

敲出問題來

一、研究動機：

敲擊裝有不等量水的玻璃杯可以譜出的美妙樂曲，這個現象你是怎麼解釋的呢？大多數人說是利用空氣柱高低的不同而發出不同的音調，我們認為用空氣柱共鳴的原理是不對的。用此原理推導的結果空氣柱愈短頻率愈高，但敲擊結果與此相反。那麼正確的原理為何？於是我們展開這次的研究。

二、研究目的：

1. 研究出玻璃杯被敲後發出聲音之原理。
2. 以一系列之實驗證明我們提出之解釋是正確的。

三、實驗器材：



圖 1



圖 2

儀器設備如圖 1 所示。利用指向性麥克風以電腦錄音後以 Adobe Audition 軟體分析聲波頻率。

四、原理：

敲擊玻璃杯時，杯壁質點垂直杯壁作簡諧運動，產生沿杯壁繞行之橫波，我們聽見聲音是此杯壁振動造成之波動產生駐波的結果，杯壁的振動的前三個模式如圖 3 所示。若 r 為杯之半徑， l 為駐波波長，則 $2\pi r = nl$ 。

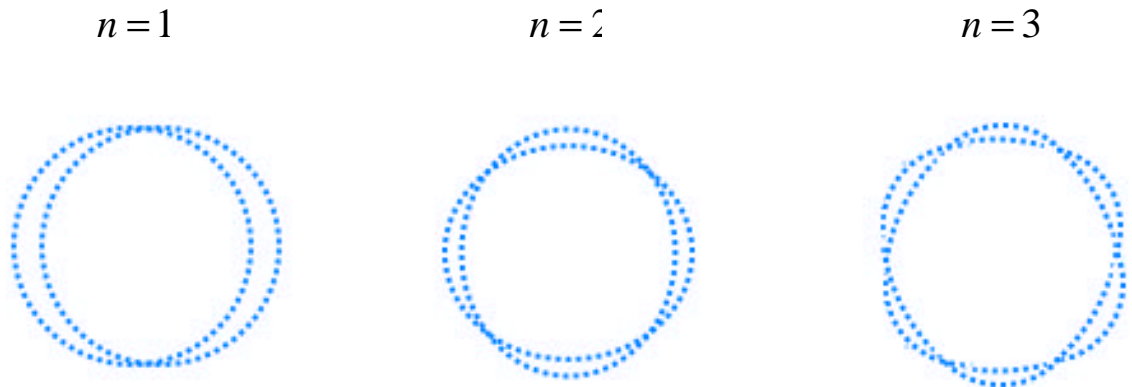


圖 3

因杯壁的振動是 S.H.M. 若杯壁質量為 M ，空杯時杯被敲後之頻率為 f_0 ，則

$$\frac{1}{f_0} = 2\pi \sqrt{\frac{M}{K}} \quad \text{----- (1)}$$

杯內有水時被敲後頻率為 f_1 ，有效層造成之有效質量為 ΔM ，(有效質量之觀念由實驗得知)

$$\frac{1}{f_1} = 2\pi \sqrt{\frac{M + \Delta M}{K}} \quad \text{----- (2)}$$

$$\frac{(2)^2}{(1)^2} \quad \text{得} \left(\frac{f_0}{f_1} \right)^2 = \frac{M + \Delta M}{M} = 1 + \frac{\Delta M}{M}$$

五、實驗過程：

3. 以木槌敲擊裝有不同高度液體之直筒高腳杯，以圖 1 之裝置測其頻率。再以溼手指摩擦裝有不同高度液體之高腳杯測其頻率。
4. 杯中裝入同一高度不同密度液體，測量敲杯時杯發出之頻率。
5. 杯中裝一點水後置入一空玻璃管，玻璃管中置入不同數量之錢幣如圖 5 所示，測量摩擦杯時杯發出之頻率。

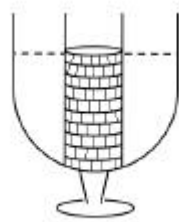


圖 4

6. 將空杯置於水中，按住杯底，在水達到杯壁之處做一記號，敲杯測其頻率。再測杯內裝水至記號處時，杯所發出之頻率。再測同一高度內外皆有水時杯所發出之頻率，比較之。
7. 敲擊不同口徑之玻璃杯、高腳杯、燒杯、馬克杯測量其被敲後之振動之頻率。
8. 將蓖麻油與胡麻油分別裝於高腳杯以微波爐慢慢加熱至 100°C 左右，每隔一段時間量其振動之頻率。

六、研究結果

1. 摩擦杯緣所得頻率與用木槌敲擊杯壁所得基音頻率相同，但音色不同。我們可以藉頻譜瞭解它。圖 5 所示是摩後之頻譜；圖 6 所示是敲後之頻譜。我們可以看出它們的基音都相同，但用摩的 exciting mode 較激發不出，用敲的有些 exciting mode 的強度甚至超過基音的強度，造成無法知道敲後之基音頻率之困擾(如圖 7)。解決之道就是輕敲或改用摩的。



最大強度為 1231.3 Hz

圖 5



最大強度為 1233.6 Hz

圖 6



最大強度為 3814 Hz

圖 7

2. 若杯中液體高度不變，改變中央所置玻璃管內之錢幣數量，所得頻率皆相同。
3. 設定同一水位之水，杯內裝水時頻率為 f_2 有效質量 Δm_2 ，杯內是空的只有杯外有水時頻率為 f_1 有效質量 Δm_1 ，而內外管有等高的水時頻率為 f_3 有效質量 Δm_3 ，空杯時頻率為 f_0 ，其關係如表一所示。比較 Δm_3 與 $\Delta m_1 + \Delta m_2$ 是十分接近的，所以有效質量之觀念應是正確的。

	1 號杯	2 號杯	3 號杯	3 號杯更高水位
f_0 (Hz)	1020.5	1280	949	949.0
f_1 (Hz)	930.1	928	816	741.4
f_2 (Hz)	918.0	857	796	704.1
f_3 (Hz)	836.1	692	715	620.5
$\Delta m_1 / m$	0.203	0.902	0.339	0.638

$\Delta m_2 / m$	0.237	1.232	0.418	0.817
$\Delta m_3 / m$	0.477	2.420	0.756	1.338
$(\Delta m_1 + \Delta m_2) / m$	0.440	2.134	0.757	1.455

表一

4.直筒高腳杯深度 $H=11.74\text{cm}$, 杯壁厚 2.4mm , 密度 2.23g/cm^3 (PYREX 玻璃), 敲擊空杯時發出之頻率為 $f_0=1033\text{Hz}$, 裝不同高度之水, 所得之頻率及有效層平均厚度 $t_{\text{有效}}$ 如表二所示。有效層平均厚度隨著頻率之增加而變厚。

h (cm)	$\log \frac{h}{H}$ (cm)	$\left(\frac{h}{H}\right)^3$	$\left(\frac{f_0}{f}\right)^2$	$\log\left(\frac{f_0^2}{f^2}-1\right)$	$t_{\text{有效}}$ (cm)
1.28	-0.962	0.0013	1.009	-2.046	0.044
2.28	-0.712	0.0073	1.013	-1.886	0.036
3.28	-0.554	0.0217	1.028	-1.553	0.054
4.03	-0.465	0.1179	1.0567	-1.246	0.088
5.14	-0.316	0.1917	1.1317	-0.880	0.161
6.14	-0.281	0.2735	1.2428	-0.615	0.248

表二

由表二繪 $\log(\frac{f_0^2}{f^2}-1)$ 對 $\log \frac{h}{H}$ 之關係圖如圖 8

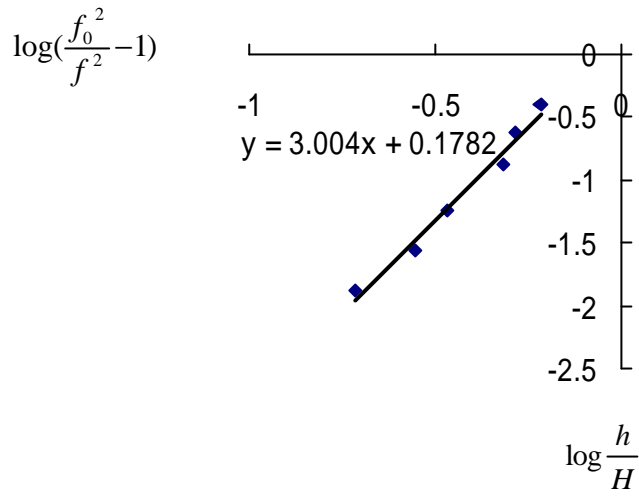


圖 8

由表二繪 $\frac{f_0^2}{f^2}-1$ 對 $\frac{h^3}{H^3}$ 之關係圖如圖 9

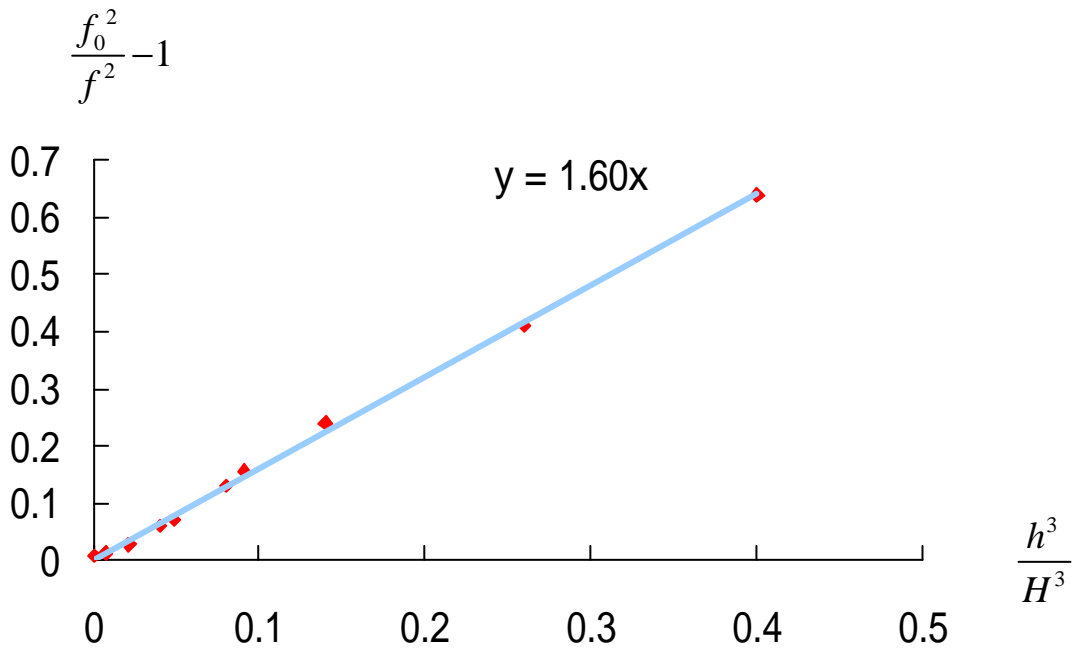


圖 9

5.不同密度之液體在一高度下所得之頻率如（表三）所示(密度越大頻率越低)：

	密度 r_ℓ (g/cm^3)	$(\frac{f_0}{f_1})^2$ (1 號杯液面高 5.8cm)	$(\frac{f_0}{f_1})^2$ (1 號杯液面高 3.74cm)	$(\frac{f_0}{f_1})^2$ (2 號杯液面高 7.3cm)
酒精	0.800	1.075	1.598	1.334
蓖麻油	0.958	1.092	1.749	1.392
水	1.000	1.096	1.790	1.416
醋酸	1.049	1.103	1.858	1.435
食鹽水	1.180	1.134	1.938	1.503

表三

得 $\frac{f_0^2}{f^2} - 1$ 對密度 r_ℓ 之關係圖如圖 10、圖 11

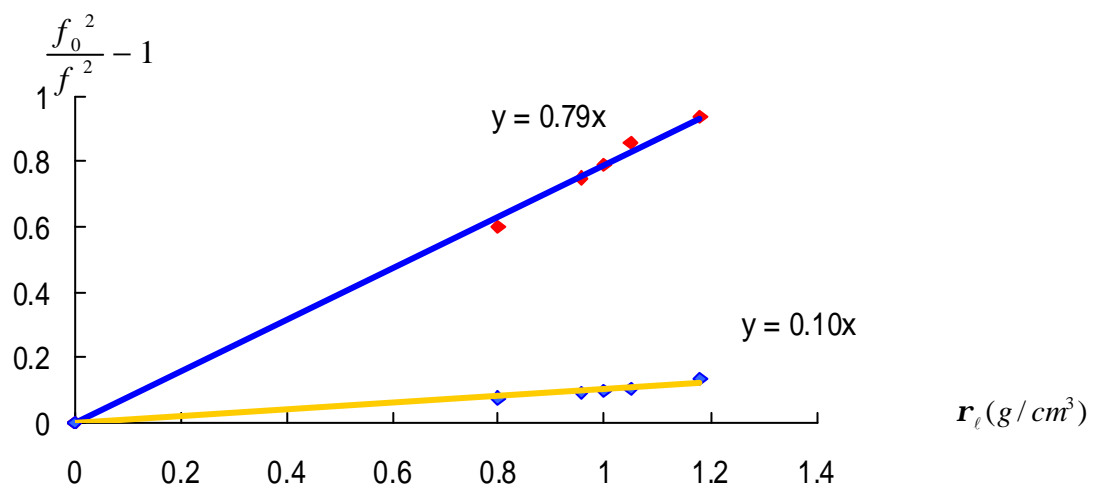


圖 10 : 1 號杯 $\frac{f_0^2}{f^2} - 1$ 對密度 r_ℓ 之關係圖

$$\frac{f_0^2}{f^2} - 1$$

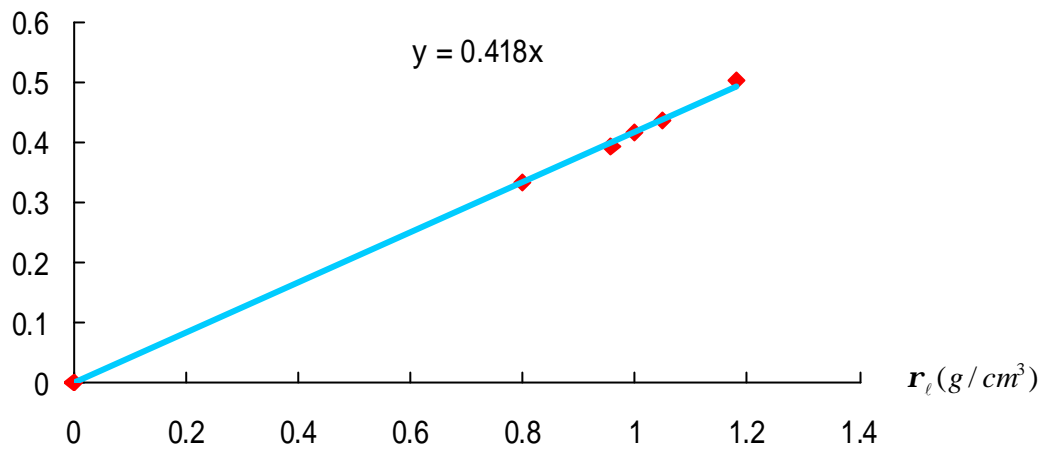


圖 11：2 號杯 $\frac{f_0^2}{f^2} - 1$ 對密度 r_l 之關係圖

6.以圓柱體置於杯中央之實驗結果如表四所示，敲擊空杯時發出之頻率為 1033Hz， f_1 、 f_2 分別為未放圓柱體與已放圓柱體時之頻率，實驗知圓柱體直徑 D 愈大頻率愈低。

D(cm)	f_1 (Hz)	f_2 (Hz)
2.40	971	965.31
2.99	971	964.10
4.00	971	961.00

表四

7.敲擊玻璃杯、高腳杯、燒杯、馬克杯測量其被敲後之振動之頻率,皆是水位越高，敲擊時發出之頻率越低。

8.敲擊不同口徑之高腳杯，口徑越大者，敲擊時發出之頻率越低，如

表五、表六所示。

外徑 4cm

容積	37.5cc	47.5cc	59cc	62cc	69.5cc
頻率(Hz)	4132	4016	3833	3774	3743

表五

外徑 5cm

容積	71cc	84.5cc	93.5cc	110cc
頻率(Hz)	2684	2571	2515	2473

表六

9. 蓖麻油與胡麻油分別裝於高腳杯以微波爐慢慢加熱至 100°C 左右,當其溫度逐漸下降時, 測量其被敲後之振動之頻率如表七、表八。

胡麻油

時刻	f (Hz)
11:54	1769.0
12:00	1781.0
12:06	1782.5
12:15	1789.0
12:20	1790.0

表七

蓖麻油

時刻	f (Hz)
1:05	798.7
1:43	802.0
2:05	805.4

表八

註:時間越久溫度越低

七、討論：

- 1.認為用空氣柱共鳴的原理不對。A是因為將一空杯置於裝水之水盆中敲擊，與杯內裝同一水位之水敲擊時，頻率非常接近如圖 1 所示。兩種頻率非常接近，似乎告訴我們影響頻率之質量只是靠近杯壁一層有效質量。所以杯內空氣柱長度不是控制音調之關鍵。

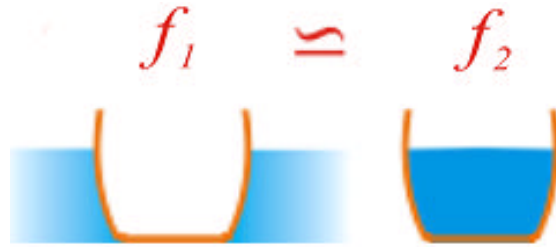


圖 12

- 2.很多人將敲玻璃杯所得之聲音之原理解釋錯誤，在此我們可舉一例。

在科學教育館之網頁中看到一件參加全國科展之作品，他們在實驗動機中寫著“你曾聽敲擊裝有不等量水的玻璃杯所譜出的美妙樂曲嗎？相信大家已經知道那是利用空氣柱高低的不同，進而發出不同音高的聲音”這句話就錯了。而且用共振及比較液體彈性係數的原理也是不對，而他們的實驗結果是糖水溶液密度愈大，敲擊時杯所發出之頻率愈高，也與我們實驗結果相反。從這一篇由錯的原理發展出來的報告，可見大多數人對這有趣的現象是不大瞭解。太多人把“敲”與“吹”玻璃管所得頻率之原理弄混了，因目前學校物理教材大都討論管樂器中空氣柱之共鳴，所以這個現象很多人將其解釋為聲波在杯內空氣柱產生駐波的結果。

3. 當發現只有薄薄一層液體影響頻率時，曾考慮此有效層是黏滯邊界層，邊界層是由黏滯效應所造成接鄰物體表面相對靜止的很薄一層流體。之所以選蓖麻油與胡麻油測試，因蓖麻油與胡麻油黏滯係數因溫度會有很大變化。若溫度變低，黏滯係數變大，黏滯邊界層變厚，頻率應是變低。但如表七、表八所示，溫度變低頻率反而變高，且變化不大，應是熱膨脹效應的結果。故已排除它是黏滯邊界層。

八、結論與應用

1. 敲擊裝有液體玻璃杯時，玻璃杯發出美妙聲音，不是受整杯液體之影響只有杯壁附近一層有效層的液體影響它的頻率。空杯浸在水中時之有效質量與杯內裝水時之有效質量相差不多。（見表一）

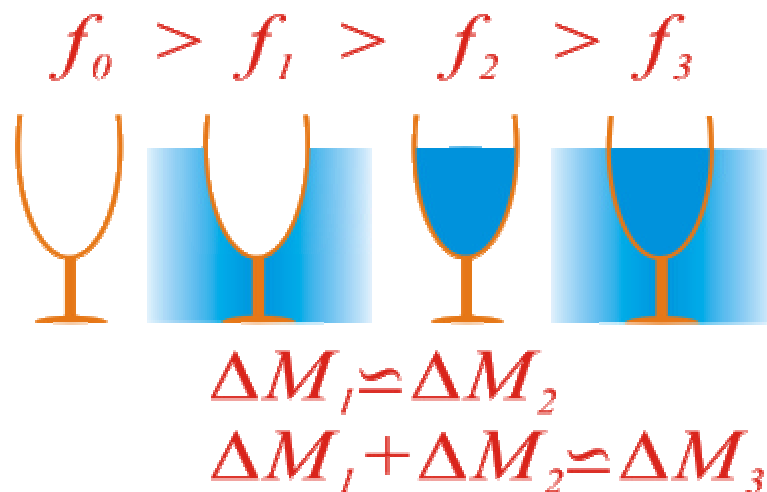


圖 13

2. 敲擊裝有液體之直筒高腳杯時，液體有效層之厚度隨愈液之液面高度 h 變化，若 f_0 表空杯頻率， f 表液面高度 h 時之頻率， r_l 液體之密度， H 為杯壁之高度，則由實驗所得之經驗公式為

$$\left(\frac{f_0}{f}\right)^2 = 1 + Ar_l \frac{h^3}{H^3}$$

這個式子我們可以看出液體高度愈高頻率愈低，密度愈大頻率愈低。

3. 流體的存在會使頻率降低，但不能斷定流體的總量少時頻率一定較低。

表四知，加有圓柱體時頻率變低，僅管當時流體的總量是較少的。以物理的觀點看，是障礙物阻擋流體前進，以致加大流體對杯壁的壓力，而降低其振動。這個觀念也可用來解釋同樣的設定水位高度，杯外有水時頻率較杯內有水時高，僅管當時杯外水的總量是較多的，但流體的運動較沒受到限制。

九、參考文獻

1. Juan G. Roederer, *The Physics and Psychophysics of music*, Third Edition, p. 149, Springer-Verlag, 1994.
2. Charles A. Culver, *Musical Acoustics*, Fourth Edition, pp. 238 and 244, McGraw-Hill Book Company, 1956.
3. N. H. Fletcher and T. D. Rossing, *The Physics of Musical Instruments*, Springer Verlag New York Inc., pp. 577ff, 1991.
4. J. Walker, *The Flying Circus of Physics*, John Wiley & Sons, Inc., pp.6 and 226, 1977.
5. 物理馬戲團 沃克著 葉偉文譯 天下文化書坊
6. 大學物理學 第五版 Sears.Zemansky.Young 著 曹培熙譯
7. 中華民國第四十三屆中小學科學展覽會參展作品專輯 高中組 物理科 流體交響樂台灣科學教育館網站