

第三屆旺宏科學獎

作品報告書

圓軸漸收螺線運動

Liner-Radioused Atypical Circular Motion

參賽隊伍：SA3-177

指導：王昭富 老師

參賽者姓名：盧振華

目 錄

| | |
|----------------------------|----|
| 壹、 摘要 | 1 |
| 貳、 研究動機 | 1 |
| 參、 研究目的 | 1 |
| 肆、 研究設備及器材 | 2 |
| 一、 光電計時器之改裝 | 2 |
| (一) 改裝的必要性 | 2 |
| (二) 光感應器之改裝 | 2 |
| (三) 接頭與計時器之改裝 | 3 |
| 二、 研究器材詳細列表 | 6 |
| 伍、 研究過程與方法 | 7 |
| 一、 原理推導 | 7 |
| 二、 實驗 | 11 |
| (一) 實驗一：單擺重力加速度測量 | 11 |
| (二) 實驗二：近無摩擦向心螺線運動測量 | 13 |
| (三) 實驗三：圓軸漸收單擺運動測量 | 17 |
| 陸、 討論 | 20 |
| (一) 水平面情形 | 20 |
| (二) 鉛直面情形 | 22 |
| 柒、 結論 | 23 |
| 捌、 參考資料 | 24 |

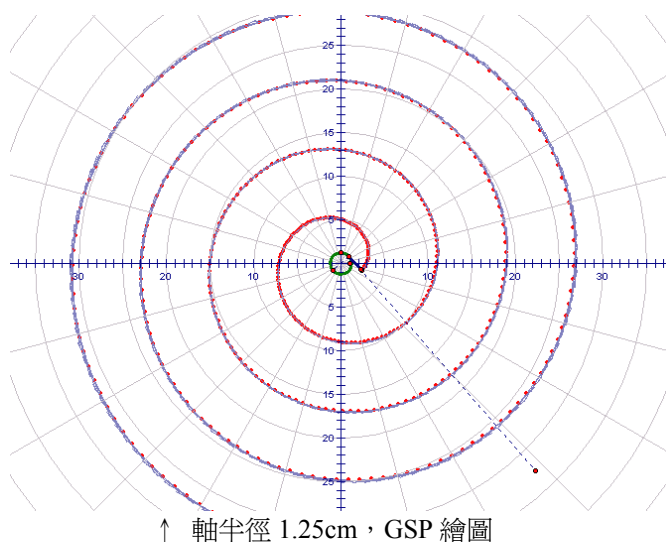
壹、摘要

本研究主要是針對依「圓軸向心收線」定義之運動模式所做的探討，包含運動模式的理論推演、實驗套件的整合與實驗方法的設計。

實驗套件整合與原理推導是共同進行的，再以測試整合套件與驗證原理為目的，設計三大實驗。實驗內容依序為：以單擺週期了解計時組件的性能、驗證近無摩擦狀況下之水平面運動理論、驗證鉛直面（受重力影響）運動理論。

貳、研究動機

一物體被一條線綁住而旋轉，其中間的圓形轉軸在物體邊旋轉時還會邊把繩子收短，那會發生什麼事呢？無意間看到同學心不在焉的拿起串上繩子的鑰匙繞著手指甩動時，心裡就浮現了這個問題。這種收繩方式就如同右圖：在一條細繩的一端繫上一物體，另一端綁在圓柱（中央綠色圓圈）上。當甩動這個物體時，它會繞著中央圓柱打轉，此時中央圓柱便把繩子逐步向內收進，而使物體向內旋入。這顯然和一般在高中所學的等速率圓周運動有所不同，但又有某些相似之處，這種運動究竟有什麼特性呢？



參、研究目的

- 一. 設計一組實驗裝置，用以測量如上述運動之旋轉時間。
（註：本來實驗室中的光電計時器雖然在做自由落體實驗時還算好用，但卻不適合這種需擴展至二度空間的測量）
- 二. 找出如上述之運動在水平無摩擦的情況下之初速、路徑長、旋轉時間之間的關係並以實驗證明之。
- 三. 使物體在鉛直面運動，並找出初速和旋轉時間之關係。
（兼以實驗證明如單擺運動時之週期）

肆、 研究設備及器材

一、 光電計時器之改裝

(一) 改裝的必要性

此為測量運動的實驗，故必須掌握的物理量，是長度和時間。可以先利用所測得的原繩長、軸半徑、初速等，先求出給定條件下所需時間的理論值，再藉由實驗的時間測量，比較理論和實驗結果的異同。

比起長度，精確時間相當難測。為了達成精密測量時間的目標，便將注意力轉到學校實驗室中用以測量「重力加速度」實驗的「光電計時裝置」。雖然其精密度和馬錶同為 0.01 秒，但機器的反應時間可比手指頭小多了。

原先學校的光電計時器套件是專為測量 g 值而設計的，其基本原理便是藉接收紅外光的阻斷訊號來驅動計時裝置。其有效遮斷範圍便為感應器兩閘之間，很適合原始設計：小鋼珠的通過。顯然，必須將原本的套件進行改裝，才能合用。



↑ 光感應器之架設

希望能製作一個利用雷射光遮斷來計時的裝置，所以不需更改計時器（即顯示時間之方盒，以下皆以計時器稱之）內部，只需對光感應器（即 Γ 字形套件，之下皆以光感應器稱之）與輸出入端（接頭）進行非破壞性改裝即可。

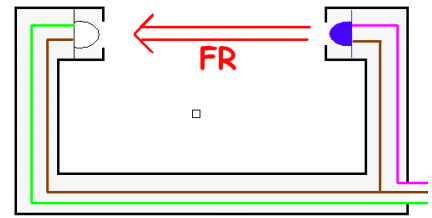
(二) 光感應器之改裝

就特性上，光感應器輸出入的實體接頭，恰為 3.5mm 立體聲耳機接頭。經過外部測量與實際觀察，得知其中含兩組電路，各接一型似 LED 之元件，並於電子材料行詢問得知：

1. 外觀藍紫色者，為紅外光 LED。
2. 外觀透明者，為紅外光接收二極體：接收足量紅外光時，計時器會將之詮釋為通路；處無光處時，則為斷路。

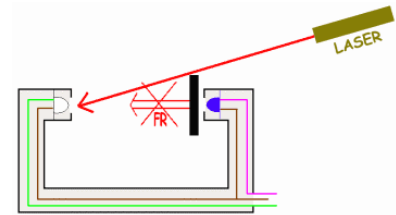
實用上，此光感應器與計時器的原理為：

1. 兩組二極體電路，其中地線（指接回電源）共用，故可採用立體聲耳機的三個電極。
2. 兩二極體至於光感應器之口字型兩端，各六面接封閉五面，兩個開放面相互對應。
3. 當光感應器連接到啓動之計時器上時，紅外光 LED 便獲得電壓，持續發出紅外光，此即發射端；另一端接收端接收到紅外光，便會產生通路訊號，計時器上有一對應紅色 LED 會亮起。
4. 此時若有物體居口字型中間阻斷光源，接收端便接收不到紅外光，形成斷路，計時器上之對應紅色 LED 不亮（以下稱光阻斷）。
5. 計時器再根據電路設定（手動計時、感應啓動、電磁啓動），決定如何採用光阻斷控制時間記錄與顯示。



↑ 光感應器電路簡圖。粉紅色為紅外光 LED 正極，綠色為接收器正極，深棕色為共用地線。

再另外做一測試：如果將發射端遮斷，而使用雷射筆當作發射端，能不能替代原先之發射端？結果是可以的。不知道是接收端能接收紅光，抑或是雷射筆也發出紅外光，總之但替換是可行的。所以便可將發射端遮斷（發現用鋁箔包裹最為方便），設法將雷射光打入接收端，如此便完成光感應器的改裝。



↑ 光感應器改裝示意

（三）接頭與計時器之改裝

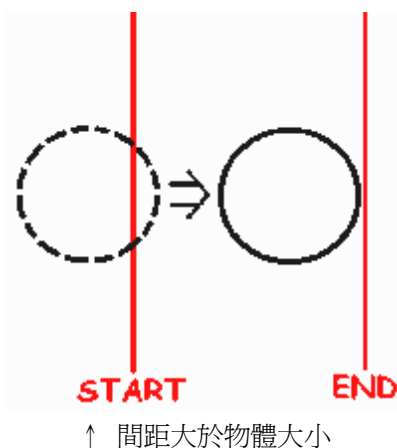
完成光感應器的改裝之後，擴大了其使用範圍；然希望光電計時器能夠「連續」紀錄「每一圈」時間。所以必須先了解計時器的模式。

對計時器而言，光感應器分為啓動組和停止組；在「感應啓動」模式下，當啓動組發生光阻斷，計時器便開始累計，直到停止組發生光阻斷為止。



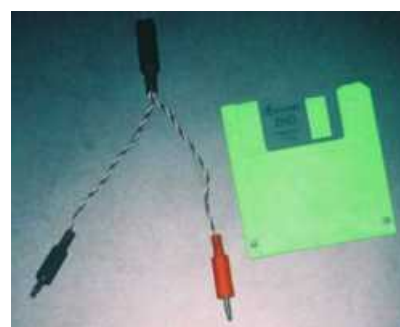
↑ 計時器裝置。任一臺的啓動組會對應到另一臺之停止組（外接光感應器，下頁說明）。此圖中，上面那臺的停止組（黑色接頭）與下面那臺的啓動組（紅色接頭）便是「光阻斷」（可由紅色 LED 判斷）。

計時器在此有一使用上的限制，當停止組發生光阻斷時，啟動組必須不被阻斷，如此停止組光阻斷才會被採計。也就是說，置於連續路徑上之兩平行光感應器，「其間距必須大於物體大小」，計時器才能停止。



既然先前就已知道：光感應器是利用本身電路的變化來傳達光阻斷，那便能直接讓一個光阻斷，同時傳達到兩個以上的接收端——只要簡單利用並聯的原理便成。光感應器是採用 3.5mm 的立體聲接頭，只要銲一個一分二(一母二公)的分接頭，便能讓兩個接收端共用一個光感應器。

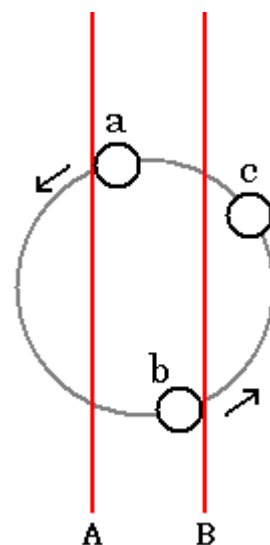
如此使用兩個分接頭，讓「計時器甲的啟動組」與「計時器乙的停止組」相接（參考上頁照片，一組分接頭有一紅一黑兩個公接頭），讓「計時器甲的停止組」與「計時器乙的啟動組」相接，分接頭再各自接到光感應器，接著佈置雷射光，兩組分別照射兩個光感應器。



其工作原理可藉由一圓周運動來說明。考慮下圖之情形，A、B 表兩雷射光射線，大圓是路徑，a、b、c 表三個位置，箭頭表運動方向。令兩臺光電計時器皆為靜止且歸零：

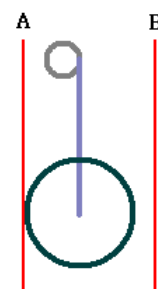
↑ 自製分接頭

1. 當物體由位置 a 出發，會先阻斷射線 A，此時有一臺計時器會先被啟動（令甲），另一臺則停止（令乙）；當物體由 a 行經「近半圈」後，會再一次阻斷 A，此時甲仍啟動，乙仍停止。
2. 當物體進入位置 b 時，射線 B 會被阻斷，則計時器甲（正在跑的）會被停止，乙則啟動；接著 B 也會被二次阻斷（經過 c 後），但不影響計時。接著物體會回到位置 a，將在不歸零之情況下，重複「1.」的內容。
3. 由於光感應器採分接設計，計時器一臺停止便一臺啟動，如此兩計時器甲、乙將不斷的「交替」計時；只要將兩對應「半圈」時間相加，便得完整一圈的時間。
4. 若是由位置 c 開始，則計時器乙（同上命名）會先被 B 啟動，然到了位置 a，又回到上述「1.」的狀態，此時乙會顯示一短小時間，是為行經 B 射線到 A 射線之小圓弧所需時間；下次乙計時器由此累計，並不影響時間間隔。

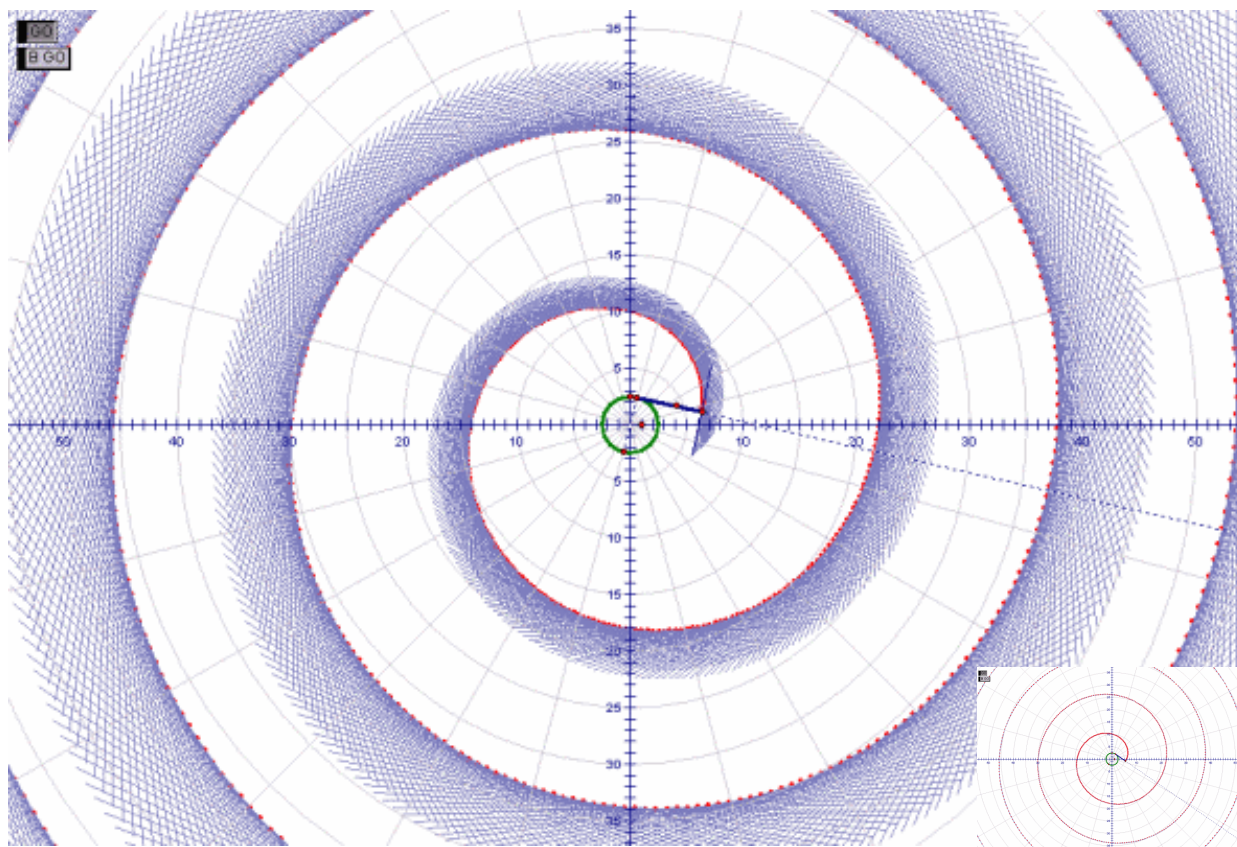


為測試此裝置的可行性，先設計了實驗一，即使用單擺測量重力加速度。時間測量的有效數字為三位，其中第三位（0.01）為估計值（無條件捨棄的結果），故時間的精密度為 $\pm 0.01s$ ，約為 $\pm 0.3\%$ ；而實際操作不同擺角，實測與標準值相對誤差分布於 0.3%到 0.8%之間。表示此裝置是可行的。

以上以圓周運動為考量，其實螺線也差不多，但雷射光束將較為難打。就螺線部分，也是以整數圈為一單位，所以最理想的打法為右圖。當拉線與光束平行時，**A** 最好以右圖方式切過物體，顯然物體半徑需大於軸的直徑；相形之下，**B** 只要讓 $d(A,B)$ 比物體大即可；如此以 **A** 為計時起點，加上對應之另外半圈時間，便可測得每一圈的時間。



而繞行路徑的情形，則可預先猜測。事實上，只要是往「收繩」的方向運動，不論速率快慢，其所經過的路徑皆是相同的；速率只會改變繞行所需的時間，而不改變收繩的模式。因此，使用動態幾何繪圖軟體GSP，利用尺規作圖就能繪出不同條件下的路徑（可參考附錄D）。圖中還可明顯看出，各點切線與繩子之夾角為 90° （藍線在尺規作圖中，被定義為在繩端紅點與繩子垂直）。



↑ 中心軸（綠色圓圈）半徑 2.5cm，座標格式為極座標。右下圖為相同條件下短切線的繪圖。圖中紅點的 Trace 即路徑，藍線的 Trace 即各點所對應之切線。

二、 研究器材詳細列表

計時用設備：

光電計時器、自製分接頭（規格：3.5mm 立體聲）、雷射筆、直流電源供應器（供應雷射筆電源）。

記錄裝置：

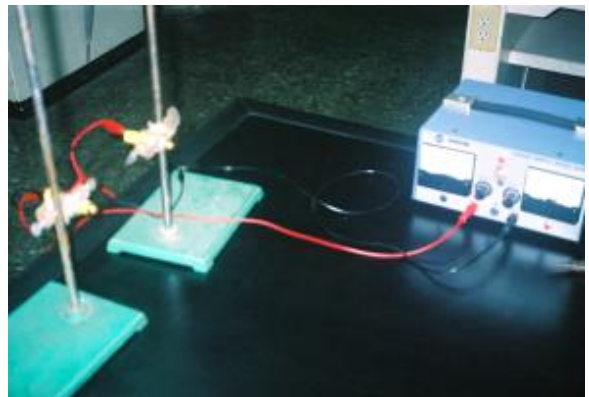
DV（數位攝影機）、NOTEBOOK（筆記型電腦）。

電腦軟體：

Microsoft Excel、C Language（程式語言）、GSP（動態幾何軟體）。

其他：

衝擊擺、釣魚線、固定支架、游標尺、旗竿座、鱷魚夾、鋁箔紙、電工膠布。



伍、 研究過程與方法

一、 原理推導

以下（一）到（四）的討論，是在水平無摩擦的狀態下；

（五）、（六）為鉛直面無摩擦狀態。

（一） 速度方向

當一物體做上述運動時，在任一時刻，其速度 V 必可分為兩個分速度：第一個是垂直於繩子方向的 V_{\perp} ，另一個是平行繩子的 V_{\parallel} 。因繩子之張力方向和繩子平行，故張力對 V_{\perp} 不影響其量值，會改變量值的只有 V_{\parallel} （在無其他外力的情況下）。又因軌跡的切線方向即為是物體在該點的速度方向，故只要找出切線和繩之夾角即可。為了找出此角度，將其套入一直角座標中，設啓始時繩垂直於X軸，且繩長 L_0 ，則軌跡上另一點，若它的切點與圓心連線和X軸正向夾 θ 角，則其座標 (x,y) 可表為：

$$x=R\cos\theta-(L_0-R\theta)\sin\theta$$

$$y=R\sin\theta+(L_0-R\theta)\cos\theta$$

上兩式中 $(L_0-R\theta)$ 即為後來的繩長。

將上兩式整理後得：

$$x=R(\cos\theta+\theta\sin\theta)-L_0\sin\theta$$

$$y=R(\sin\theta-\theta\cos\theta)+L_0\cos\theta$$

對時間微分得：

$$V_x=[R(-\sin\theta+\theta\cos\theta+\sin\theta)-L_0\cos\theta]\omega=(R\theta\cos\theta-L_0\cos\theta)\omega$$

$$V_y=[R(\cos\theta+\theta\sin\theta-\cos\theta)-L_0\sin\theta]\omega=(R\theta\sin\theta-L_0\sin\theta)\omega$$

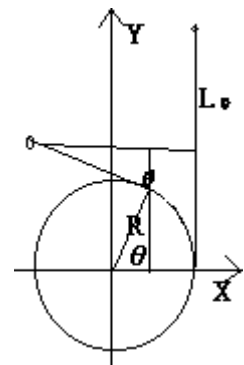
$$\text{其中 } \omega = \frac{d\theta}{dt}$$

整理後得速度向量 $=((R\theta-L_0)\omega\cos\theta, (R\theta-L_0)\omega\sin\theta)$

此時繩子的方向向量為： $(\sin\theta, -\cos\theta)$

$$\text{兩向量內積}=(R\theta-L_0)\omega(\cos\theta\sin\theta-\sin\theta\cos\theta)=0$$

故繩方向與物體速度方向恆垂直，亦即物體之速率不變。



(二) 圓心角—路徑長關係

設原繩長 L_0 ，某時刻已向內旋入 θ ，此時繩長 L ，至下一瞬間物體移動 ds 的距離，而圓心角改變 $d\theta$ ，如圖所示：

$$L = L_0 - R\theta$$

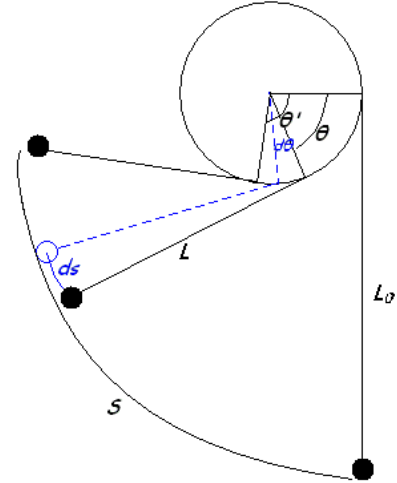
繩的夾角等於圓心角：

$$ds = L d\theta = (L_0 - R\theta) d\theta$$

令物體已向內旋入 θ' ，已經過路徑長為 S

$$\text{兩邊積分，得} \int_0^s ds = \int_0^{\theta'} (L_0 - R\theta) d\theta$$

$$\Rightarrow S = \theta' \left(L_0 - \frac{1}{2} R \theta' \right) \dots\dots \textcircled{1}$$



(三) 圓心角—時間之關係

已知速度大小不變，設物體的速度大小 V ，則 $S=Vt$

$$t = \frac{S}{V} = \frac{\theta(L_0 - \frac{1}{2} R \theta)}{V} \dots\dots \textcircled{2}$$

圈定義為 $\theta_2 - \theta_1 = 2\pi$ 時，由 θ_1 轉到 θ_2 之軌跡。

第 N 圈定義為 $\theta_2 = 2N\pi$ 且 $\theta_1 = (2N-1)\pi$ 之「圈」。

$$\text{轉第一圈所需之時間，即將} \theta = 2\pi \text{ 代入} \rightarrow T_1 = \frac{2\pi(L_0 - \pi R)}{V}$$

$$\text{轉第} N \text{ 圈所需時間} T_N = \frac{2\pi[L_0 - (2N-1)\pi R]}{V} \text{，用於實驗二}$$

$$\text{總時間} = \frac{L_0^2}{2RV} \text{（即繩子全部收完，} \theta = \frac{L_0}{R} \text{）}$$

(四) 水平面運動之其他關係 (推導過程請參閱附錄 E)

| | |
|--|--|
| <p>張力關係：</p> $F = \frac{mV^2}{\sqrt{L_0^2 - 2RtV}} = \frac{mV^2}{L}$ | <p>角動量的討論：</p> $\tau = \frac{-mRV^2}{\sqrt{L_0^2 - 2RtV}} = -R \times F$ |
| <p>有摩擦力的情況：</p> $T_N' = \frac{\sqrt{V_0^2 - 4\pi(N-1)g\mu_k[L-(N-1)\pi R]} - \sqrt{V_0^2 - 4\pi Ng\mu_k(L_0 - N\pi R)}}{g\mu_k}$ $F' = m \cdot \frac{V_0^2 - g\mu_k t(2V_0 - g\mu_k t)}{\sqrt{L_0^2 - Rt(2V_0 - g\mu_k t)}}$ | |

(五) 鉛直面運動情況：

設在最低點 (令為起始點) 之初速 V_0 ，繩長 L_0 。且經過 t 後，物體高度 h ，圓心角 θ 。如下頁圖所示：

在 (一) 中已經知道繩張力對物體不做功，故力學能守恒便可成立，於是：

$$\frac{1}{2} mV_0^2 = \frac{1}{2} mV^2 + mgh$$

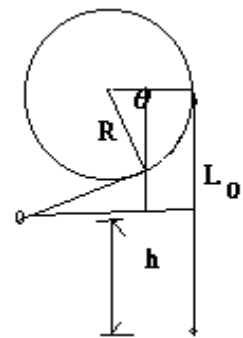
$$\text{得此時之速度 } V = \sqrt{V_0^2 - 2gh} = \frac{ds}{dt} \dots\dots ③$$

由圖可發現 $h = L_0 - R \sin \theta - (L_0 - R \theta) \cos \theta$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = (L_0 - R \theta) \frac{d\theta}{dt} \text{ 代入 } ③$$

$$\sqrt{V_0^2 - 2g[L_0(1 - \cos \theta) + R(\theta \cos \theta - \sin \theta)]} = (L_0 - R \theta) \frac{d\theta}{dt}$$

$$\rightarrow \int_0^t dt = \int_0^\theta \frac{L_0 - R \theta}{\sqrt{V_0^2 - 2g[L_0(1 - \cos \theta) + R(\theta \cos \theta - \sin \theta)]}} d\theta$$



即時間與圓心角之關係。此為一橢圓積分，無解析解，然可以利用自行開發之專屬程式，以計算機逼近出數值解。

在實驗二中，實驗設計並非繞一整圈測量時間的（技術水準太高），而是讓擺錘在下半部來回擺盪，此時的週期依上述公式可得：

$$T = 2 \times \int_{\alpha}^{\beta} \frac{L_0 - R \theta}{\sqrt{2g\{h - [L_0(1 - \cos \theta) + R(\theta \cos \theta - \sin \theta)]\}}} d\theta$$

其中 h 是最高點和最低點的高度差， L_0 定為垂直懸掛時的繩長。而積分上下限 β 、 α 是式 $h(x) = L_0(1 - \cos x) + R(x \cos x - \sin x) = h$ 中 x 在 $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ 的解，且取 $\alpha < 0 < \beta$ ，也就是物體在兩側最高點所對應的圓心角。

若只得到高度差（即為 h ），就必須用逼近法求出角度 α 、 β ，再代入積分式，且在取近似值時須使 $h(\alpha)$ 、 $h(\beta)$ 略小於 h ，以免出現對負數 $(h - h(\theta))$ 開平方根的情形。此積分程式將於實驗三使用，原始碼請參閱附錄 C。

（六） 鉛直面張力關係（推導過程請參閱附錄 E）

當圓心角距平衡位置 θ 時，繩張力 F'' ：

$$F'' = m \cdot \frac{V_0^2 - g [L_0(2 - 3\cos \theta) + R(3\theta \cos \theta - 2\sin \theta)]}{L_0 - R \theta}$$

上述各項數學關係式，若考慮軸半徑 $R=0$ 之情形，皆與「等速圓周運動」（Uniform Circular Motion）吻合。

（如將 $R=0$ 代入「（三）圓心角—時間之關係」之「總時間 = $\frac{L_0^2}{2RV}$ 」中，會使總時間為 ∞ ；由於等速圓周運動動能守衡，運動永不停止，此答案亦是合理的。）

也就是說，等速圓周運動可視為是圓軸漸收螺線運動中，軸半徑恰等於 0 之極端情形。

二、實驗

1. 以下實驗數據，若單位未經標明，則皆為 SI 單位系統。
2. 若標為「相對誤差」，則是指 $\frac{|\text{實測值} - \text{理論值(公認值)}|}{\text{理論值}} \times 100\%$ ，即百分誤差。
3. 關於測量精確度 ($x \pm \sigma$)，單筆測量 σ 採最小刻度之一半，多筆測量採平均標準差 (standard deviation of the mean)，導出量的誤差傳遞亦同。

(一) 實驗一：單擺重力加速度測量

1. 目的：測試實驗用之計時裝置的精確度。
2. 設計：利用已知原長之單擺，配合雷射光電計時裝置，利用擺錘遮蔽其路徑上雷射光的現象，測出精確週期；利用已知原長與測得之週期，計算出重力加速度 g ，並與本地標準值比較（中台灣約為 9.765 m/s^2 ）。

參考公式

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad \therefore g = \frac{4\pi^2 L}{T^2}$$

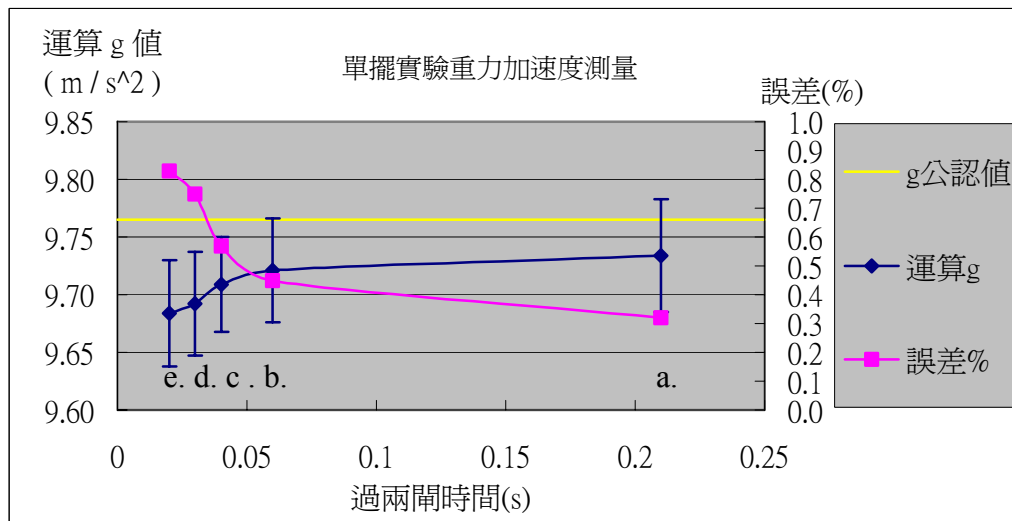
3. 實驗數據：

根據擺角大小（小至大）排列；「時間 1 第一次」表擺錘啓動後通過兩雷射光束間距之時間，由於雷射光間距一定，則擺角越小，值越大。

原始資料（參見附錄 B）能簡化成下表：

| | 過兩閘時間 (s) | 平均週期 (s) | 運算 g (m/s^2) | 相對誤差 (%) |
|---|-----------|-------------------|---------------------------|----------|
| a. | 0.21 | 3.453 ± 0.008 | 9.734 ± 0.049 | 0.32 |
| b. | 0.06 | 3.455 ± 0.007 | 9.721 ± 0.045 | 0.45 |
| c. | 0.04 | 3.458 ± 0.007 | 9.709 ± 0.041 | 0.57 |
| d. | 0.03 | 3.461 ± 0.007 | 9.692 ± 0.045 | 0.75 |
| e. | 0.02 | 3.462 ± 0.008 | 9.684 ± 0.046 | 0.83 |
| 擺長均為 $2.94 \pm 0.005 \text{ m}$ ，加速度標準值 9.765 m/s^2 | | | | |

以上資料能轉成下表



4. 討論：

(1) 實驗本身並不應當繼續增加擺角，其中e之擺角已接近 5° ，相對誤差的增加是必然的；實驗的結果也符合「擺角越大，週期越長」之原則。由圖表能清楚看出，隨著擺角漸小(e. 往a.)，運算g與相對誤差也趨近平穩，測量的可信度也相對提高。其中a.與b.之誤差範圍已能涵蓋公認值。



↑ 單擺週期測量實驗情形

(2) 光電計時器之最小測量單位為 0.01 秒，相對誤差若小於 1/100，則顯示雷射光的精確度是足夠的；就實驗結果，整體誤差幾乎不在於計時裝置上，符合實驗目的。此裝置是可行的。

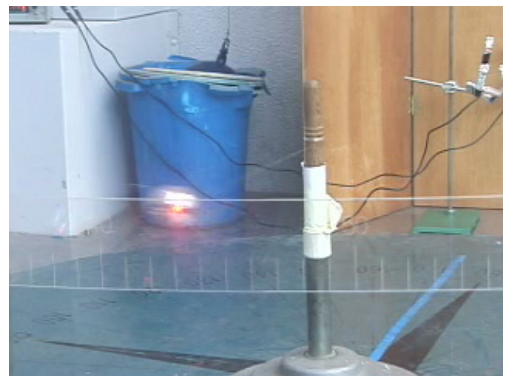
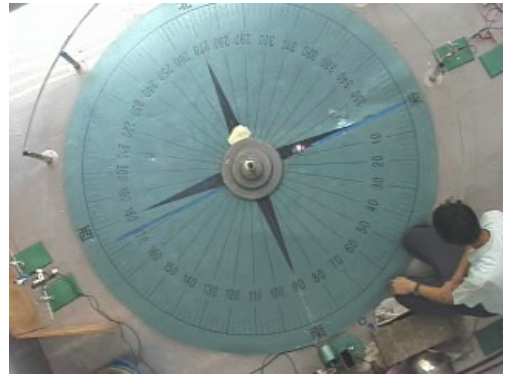
(3) 原始測量的有效數字皆為 3 位，經運算後平均週期取 4 位，g 導出量亦同。日前進行分析時，誤差採用平均偏差 (average deviation)；此次全部改採平均標準差 (standard deviation of the mean)，並配合誤差槓作圖，以期獲得更明確之分析結果。

(4) 此次實驗為減少風阻的影響，擺錘挑選得頗大（截面積成平方倍，然質量成立方倍）；a.之擺角已儘量小，擺錘放手點已幾乎要遮擋雷射光。由先前器材說明之內容，兩道光束間距需大於物體尺寸；以此為原則，若挑選較小擺錘，便能縮小兩光束間距，進而縮小擺角。加以更加精確的計時器，測量可望更加精確。

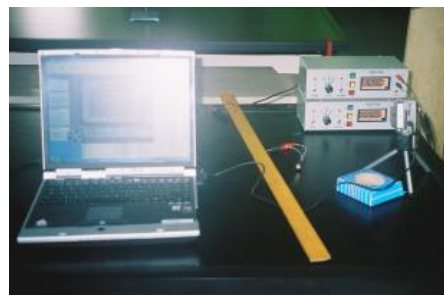
(二) 實驗二：近無摩擦向心螺旋運動測量

本實驗說明與討論中所使用之「週期」字眼（如「第 N 圈之週期」），皆指「繞行第 N 圈所需時間」；第 N 圈之定義請參照 P.8—圓心角—時間之關係。

1. 目的：以接近無摩擦狀態之環境，模擬水平向心螺旋運動之環境，並將測量值與理論比較。
2. 設計：水平無摩擦是最困難的部分，而高中並沒有乾冰圓盤或氣墊平面之類的器材。最後是使用類似佛科擺的架構，使待測物體懸掛空中，不與地面接觸。還包含以下重點：
 - (1) 使用極長的擺線（相對於平面繩長 L_0 ），使擺角減小，減少重力影響（運動範圍為二維）。垂點直接對準園柱中心，使此平面接近水平面。
 - (2) 使用密度大的待測物，以減輕風阻影響。
 - (3) 物體繫有兩組繩子。原則上平面繩（物體到園柱）給予向心力，垂直繩（物體到懸吊點）抵抗重力。
 - (4) 地上黏貼有色膠帶，提供雷射光之架設依據；雷射光電計時組請參考 P.5—光電計時器之改裝部分。
 - (5) 內圈（後幾圈）角速度極大，時間過短，難以用人手抄錄，故使用數位攝影機拍攝計時器，並以筆記型電腦提供影片資料記憶空間。



↑ 計時器裝置



↑ 計時器與筆記型電腦

3. 實驗數據：

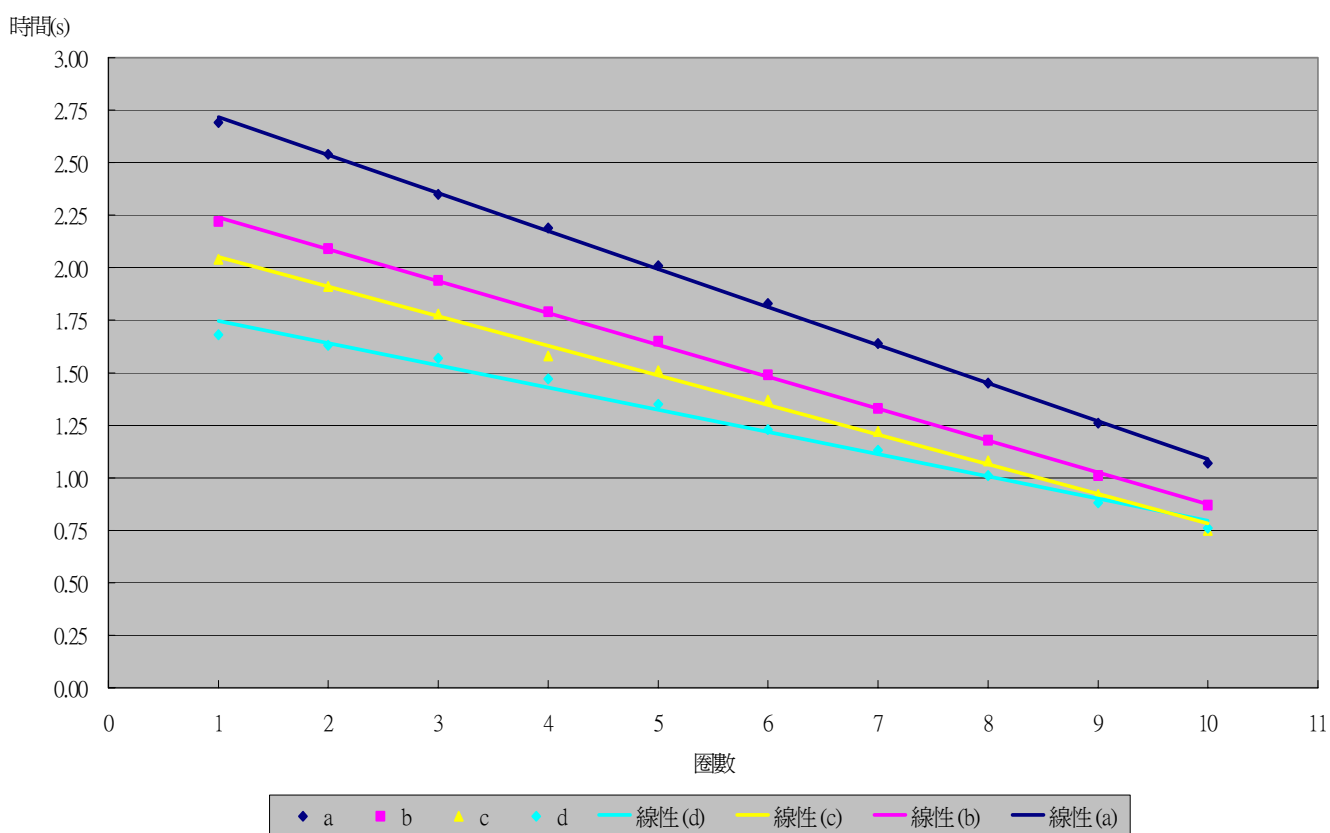
將以上事項付諸執行後，進行了 8 次實驗（不同初速），數據如下：

繩長 0.450m，軸半徑 0.00480m，週期單位為 s

| 資料筆 圈數 | a | b | c | d | e | f | g | h |
|-----------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 第 1 圈 | 2.69 | 2.22 | 2.04 | 1.68 | 1.69 | 1.64 | 1.62 | 1.76 |
| 第 2 圈 | 2.54 | 2.09 | 1.91 | 1.63 | 1.59 | 1.56 | 1.53 | 1.69 |
| 第 3 圈 | 2.35 | 1.94 | 1.78 | 1.57 | 1.50 | 1.45 | 1.45 | 1.58 |
| 第 4 圈 | 2.19 | 1.79 | 1.58 | 1.47 | 1.39 | 1.35 | 1.34 | 1.48 |
| 第 5 圈 | 2.01 | 1.65 | 1.51 | 1.35 | 1.35 | 1.25 | 1.23 | 1.38 |
| 第 6 圈 | 1.83 | 1.49 | 1.37 | 1.23 | 1.12 | 1.15 | 1.14 | 1.26 |
| 第 7 圈 | 1.64 | 1.33 | 1.22 | 1.13 | 1.07 | 1.03 | 1.02 | 1.15 |
| 第 8 圈 | 1.45 | 1.18 | 1.08 | 1.01 | 0.96 | 0.92 | 0.91 | 1.03 |
| 第 9 圈 | 1.26 | 1.01 | 0.92 | 0.88 | 0.83 | 0.81 | 0.83 | 0.91 |
| 第 10 圈 | 1.07 | 0.87 | 0.75 | 0.76 | 0.72 | 0.68 | 0.72 | 0.78 |

4. 討論：

其中 a、b、c、d 作圖如下：



e、f、g、h的圖形：



- (1) 各筆數據幾乎成一直線 (與其線性回歸比較)。顯然圈數—時間關係是成等差的。若以第一圈所需時間的長短作為初速大小的指標，則速度越快，公差越小，斜率絕對值也越小。這個結果和以速率不變為前提下的公式：

$$T_N = \frac{2\pi [L_0 - (2N-1)\pi R]}{V}$$

是符合的。

- (2) 當 $T_N=0$ 時， $N = \frac{L_0 + \pi R}{2\pi R}$ ，與初速 V 無關。(如此一來 N 就不一定是整數，但就數學式來說是正確的) $T_N=0$ 就是上圖各趨勢線的 x 截距，故應為一定值。

各趨勢線的 x 截距如下表： (圈)

| | a | b | c | d | e | f | g | h | 平均 |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------------------|
| x 截距 | 16.0 | 15.7 | 15.5 | 17.3 | 16.6 | 16.6 | 17.1 | 17.3 | 16.51 ± 0.25 |

利用式子所導出的值應為：
$$\frac{(0.450 \pm 0.005) + \pi \times (0.00480 \pm 0.00005)}{2\pi \times (0.00480 \pm 0.00005)} = 15.42 \pm 0.23$$

結果實測值偏大了些，推測這是由於水平繩在旋轉過程中受張力而拉長的緣故。選用的重錘質量將近 400 克，有可能產生夠大的張力。回到實驗數據也可發現，第一圈時間較長的 a、b、c，它們的 x 截距也比較接近理論值，第一圈時間較長表示初速較小，水平繩張力也較小，繩伸長較不明顯。

- (3) 若實驗結果均完全吻合 $T_N = \frac{2\pi [L_0 - (2N-1)\pi R]}{V}$ ，那麼所繪出的各線段應不相交，但兩張圖都有相交的現象。圖二有三條線幾乎是合在一起的，因為初速十分接近，各次實驗的微小差別就有可能使圖形相交。圖一是在最後一圈才交叉，推測這是應為在最後一圈時繩張力過大，產生了兩個因素使時間增長：一是水平繩伸長了，二是轉軸被繩子拉扯而搖晃（為避免轉軸搖晃的問題，已經刪去了最後兩圈被影響較大的數據，所以這一部分應是比較次要的）。且實驗d恰好初速較大，繩張力比其他組大些，效應也就比較明顯。
- (4) 擺錘軌跡不等高也有可能是產生誤差的因素：雖然已經將垂吊的繩子盡可能的拉高了，但內圈的高度還是比外圈低些。光束照在擺錘的位置也就不盡相同，而無法在和光束平行時觸動感應器，因而造成實驗誤差。
- (5) 因垂吊的繩子並非無限長，重錘仍有可能由高度差得到速度。但另有兩個因素可能使週期變長：空氣阻力的減速作用、繩拉長時所儲存的彈性位能與軌跡延長；且增加之速率多表現於垂直速率。無法估計這些影響分別為多少，但從數據來看，影響似乎並沒有那麼大。若是速度有明顯的改變，不大可能有幾近直線的圖形。
- (6) 圖二的線段幾乎在同一個範圍內，使圖形看來稍嫌凌亂。這是因原先曾想要控制初速之故。原先曾採用斜坡滑車碰撞來控制初速（詳見附錄 A），然經過誤差分析後，顯示滑車碰撞所製造的初速並不穩定（推測是碰撞界面與碰撞位置不均勻之故），然碰撞已是少數真正可行的初速控制方法。故便將數據視為初速不明確（如手拋），純粹於週期線性關係與軌跡做探討。其實初速可由任一圈所需時間（可知其路徑長），或由趨勢線反推，然此動作之必要性及論證皆不若直接探討線性關係與軌跡強大。

這個實驗牽涉到的變因比較複雜，而無法獲得如實驗（一）及接下來的實驗（三）的極高精確度，然其數據顯示公式 $T_N = \frac{2\pi [L_0 - (2N-1)\pi R]}{V}$ 的正確性頗高。於是便可以說：在無摩擦的情況下，物體的速率確實不變。若以肉眼觀察，常會誤認為物體的速率越來越快。這其實只是角速度越來越大所產生的錯覺罷了。



(三) 實驗三：圓軸漸收單擺運動測量

1. 目的：測量「圓軸漸收螺線運動」在鉛直面上的週期。
2. 設計：原本希望能夠測量此運動繞一整圈所需的時間，但後來發現要讓擺錘穩定地保持在鉛直面運動並不容易，而且要將實驗二的測量裝置擺放成垂直位置也很困難。所以將實驗稍加修改，只讓擺錘在下半部做來回擺盪（類似單擺的運動）。故實驗設計只需將實驗一的計時裝置完全複製即可，唯一變的只有擺錘綁線的軸改成有半徑的。



↑ 鉛直圓周單擺固定架

3. 實驗數據：

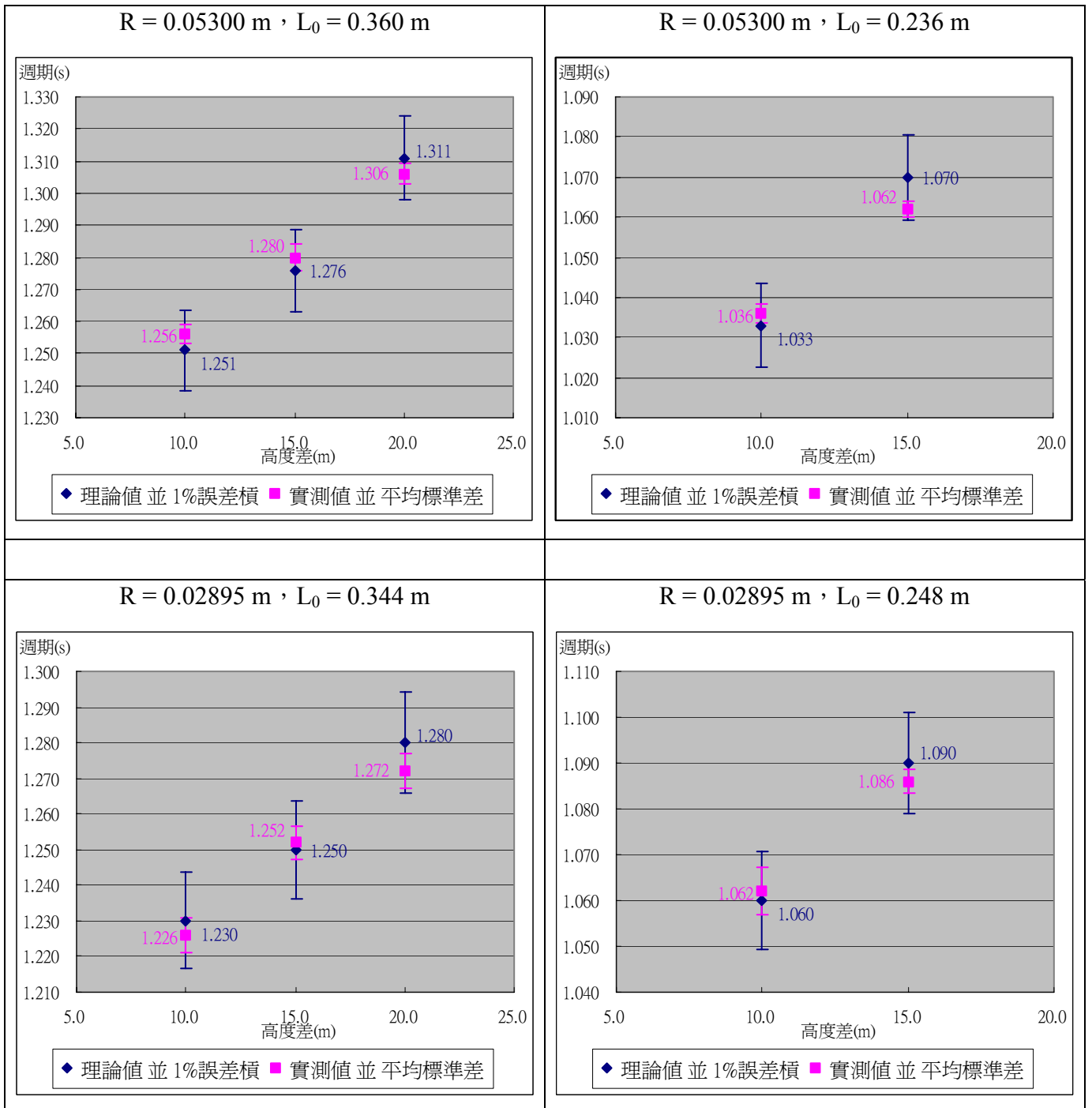
軸半徑 $R=0.05300\text{m}$ ：

| 高度差 原繩長 L_0 | | $(0.360 \pm 0.001)\text{ m}$ | $(0.236 \pm 0.001)\text{ m}$ |
|------------------------------|------|------------------------------|------------------------------|
| $(0.100 \pm 0.002)\text{ m}$ | 理論值 | $1.251 \pm 1\%$ | $1.036 \pm 1\%$ |
| | 實測值 | 1.256 ± 0.003 | 1.033 ± 0.003 |
| | 相對誤差 | 0.40 % | 0.29 % |
| $(0.150 \pm 0.002)\text{ m}$ | 理論值 | $1.276 \pm 1\%$ | $1.070 \pm 1\%$ |
| | 實測值 | 1.280 ± 0.004 | 1.062 ± 0.002 |
| | 相對誤差 | 0.31 % | 0.75 % |
| $(0.200 \pm 0.002)\text{ m}$ | 理論值 | $1.311 \pm 1\%$ | |
| | 實測值 | 1.306 ± 0.003 | |
| | 相對誤差 | 0.38 % | |

軸半徑 $R=0.02895\text{m}$ ：

| 高度差 原繩長 L_0 | | $(0.344 \pm 0.001)\text{ m}$ | $(0.248 \pm 0.001)\text{ m}$ |
|------------------------------|------|------------------------------|------------------------------|
| $(0.100 \pm 0.002)\text{ m}$ | 理論值 | $1.230 \pm 1\%$ | $1.060 \pm 1\%$ |
| | 實測值 | 1.226 ± 0.005 | 1.062 ± 0.005 |
| | 相對誤差 | 0.33 % | 0.19 % |
| $(0.150 \pm 0.002)\text{ m}$ | 理論值 | $1.250 \pm 1\%$ | $1.090 \pm 1\%$ |
| | 實測值 | 1.252 ± 0.005 | 1.086 ± 0.003 |
| | 相對誤差 | 0.16 % | 0.37 % |
| $(0.200 \pm 0.002)\text{ m}$ | 理論值 | $1.280 \pm 1\%$ | |
| | 實測值 | 1.272 ± 0.005 | |
| | 相對誤差 | 0.63 % | |

以上資料可轉繪成以下四張圖：



運算方法（使用於自撰之積分程式，請參見附錄 C）：

在 P.9 「鉛直面運動情形」中，已推出週期

$$T = 2 \times \int_{\alpha}^{\beta} \frac{L_0 - R \theta}{\sqrt{2g[h - h(\theta)]}} d\theta, \text{ 其中 } h(\theta) = L_0(1 - \cos \theta) + R(\theta \cos \theta - \sin \theta)$$

已知量為 軸半徑 R 、原繩長 L_0 、最高最低點差 h 。

設兩側擺角 α 、 β ，令 $\alpha \leq 0 \leq \beta$ （以收繩為正向）， $h \doteq h(\alpha) \doteq h(\beta)$

又必須使 $\sqrt{2g(h-h(\theta))}$ 有意義

→ 對於所有的 $\alpha \leq \theta \leq \beta$ ， $h-h(\theta) \geq 0$

→ 使用二分逼近法求得 α 、 β

由於此積分無解析解，故進行數值積分：



↑ 鉛直圓周單擺實做

$$T = 2 \times \int_{\alpha}^{\beta} \frac{L_0 - R \theta}{\sqrt{2g\{h - [L_0(1 - \cos \theta) + R(\theta \cos \theta - \sin \theta)]\}}} d\theta,$$

採用辛普森積分（Simpson's Integration，即二次曲線逼近），分割取樣個數為 2^n （ n

實際採 27），故 $d\theta = \frac{\beta - \alpha}{2^{27}} \doteq \frac{\beta - \alpha}{10^8}$

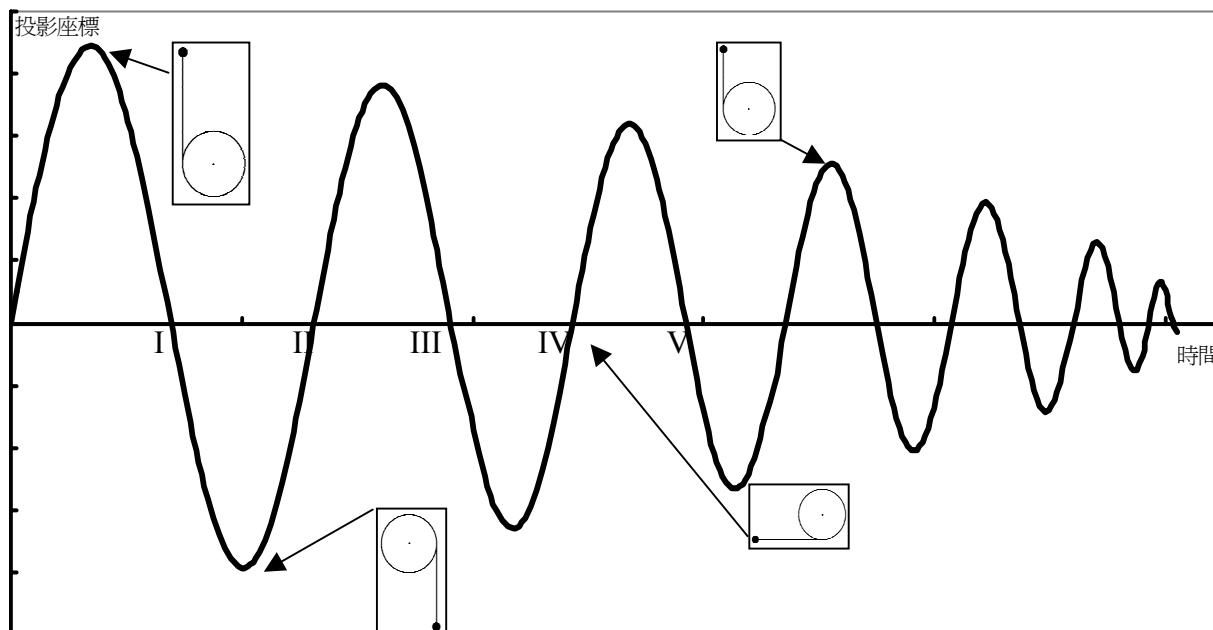
4. 討論：

- （1）為達穩定的光阻斷，本實驗的擺垂採圓柱型；基於方便與不影響實驗之前提，質心直接取為擺垂的中心，繩子不計質量。
- （2）經多方研討，實驗誤差主要應來自於原繩長與高度差之測量。原繩長是定義為平衡時繩與柱之切點到擺垂質心的距離，而此切點並不容易被明確指出；可能於實驗二亦有相同問題，然實驗二之「原繩長－軸半徑」比值較大，故不構成重大影響。經評估後，原繩長測量以 2mm 為最低位，精確度為 $\pm 1\text{mm}$ 。高度差定義為平衡時擺垂質心與放手點之垂直距離，精確度為 $\pm 2\text{mm}$ 。
- （3）上述兩項誤差中，高度差事實上會影響擺角，即積分上下限；為求簡明，誤差傳遞時並不考慮擺角。故導出量之精確度取近似之 $\pm 1\%$ 。實驗時的時間測量，單筆時間之精確度為 $\pm 0.005\text{s}$ ，故單一週期之精確度為 $\pm 0.01\text{s}$ ($\sqrt{4 * (0.005)^2}$)，百分誤差約為 $\pm 0.8\%$ 。
- （4）由圖中可得知，雖然平均測量值範圍不盡然涵蓋理論值，然平均測量值皆能落入 $\pm 1\%$ 之誤差槓內；顯示由平面運動推廣至鉛直面運動，是相當成功的。

陸、 討論

在經實驗證實後，再繪製了此類運動中一些物理量的關係圖，以更加了解這種運動的特性。

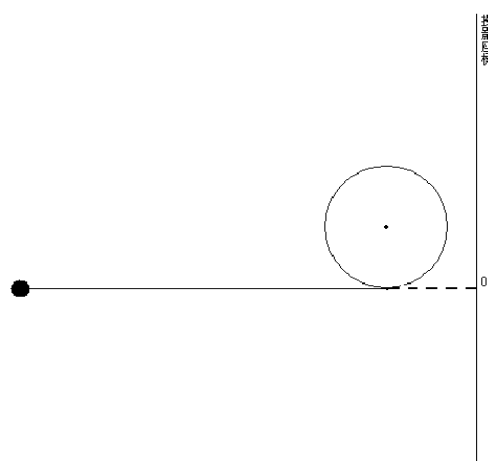
(一) 水平面情形



上圖是在水平無摩擦狀況下物體在特定方向的投影和時間關係圖。設定一投影座標軸與時間為 0 時的繩方向垂直，此時對應座標為 0，如下圖所示。

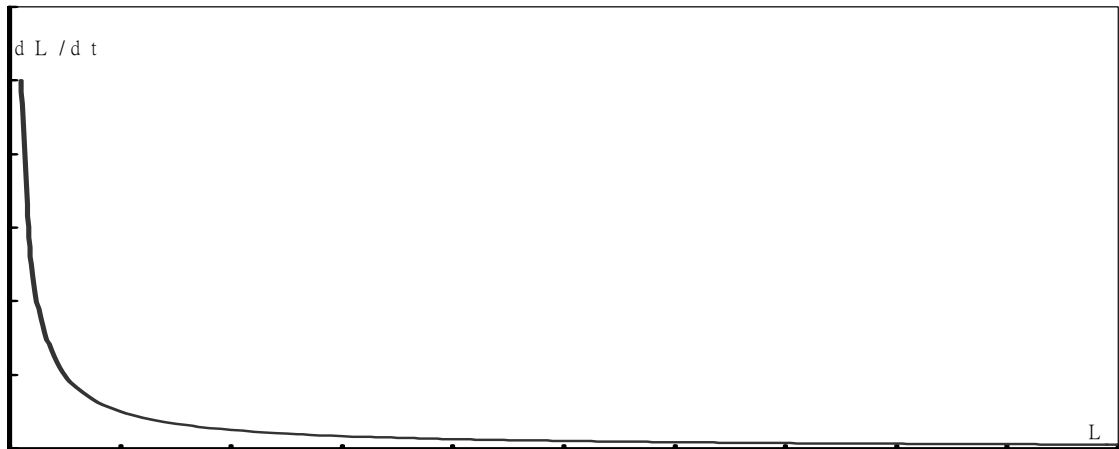
如此設定有項好處：是每偶數次座標值回到 0 的時距即為「轉第 N 圈所需時間」，即 T_N (上圖時間軸旁所示之數字即回到座標=0 的次數，如第 II 次與第 IV 次的時間差即為第二圈所需時間)。

而就同一象限內(座標值大於 0 或小於 0)，每當座標達極值時(粗略地說，及振幅)，其值應成等差數列。若改以角度 θ 為自變數時，這兩個象限的極值可分別連成兩條直線。



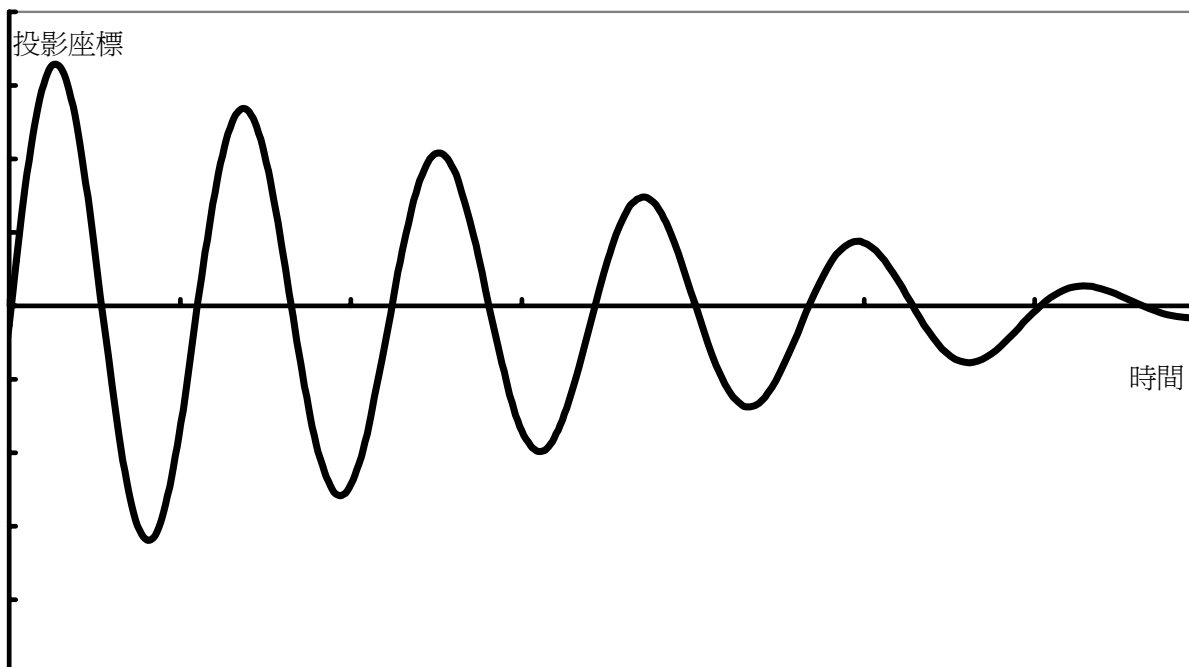
得到的結果就是如上一個類似震盪的圖形。「轉第 N 圈所需時間」隨著 N 變大而遞減，事實上是呈現等差的(見實驗二)。而每次座標達極值時，其大小成等差也可從圖上看出。最後物體應停留在 R 與 -R 之間。

由 $dL = -Rd\theta$ ，且 $d\theta = \frac{Vdt}{L}$ ，可得一關係式 $L \times \frac{dL}{dt} = -RV$ 。這是一條反比曲線，代表當物體逐漸旋進時，收繩的速率也越來越快。



水平無摩擦時的繩長 L 和 $\frac{dL}{dt}$ 關係圖。

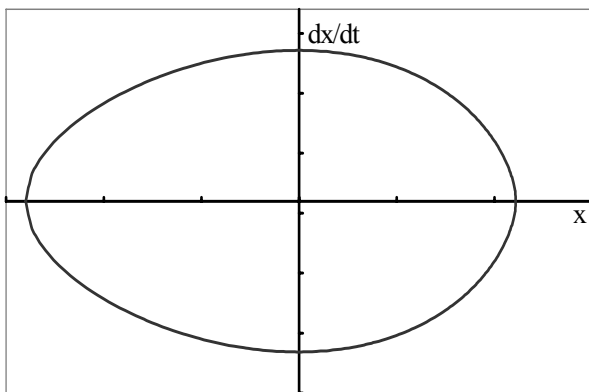
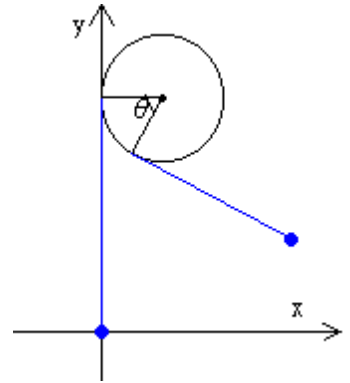
有摩擦力的情況下，物體作水平面運動在特定方向的投影與時間關係圖。投影座標的設定都與無摩擦的圖相同。



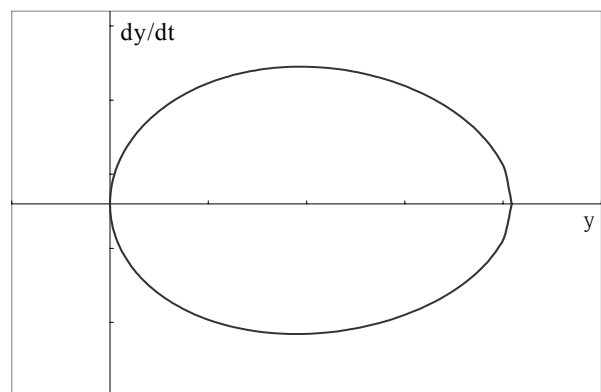
投影座標的極值仍呈等差數列，但轉第 N 圈所需時間並沒有像無摩擦的圖形一樣有著簡單的遞減關係。摩擦力會導致速率遞減，然路徑長亦向內圈遞減； T_N 依初速與摩擦力大小而可能呈現一直遞增、先遞減後遞增、或一直遞減。(上圖所示的是遞增關係)

(二) 鉛直面情形

以下三張圖是「變形單擺運動」的一些量的關係圖，變形單擺運動的式子大都沒有簡單的結構，而無法直接看出它各種量之間的關係，所以多畫了幾張圖，以對它的運動形式有更完整的理解。為了表示方便，便規定了一套座標，其各項設定都如右圖所示(圖中藍色圓點即為擺錘)。由於變形單擺運動有收繩和放繩端，繪出的圖形往往左右不對稱；若為封閉曲線，則往往呈現一蛋形。



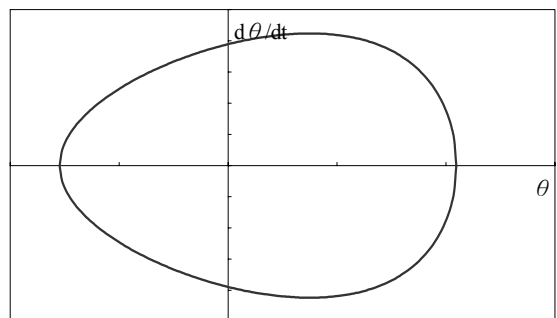
↑ 圖 1. 水平速度與水平位置的關係圖



↑ 圖 2. 垂直速度與垂直位置的關係圖

圖 1.和圖 2.是速度—位置圖，它們是封閉的曲線表示物體在做此運動時力學能守恒。圖 1.的左右是不對稱的，在左半部、 x 為負值時，物體可以到達較遠的距離。而依座標的設定， x 軸負向為放繩端。由此可知，做變形單擺運動時，在於放繩端可離平衡位置較遠。唯有當繩長遠大於軸半徑，或擺角很小時，圖形才近似左右對稱。

圖 3.的極值並非發生在 $\theta=0$ 的時候。當物體運動是往收繩端時，其速度減小，但相對的繩長也變小了，這兩項因素合起來的影響使 $\frac{d\theta}{dt} = \frac{V}{L}$ 先變大後變小，於是極值便在收繩端上的某一處。放繩端則不會有這個現象，因為速度變小的同時，繩長也增長了。



↑ 圖 3. 圓心角 θ 與角速度的關係圖

因為當繩長遠大於軸半徑，或擺角很小時，「變形單擺運動」可視為一般單擺；在這兩種情況下，圖 3.也會近似對稱的圖形。

柒、 結論

經過三個實驗與討論後，做了幾個結論：

一. 光電計時器和雷射筆組合起的計時裝置是可行的：

能夠克服光電計時器的發射端子和接收端子距離過短，無法測量大型物體或不易預測的軌跡的限制；並使光電計時器有交替計時之功能。且除了光電計時器外的器材都很容易以低廉的價格取得。再者，光電計時器百分之一秒的精確度也能完全發揮。

二. 得到「圓軸漸收螺線運動」在水平無摩擦狀態下速度、旋轉時間等之間的關係：

雖然實驗（二）的相對誤差程度不能盡如人意，但繪出的圖形很明顯的表示出圈數—時間的關係是呈現等差的，在實驗二的討論中，推測誤差是主要來自水平繩張力的效應。所以認為原理推導出的關係是正確的。

三. 得到「圓軸漸收單擺運動」的擺角、週期間的關係：

實驗三的準確度即可說明這一點。擺角只能以逼近法求出，因為高度的測量比角度容易的多了。雖然並未測量完整繞完一圈的週期，但它的特殊情況（也就是這個實驗）應可證實所導出式子正確。

※礙於時間和器材因素，有摩擦力情況的實驗和張力的實驗並沒有實作；為了方便參考，仍將以前導出的一些式子置於「伍、一、原理推導」及「附錄本」中，若還有機會，可再設計一系列的實驗來檢驗或修改這些關係式。

捌、 參考資料

- 大學物理學（一）----- 東華書局出版
- 普通物理實驗課本（93年9月）----- 國立清華大學出版社
- 普通物理實驗----- 國立成功大學物理學系
- 高中物質科學物理篇（上、下冊）----- 國立編譯館
- 初學微積分----- 九章出版社
- 數值方法入門----- 全華科技圖書

未來研究方向

這次報告中，討論了較為單純的水平無摩擦及垂直的情況，在接下來的時間，希望能夠更加拓展此類運動的研究範圍。以下是現階段所想到的一些可能的研究方向：

- 一. 實際進行有摩擦力的實驗。
- 二. 尋找更準確的儀器以改善實驗誤差。
- 三. 改用質量不可忽略的重繩，探討會有何不同。
- 四. 轉軸並非固定在地上，而會對繩張力有反應的情形。
- 五. 運用轉軸的整個圓柱部分，讓重錘在旋進過程中自由下落，形成三度空間的運動形式。
- 六. 設計新的實驗裝置以測量或估計繩張力的大小。