			
C_{8k+2}	$1+10^2$	$\frac{10(10^{4k+2}+1)}{101}$	$\frac{(10^{4k+2}+1)}{101}$	$101\cdot\left[\sum_{i=1}^{2k+1}(-1)^{i-1}\cdot10^{2(i-1)}\right]^2$
	型式： $\{9900\}k-1\{99010\}1\_\{099\}1\{0099\}k-1\{01\}1$			

(**十**)**創新精采的研究就是將對稱整數矩陣的對稱分解，特別引起我興趣的是** $z^2\equiv-1 \pmod n$ **，其中** $z\equiv10^u \pmod n$ **，就是化為兩個平方數之和的情況，對稱矩陣** M **為單一模數，只對** n **及** z **執行** Euclidean **演算法，而第一對同時小於** $\sqrt{n}$ **的餘數** x**、**y **就可產生** $x^2+y^2=n$ **，目前的主要論述詳細說明了此一結果及其推廣，不妨參考【**4**】，也嘗試去解釋了為何此方法是可行的，主要觀念在於對稱整數矩陣的對稱分解。**

(**十一**)$\boxed{\textbf{性質五}}$**：**Primes as a Sum of Two Squares

滿足等式 $p = \mathrm{E} \,\&\, \mathrm{O} = \mathrm{E}^2 + \mathrm{O}^2$**，** p **為質數之解只有二個：**101**及**5882353**。**

(**十二**)**應可推廣應用到有關的不定形式之表示法，即二次式表示法的問題，所牽涉到更多的演算法及其他等等應該都須有更進一步的研究，當然還有許多是我沒有提到的，諸如會涉及到有關連續分數展開式及**2×2**階矩陣的對應關係, 但其中最重要的關鍵是在於決定停止演算法的規則。**

六、參考資料及其他：

【1】A. J. van der Poorten, *On Number Theory and Kustaa Inkeri*, to appear in Proc. Turku Symposium on Number Theory in Memory of Kustaa Inkeri（Turku, May 31-June 4, 1999）, Matti Jutile and Tauno Metsänkylä eds., Walter de Gruyter, Berlin 2000, 13pp.

【2】B Suryanarayana Rao, *A Certain Type of Number Expressible as the Sum of Two Squares*, Mathematics Magazine Volume **57**, Number **4**, Page236-237. (1984)

【3】**紀佩文**, **陳彥鈞**, Generalization of Some Special Forms of Numbers Expressible as the Sum of Two Squares ~「Concatenating Squares」, **二ＯＯ四年臺灣國際科展數學科大會獎佳作**, **國立台灣科學教育館**, 2003.

【4】Sarah Flannery and David Flannery, In Code：A Mathematical Journey.
中譯本：數學小魔女, **葉偉文譯**, **天下文化出版社**, 2001 **年** 01 **月** 15 **日**.

【5】**潘承洞、潘承彪著**, **初等數論**, **凡異出版社**, 1999.

七、附錄：（預備知識及相關的基本性質請參閱創意說明書）

(1)**程式一：直接計算法**(Visual Basic 6.0) **直接求和法**

```
Private Sub Command1_Click()
howlong = Val(Text1.Text)

For i = 10 To howlong
   along = Len(i)
  a = (25 * 10 ^ (2 * (along - 1)) - (i ^ 2 - i))
  If a >= 0 Then
  D = a ^ (1 / 2)
  If D - Int(D) = 0 Then
    Text2.Text = ((5 * 10 ^ (along - 1)) + D) & vbCrLf & Text2.Text
     Text3.Text = i & vbCrLf & Text3.Text
   End If
   End If
Next i
End Sub
Private Sub Command2_Click()
   End
End Sub
```

2.**程式二：代表數之推廣**(Visual Basic 6.0) **兩平方和**

```
Dim a(200), b(200), c(400)
Dim txt, ans
Dim arraya(400), arrayb(400), arrayc(400) As Integer

Private Sub Command1_Click()
For i = 1 To 400
  arraya(i) = 0: arrayb(i) = 0: arrayc(i) = 0
Next i
txt = Text1
check
ansa = ans
txt = Text2
check
ansb = ans
 longa = Len(ansa)

  For i = 1 To longa
     arraya(i) = Mid(ansa, longa - i + 1, 1)
     arrayb(i) = Mid(ansb, longa - i + 1, 1)
   Next i

  For i = 1 To longa
     numa = Val(arraya(i)) + Val(arrayb(i))
     If Len(numa) = 2 Then
       arraya(i + 1) = Val(arraya(i + 1)) + Val(Left(numa, 1))
        arrayc(i) = Right(numa, 1)
      Else
        arrayc(i) = numa
```

```
      End  If
    Next  i
   For i = 1 To longa
      answer = arrayc(i) & answer
    Next  i

   Text3.Text = answer
End Sub
Private Sub Command2_Click()
    End
End Sub
Private Sub check()
 ans = ""
  For i = 1 To 200
    a(i) = 0: b(i) = 0
Next i
  For i = 1 To 400
   c(i) = 0
Next i
along = Len(txt)
   For i = 1 To along
      a(i) = Mid(txt, along - i + 1, 1)
      b(i) = Mid(txt, along - i + 1, 1)
    Next i
    For i = 1 To along
      n = -1

      For j = 1 To along
         n = n + 1
         temp = a(i) * b(j)
         If Len(temp) = 2 Then
              c(i + n) = c(i + n) + Val(Right(temp, 1))
               tempb = c(i + n)
               If Len(tempb) = 2 Then
                        c(i + n) = Right(tempb, 1)
                   c(i + n + 1) = c(i + n + 1) + Val(Left(tempb, 1))
                 End If
             c(i + n + 1) = c(i + n + 1) + Val(Left(temp, 1))
           Else
              c(i + n) = c(i + n) + temp
               tempa = c(i + n)
                 If Len(tempa) = 2 Then
                      c(i + n) = Right(tempa, 1)
                   c(i + n + 1) = c(i + n + 1) + Val(Left(tempa, 1))
                 End If
          End If
       Next j
    Next i
   For i = 1 To along * 2
      ans = c(i) & ans
    Next i
End Sub
```

3.**程式三：循環節長度數字串**(Visual Basic 6.0)

```
Dim along As Double
Dim Math()

Private Sub Command1_Click()
Command1.Enabled = False
Dim A, B As Long
Dim Tim As Double
Dim Ans As String
ReDim Math(along)
A = Val(Text1.Text)
B = Val(Text2.Text)
Text3.Text = ""
Ans = "0"
Do
    If A < B Then
        If Tim = 0 Then
            Ans = Ans & "."
        Else
            Ans = Ans & Math(Tim)
        End If
        Tim = Tim + 1
        Do While A < B
            A = A * 10
            If A < B Then
                Ans = Ans & "0"
                Tim = Tim + 1
            End If
        Loop
    End If
    Math(Tim) = A \ B
    A = A Mod B
    If A = 0 Then
        Ans = Ans & Math(Tim)
        Exit Do
    End If
    Label1.Caption = Tim
    If Tim = along Then Exit Do
    DoEvents
Loop
Text3.Text = Ans
Command1.Enabled = True
Label1.Caption =
End Sub
Private Sub Form_Activate()
along = InputBox
End Sub
```