

第三屆旺宏科學獎

作品附錄本

圓軸漸收螺線運動

附錄本

附錄 A：碰撞初速控制.....	1
附錄 B：實驗原始數據.....	2
附錄 C：專屬積分程式及原始碼.....	7
附錄 D：GSP 所繪之軌跡.....	11
附錄 E：參考方程式之推導過程.....	12

參賽隊伍：SA3-177

參賽者姓名：盧振華

附錄 A：碰撞初速控制

在原本的設計中，規劃了一個控制初速的方法，後因效果不佳而作罷。以下是當初的想法：

利用學校實驗室的力學滑車由斜面滑下撞擊擺錘。在斜面的高度、角度、滑車質量等皆固定的情況下，測出擺錘的初速。

測定此初速的方法：將擺錘至於桌沿（桌高 H ），受滑車撞擊後擺錘沿一拋物線飛出並撞擊地面，量測此撞擊點與桌底之距離 L ，便可得擺錘之初速

$$V = L \times \sqrt{\frac{g}{2H}}。隨後改變滑車質量（添加砝碼）以得不同的初速。$$

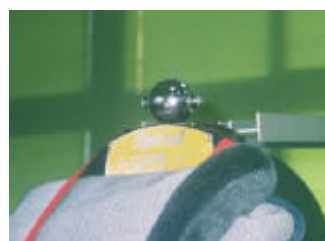
實驗後雖然直接碰撞的精確度不差（約 $\pm 2\%$ ），但一把這套方法用在實驗二中時，精確度卻大幅降低（以第一圈週期估計，約 $\pm 5\%$ ）推測這可能和垂直懸吊的繩子影響、非彈性碰撞能量轉移不均有關。經過一番嘗試後，在技術上無法克服這個問題，在想不出其他有效的辦法控制的情況下，只好放棄這部分的實驗，直接將每筆數據作圖、討論。



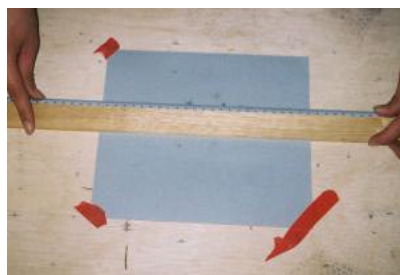
衝撞途中



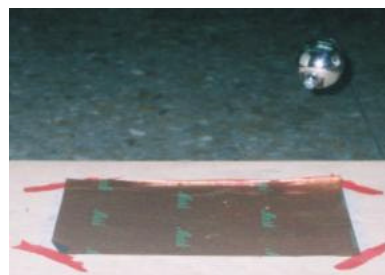
衝撞途中



等待撞擊



測量落點



掉落途中（非常幸運的拍到）

附錄 B：實驗原始數據

(一) 實驗一數據

a.	時間 1	時間 2	週期	運算區
第 1 次	0.21	1.6		
2	2.06	3.21	3.46	平均週期
3	3.91	4.81	3.45	3.453
4	5.77	6.4	3.45	平均標準差
5	7.63	8	3.46	0.008
6	9.49	9.6	3.46	
7	11.35	11.21	3.47	擺長 L
8	13.19	12.81	3.44	2.94
9	15.04	14.41	3.45	
10	16.89	16	3.44	計算 g
11	18.75	17.59	3.45	9.734
12	20.61	19.19	3.46	平均標準差
13	22.47	20.78	3.45	0.049
14	24.33	22.39	3.47	
15	26.18	23.99	3.45	相對誤差
16	28.03	25.59	3.45	0.32%
17	29.88	27.18	3.44	

b.	時間 1	時間 2	週期	運算區
第 1 筆	0.06	1.78		
2	1.74	3.56	3.46	平均週期
3	3.41	5.34	3.45	3.455
4	5.08	7.11	3.44	平均標準差
5	6.76	8.89	3.46	0.007
6	8.44	10.68	3.47	
7	10.11	12.46	3.45	擺長 L
8	11.78	14.24	3.45	2.94
9	13.45	16.03	3.46	
10	15.12	17.81	3.45	計算 g
11	16.79	19.59	3.45	9.721
12	18.47	21.37	3.46	平均標準差
13	20.15	23.16	3.47	0.045
14	21.82	24.94	3.45	
15	23.49	26.73	3.46	相對誤差
16	25.16	28.51	3.45	0.45%
17				

c.	時間 1	時間 2	週期	運算區
第 1 次	0.04	1.75		
2	1.74	3.5	3.45	平均週期
3	3.45	5.25	3.46	3.458
4	5.16	7	3.46	平均標準差
5	6.86	8.75	3.45	0.007
6	8.57	10.51	3.47	
7	10.27	12.26	3.45	擺長 L
8	11.98	14.01	3.46	2.94
9	13.69	15.77	3.47	
10	15.39	17.52	3.45	計算 g
11	17.09	19.28	3.46	9.709
12	18.79	21.03	3.45	平均標準差
13	20.5	22.79	3.47	0.041
14	22.2	24.54	3.45	
15	23.9	26.29	3.45	相對誤差
16	25.6	28.05	3.46	0.57%
17	27.3	29.81	3.46	

d.	時間 1	時間 2	週期	運算區
第 1 筆	0.03	1.74		
2	1.74	3.48	3.45	平均週期
3	3.46	5.23	3.47	3.461
4	5.17	6.97	3.45	平均標準差
5	6.88	8.71	3.45	0.007
6	8.59	10.46	3.46	
7	10.3	12.2	3.45	擺長 L
8	12.01	13.94	3.45	2.94
9	13.73	15.68	3.46	
10	15.45	17.43	3.47	計算 g
11	17.16	19.18	3.46	9.692
12	18.88	20.93	3.47	平均標準差
13	20.6	22.68	3.47	0.045
14	22.32	24.43	3.47	
15	24.04	26.18	3.47	相對誤差
16	25.75	27.93	3.46	0.75%
17	27.46	29.68	3.46	

e.	時間 1	時間 2	週期	運算區
第 1 次	0.02	1.72		
2	1.76	3.44	3.46	平均週期
3	3.51	5.16	3.47	3.462
4	5.26	6.88	3.47	平均標準差
5	7.01	8.59	3.46	0.008
6	8.76	10.31	3.47	
7	10.51	12.03	3.47	擺長 L
8	12.25	13.74	3.45	2.94
9	14	15.46	3.47	
10	15.75	17.18	3.47	計算 g
11	17.49	18.9	3.46	9.684
12	19.23	20.61	3.45	平均標準差
13	20.97	22.32	3.45	0.046
14	22.71	24.03	3.45	
15	24.46	25.74	3.46	相對誤差
16	26.21	27.46	3.47	0.83%
17	27.96			

(二) 實驗二數據

時間	a		b		c		d	
	計時器 A	計時器 B	計時器 A	計時器 B	計時器 A	計時器 B	計時器 A	計時器 B
	0.07	0.00	0.06	0.00	0.06	0.00	0.04	0.00
	1.39	1.37	1.14	1.14	1.06	1.04	0.91	0.81
	2.64	2.66	2.16	2.21	2.00	2.01	1.69	1.66
	3.81	3.84	3.11	3.20	2.87	2.92	2.46	2.46
	4.89	4.95	3.98	4.12	3.67	3.76	3.18	3.21
	5.87	5.98	4.78	4.97	4.40	4.54	3.84	3.90
	6.76	6.92	5.51	5.73	5.07	5.24	4.44	4.53
	7.56	7.76	6.15	6.42	5.66	5.87	4.99	5.11
	8.26	8.51	6.72	7.03	6.18	6.43	5.48	5.63
	8.87	9.16	7.21	7.55	6.62	6.91	5.91	6.08
	9.40	9.70	7.64	7.99	6.97	7.31	6.28	6.47

時間	e		f		g		h	
計時器停止時間 (sec)	計時器 A	計時器 B	計時器 A	計時器 B	計時器 A	計時器 B	計時器 A	計時器 B
	0.05	0.00	0.43	0.00	0.08	0.00	0.05	0.00
	0.88	0.86	1.23	0.84	0.88	0.82	0.91	0.90
	1.66	1.67	1.99	1.64	1.64	1.59	1.73	1.77
	2.40	2.43	2.70	2.38	2.35	2.31	2.50	2.58
	3.08	3.14	3.36	3.07	3.01	2.99	3.22	3.34
	3.71	3.86	3.97	3.71	3.62	3.61	3.89	4.05
	4.29	4.40	4.53	4.30	4.18	4.19	4.50	4.70
	4.81	4.95	5.03	4.83	4.68	4.71	5.06	5.29
	5.28	5.44	5.48	5.30	5.13	5.17	5.55	5.83
	5.68	5.87	5.87	5.72	5.53	5.60	6.35	6.30
	6.03	6.24	6.20	6.07	5.87	5.98	6.67	6.72

已知 $t_A + t_B =$ 轉第 n 圈所需時間，將以上數據整理後得：

繩長 0.450m，軸半徑 0.00480m，週期單位為 s

資料筆 圈數	a	b	c	d	e	f	g	h
第 1 圈	2.69	2.22	2.04	1.68	1.69	1.64	1.62	1.76
第 2 圈	2.54	2.09	1.91	1.63	1.59	1.56	1.53	1.69
第 3 圈	2.35	1.94	1.78	1.57	1.50	1.45	1.45	1.58
第 4 圈	2.19	1.79	1.58	1.47	1.39	1.35	1.34	1.48
第 5 圈	2.01	1.65	1.51	1.35	1.35	1.25	1.23	1.38
第 6 圈	1.83	1.49	1.37	1.23	1.12	1.15	1.14	1.26
第 7 圈	1.64	1.33	1.22	1.13	1.07	1.03	1.02	1.15
第 8 圈	1.45	1.18	1.08	1.01	0.96	0.92	0.91	1.03
第 9 圈	1.26	1.01	0.92	0.88	0.83	0.81	0.83	0.91
第 10 圈	1.07	0.87	0.75	0.76	0.72	0.68	0.72	0.78

(三) 實驗三數據

軸半徑 $R=0.05300$ m

		$L_0 = 0.360$ m					$L_0 = 0.236$ m					
		A	B	TA	TB	T	A	B	TA	TB	T	
H=0.100 m	0	0.07	0.00				0	0.08	0.00			
	1	0.71	0.62	0.64	0.62	1.26	1	0.61	0.51	0.53	0.51	1.04
	2	1.35	1.24	0.64	0.62	1.26	2	1.13	1.02	0.52	0.51	1.03
	3	1.98	1.86	0.63	0.62	1.25	3	1.65	1.54	0.52	0.52	1.04
	4	2.62	2.48	0.64	0.62	1.26	4	2.17	2.05	0.52	0.51	1.03
	5	3.25	3.10	0.63	0.62	1.25	5	2.69	2.57	0.52	0.52	1.04
	M						1.256					
						± 0.003						± 0.003
H=0.150 m	0	0.07	0.00				0	0.06	0.00			
	1	0.72	0.63	0.65	0.63	1.28	1	0.60	0.53	0.54	0.53	1.07
	2	1.38	1.26	0.66	0.63	1.29	2	1.14	1.05	0.54	0.52	1.06
	3	2.03	1.89	0.65	0.63	1.28	3	1.68	1.57	0.54	0.52	1.06
	4	2.68	2.52	0.65	0.63	1.28	4	2.22	2.09	0.54	0.52	1.06
	5	3.33	3.14	0.65	0.62	1.27	5	2.76	2.61	0.54	0.52	1.06
	M						1.280					
						± 0.004						± 0.002
H=0.200 m	0	0.05	0.00									
	1	0.72	0.63	0.67	0.63	1.30						
	2	1.39	1.27	0.67	0.64	1.31						
	3	2.06	1.91	0.67	0.64	1.31						
	4	2.72	2.55	0.66	0.64	1.30						
	5	3.39	3.19	0.67	0.64	1.31						
	M											1.306
						± 0.003						

SA3-177 附錄 B：實驗原始數據
 軸半徑 $R=0.02895$ m

		$L_0 = 0.344$ m					$L_0 = 0.248$ m				
		A	B	TA	TB	T	A	B	TA	TB	T
H=0.100 m	0	0.07	0.00				0	0.08	0.00		
	1	0.71	0.60	0.64	0.60	1.24	1	0.62	0.54	0.54	1.08
	2	1.34	1.19	0.63	0.59	1.22	2	1.16	1.06	0.54	1.06
	3	1.97	1.78	0.63	0.59	1.22	3	1.70	1.58	0.54	1.06
	4	2.60	2.38	0.63	0.60	1.23	4	2.23	2.10	0.53	1.05
	5	3.23	2.97	0.63	0.59	1.22	5	2.77	2.62	0.54	1.06
	M					1.226					1.062
					± 0.005					± 0.005	
H=0.150 m	0	0.06	0.00				0	0.07	0.00		
	1	0.71	0.61	0.65	0.61	1.26	1	0.62	0.54	0.55	1.09
	2	1.36	1.22	0.65	0.61	1.26	2	1.17	1.08	0.55	1.09
	3	2.00	1.83	0.64	0.61	1.25	3	1.72	1.61	0.55	1.08
	4	2.64	2.43	0.64	0.60	1.24	4	2.27	2.15	0.55	1.09
	5	3.28	3.04	0.64	0.61	1.25	5	2.81	2.69	0.54	1.08
	M					1.252					1.086
					± 0.005					± 0.003	
H=0.200 m	0	0.07	0.00								
	1	0.71	0.63	0.64	0.63	1.27					
	2	1.36	1.26	0.65	0.63	1.28					
	3	2.02	1.88	0.66	0.62	1.28					
	4	2.68	2.49	0.66	0.61	1.27					
	5	3.33	3.10	0.65	0.61	1.26					
	M					1.272					
					± 0.005						

附錄 C：專屬積分程式及原始碼

以下為替實驗三所撰寫之積分專屬程式，大致分為四段：

1. 參數輸入：行 30~40
2. 利用二分搜尋法，由 h 求 θ 、 ϕ （求積分上下限）：行 46~80
3. 辛普森積分：行 87~104
4. 積分結果輸出：行 105

1	<pre>#include "stdio.h" #include "math.h" #include "stdlib.h"</pre>
5	<pre>#define pi 3.141592653589793 #define d 0.000000001 #define g 9.765 #define h(x) (L *(1-cos(x)) + R*(x*cos(x)-sin(x))) #define f(x) ((L-R*x) / sqrt(2*g*(H-h(x))))</pre>
10	<pre>double R, // 軸半徑 L, // 原繩長 H; // 最高最低點差</pre>
15	<pre>double a, b; // 積分上下限 long double T; // 週期數值解</pre>
20	<pre>int main(void){ int n; // 分割量指數 long double r; // 現正角度 long double dr; // 分割間距</pre>


```
25      double f_r, f_r2 ;           // f(r), f(r+2dr)
      double temp[2] ;

      // 數值輸入 ////////////////
30      printf("R: ") ;
      scanf("%lf", &R ) ;

      printf("L: ") ;
      scanf("%lf", &L ) ;

35      printf("H: ") ;
      scanf("%lf", &H ) ;

      printf("n: ") ;
40      scanf("%d", &n ) ;

      printf("\n\n") ;

      // 數值初始 ////////////////
      // 二分搜尋法求 a,b //
45      a = b = 0.0 ;

      temp[0] = -( pi/2 ) ;
      while( H - h(a) > d ){
50          temp[1] = (temp[0]+a) /2 ;

          if( h(temp[1]) < H ){
              if( a != temp[1] )
                  a = temp[1] ;
55          else break ;
          }
          else{
              if( temp[0] != temp[1] )
```

```

59             temp[0] = temp[1] ;
60             else break ;
                }
        }
        printf("a: %.10fn", a) ;

65        temp[0] = pi / 2 ;
        while( H - h(b) > d ){
            temp[1] = (temp[0]+b) / 2 ;

            if( h(temp[1]) < H ){
70                if( b != temp[1] )
                    b = temp[1] ;
                else break ;
            }
            else{
75                if( temp[0] != temp[1] )
                    temp[0] = temp[1] ;
                else break ;
            }
        }
80        printf("b: %.10fn\n", b) ;

            // 求 dr //
        for( dr = b-a ; n!=0 ; n-- )
            dr /= 2 ;

85        // 數值積分 //////////////////////////////////////
        temp[1] = 2*dr ;           // 積分迴圈實際增加量
        b -= temp[1] ;

90        f_r = f(a) ;
        for( T=0.0, r=a ; r<=b ; r+=temp[1] ){

```

```
93     temp[0] = r + temp[1];           // r+2dr
      f_r2 = f(temp[0]);               // f(r+2dr)
95     temp[0] -= dr;                 // r+dr

      T += f_r + 4*f(temp[0]) + f_r2; // f(r) + 4f(r+dr) + f(r+2dr)
      f_r = f_r2;                     // f(r+2dr) --> f(r)
    }
100
      T *= dr;                         // ( f(r) +4f(r+dr) +f(r+2dr) ) *dr/3
      T /= 3;

      T *= 2;                          // 根據原始公式
105     printf("T: %.10fn\n", T);

      system("pause");
      return 0;
    }
```

附錄 D：GSP 所繪之軌跡

<p>在中心畫出軸（紅色圓圈，往後為綠色），並以尺規作出一條切線（紅色線，即繩子，往後為藍色）。</p>	<p>在繩子（藍色者）的另一端，以尺規作出垂直線（紅色者，即日後之切線，往後為藍色），</p>
<p>隱藏不必要的參考點和輔助線。 將端點及垂直線設為 "Trace Point"（紅色痕跡）與 "Trace Segment"（藍色痕跡），並設定動作：</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 端點朝切點移動。 2. 切點沿圓周以收線方向移動。 3. 兩者移動速率相同。 	<p>利用前述 1. 2. 3. 點，便可模擬收線的情況。切線設定的越短，Trace 出的路徑便越細緻。</p>

附錄 E：參考方程式之推導過程

水平面無摩擦

張力關係

設當繩長 L 時，繩張力 F ，經過時間 dt 後圓心角改變 $d\theta$ ，且物體質量 m

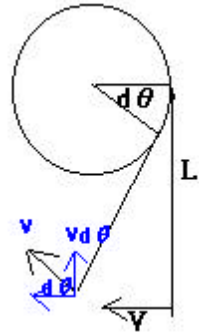
$$F = m \frac{dV}{dt} = mV \frac{d}{dt}$$

由先前推導得 $= \frac{L_0 \pm \sqrt{L_0^2 - 2RtV}}{R}$ ，又 $\frac{L_0}{R}$

$$= \frac{L_0 - \sqrt{L_0^2 - 2RtV}}{R}$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{V}{\sqrt{L_0^2 - 2RtV}} \quad L = L_0 - R = \sqrt{L_0^2 - 2RtV} \text{ 代回}$$

$$F = \frac{mV^2}{\sqrt{L_0^2 - 2RtV}} = \frac{mV^2}{L}$$



角動量的討論

在得到角度—時間關係後，就可以求出角動量，選擇的參考點是一直固定的圓心。

如右圖所示，設在 t 時刻繩長 L ，且物體—圓心—切點夾角 α ，

則此時之角動量量值 $= mV\sqrt{R^2 + L^2} \sin \alpha$

$$\text{但 } \sin \alpha = \frac{L}{\sqrt{R^2 + L^2}}$$

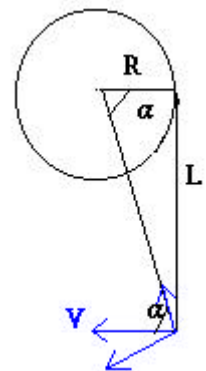
$$\text{角動量量值} = mVL = mV\sqrt{L_0^2 - 2RtV}$$

和時間有關，即物體的角動量不守恆，這是因為張力不通過圓心，而有力矩作用的緣故。

將上式對時間微分，得力矩 τ 的量值：

$$= \frac{-mRV^2}{\sqrt{L_0^2 - 2RtV}} = -R \times F$$

上式中的 F 即為張力，有負號是因為張力方向向內的緣故。



水平面有摩擦力的情況

在有一定摩擦力時

$$s = V_0 t - \frac{1}{2} g \mu_k t^2 = L_0 - \frac{1}{2} R^2 \quad (\text{其中 } g \text{ 為重力加速度、} \mu_k \text{ 為動摩擦係數)}$$

$$t = \frac{V_0 - \sqrt{V_0^2 - g \mu_k (2L_0 - R)}}{g \mu_k}$$

轉第 N 圈所需時間

$$T_N' = \frac{\sqrt{V_0^2 - 4(N-1)g\mu_k[L-(N-1)R]} - \sqrt{V_0^2 - 4Ng\mu_k(L_0 - NR)}}{g\mu_k}$$

因張力 F' 和摩擦力恆垂直，故仍為 $\frac{mV^2}{L}$ ，將 L、V 代入得

$$F' = m \frac{V_0^2 - g \mu_k t (2V_0 - g \mu_k t)}{\sqrt{L_0^2 - Rt(2V_0 - g \mu_k t)}}$$

鉛直面張力關係

如右圖，當圓心角 θ 時，重力在繩子方向的分力 $-mg \cos \theta$ 和繩張力的合力即為 $\frac{mV^2}{L}$

$$\frac{m(V_0^2 - 2gh)}{L_0 - R} = F'' - mg \cos \theta$$

$$F'' = \frac{m(V_0^2 - 2gh)}{L_0 - R} + mg \cos \theta$$

$$= m \frac{V_0^2 - g[L_0(2 - 3\cos \theta) + R(3\cos \theta - 2\sin \theta)]}{L_0 - R}$$

