第四屆旺宏科學獎

創意說明書

參賽編號：SA4－057

作品名稱：對稱函數

姓　　名：李 承 修

關 鍵 字：對稱函數、不等式、數學歸納法

目錄

摘要

所謂的**對稱函數**，就是每個不同的自變數，它們的角色都一樣。

例如：$f(x,y)=x+y$ 或者 $f(x,y)=x\cdot y$ 均爲對稱函數，

但 $f(x,y)=x-y$ 或者 $f(x,y)=x^2\cdot y$ 就不是對稱函數了。

從一篇數學文章中看到作者定義的一個對稱函數：

$f(n)=(a_{m-1}+1)(a_{m-2}+1)\cdots(a_2+1)(a_1+1)(a_0+1)-1$，其中 $n=a_{m-1}a_{m-2}\ldots.a_2a_1a_0$

作者發現此函數具有美妙的規則性，就是將一正整數 n_1 代入 $f(n)$ 得 n_2，n_2 代入 $f(n)$ 得 n_3，一直重複這樣的動作，可得到一收斂值 n_i。對此，他找出五項關於此函數的定理：

一、 $f(n)\le n$ for all n .

二、 f has no cycles of length greater than 1.

（一）m=1

（二）$m\ge 2$ and $a_0=a_1=\ldots=a_{m-2}=9$ (不動點)

三、 f has infinitely many 1-cycles.(無窮多個)

四、 Iteration of f on any n will eventually reach one of the 1-cycles destinations.(並無 L>1 循環點)

五、 There is no positive integer N such that $f(n)<n$ for all $n>N$.

文末，作者提到另外兩個對稱函數：

$$g_k(n)=\prod_{i=0}^{m-1}(a_i+1)-1+k \text{ 與 } p_k(n)=\prod_{i=0}^{m-1}(a_i+k)-k^m$$

雖然只多了個 k，但卻與原函數大不相同，也未有其它研究成果，這引起我們的好奇。

針對此兩類 $g_k(n)$ 和 $p_k(n)$ 對稱函數，初步的理解是：視爲投入自然數的化學藥劑，發現不同的對稱函數會產生不同的效果，有的會固定收斂至一個點(我們稱爲不動點)、有的卻會形成一連串的循環點，相當地耐人尋味。因此，嘗試以此主題作研究，探討對稱函數深刻的性質與現象。

壹、研究動機

函數，它的內涵很吸引人，把這兩型**對稱函數** $g_k(n)$ 及 $p_k(n)$ 當作研究的主題，研究當 k 值不同、產生不同程度的改變，嘗試找出運作的機制及完整的結果，以及它的規則性與共同特性。

貳、研究目的

一、確定 $g_k(n)$ 的遞增點與 k 的關係。

二、尋找 $g_k(n)$ 的不動點與 k 的關係。

三、找出 $g_k(n)$ 循環長度的大小及類型。

四、證明 $g_k(n)$ 爲局部性遞減函數。

五、確定 $p_k(n)$ 的不動點與 k 的關係。
六、找出 $p_k(n)$ 的增減性。
七、找出 $g_k(n)$ 及 $p_k(n)$ 共同特性。

参、研究過程

一、名詞定義與符號

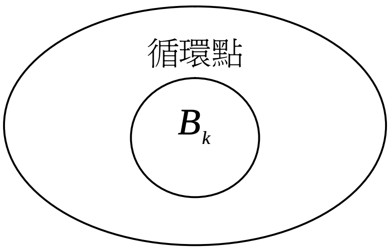
（一）**循環點：**給定 k 值（$k \in N \cup \{0\}$），$\forall n \in$ N ，當 $g_k(n)$ 進行到 $g_k(n_1) = n_2$ ，

$g_k(n_2) = n_3$ ，⋯， $g_k(n_l) = n_1$ 的步驟時，則稱（ $n_1, n_2 \mathbf{L}, n_l$ ）
是 $g_k(n)$ 的一個循環點，並將其視作是環狀排列的，
而（ $n_1, n_2 \mathbf{L}, n_l$ ）與（ $\mathbf{L}, n_l, n_1, n_2, \mathbf{L}$ ）是相同的循環點。

（二）**循環長度：**同上，此時定 $L_k(n) = L$ 爲循環長度 (當 k 不同時，同一個 n，可能會有不同的 L 值)，即這 L 個數形成一個循環。

(三）**不動點：**給定 k 值，若 $L_k(n) = 1$ ，則稱 n 爲 g_k 型的不動點。即 $g_k(n) = n$ 。

定 B_k 爲 $g_k(n)$ 型所有不動點所構成的集合。



＜循環點與不動點的關係＞

（四）**遞增點：**給定 k 值，若 $g_k(n) > n$ ，則稱此 n 爲 $g_k(n)$ 型的遞增點。
定 V_k 爲 $g_k(n)$ 型所有遞增點所構成的集合，$\overline{V_k}$ 爲遞減點的集合。

同樣地，當討論 $p_k(n)$ 時，其循環點的長度、不動點及遞增點也分別用 $l_k(n) = l$ 、B_k 及 V_k 來表示。

舉例說明： $g_1(59) = 60 \Rightarrow g_1(60) = 7 \Rightarrow g_1(7) = 8 \Rightarrow g_1(8) = 9 \Rightarrow g_1(9) = 10 \Rightarrow$
$g_1(10) = 2 \Rightarrow g_1(2) = 3 \Rightarrow g_1(3) = 4 \Rightarrow g_1(4) = 5 \Rightarrow g_1(5) = 6 \Rightarrow$
$g_1(6) = 7 \Rightarrow g_1(7) = 8 \Rightarrow$ 表示(7,8,9,10,2,3,4,5,6)是 g_1 型函數的一個循環點，59 是遞增點，而 $L_1(59) = 9$ 。

又 $g_2(28) = 28 \Rightarrow$ 即 $L_2(28) = 1$，故 28 是 g_2 的一個不動點，即 28∈ B_2 。

而 $g_3(31) = 10 \Rightarrow g_3(10) = 4 \Rightarrow g_3(4) = 7 \Rightarrow g_3(7) = 10 \Rightarrow g_3(10) = 4$
由以上得知： $L_3(31) = 3$ ，而(10,4,7)是 g_3 型函數的一個循環點。

二、 $g_k(n)$ 的研究

$$g_k(n)=\prod_{i=0}^{m-1}(a_i+1)-1+k$$ ，其中 $n=a_{m-1}\times 10^{m-1}+a_{m-2}\times 10^{m-2}+\cdots+a_1\times 10+a_0\times 10^0$

$g_k(n)$ 的運算方式和 $f(n)$ 相似，因 $f(n)=g_0(n)$ ，故從 $g_1(n)$ 的研究出發，再進一步拓展到 $g_k(n)$ 。

（一） $g_1(n)$

1. $g_1(n)$ 的遞增點

大部分 $n\in N$ 會使 $g_1(n)\le n$ (遞減點)，但和原作者所提的 $f(n)$ 不同的地方是：存在一些自然數 n 會使 $g_1(n)>n$ ，即遞增的現象。下列的過程就是利用代數方法找出二位數、三位數、四位數的 V_1 ，然後再推至 m 位數字，並把它寫成＜定理一＞：

【定理一】：當 x 不為個位數時，若 $x\in V_1 \Leftrightarrow x=a_{m-1}99\cdots 9$ 的形式。

＜法一＞**觀察：**

（1）二位數

設 ab 為個位數 b，十位數 a 的二位數字 $a\in\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，
$b\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，則：

$$(a+1)(b+1)-1+1>10a+b \Rightarrow b>9-\frac{1}{a}$$

$\because a\in\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$， $b\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

$\therefore$二位數的 V_1 有 19,29,39,49,59,69,79,89,99；佔 $\frac{9}{90}=\frac{1}{10}$ 。

（2）三位數

設 abc 為個位數 c，十位數 b，百位數 a 的三位數字，$a\in\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，
$b\wedge c\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，則：

$$(a+1)(b+1)(c+1)-1+1>100a+10b+c$$

$$\Rightarrow c>\frac{99a+9b-ab-1}{ab+a+b}$$

$\because a\in\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$， $b\wedge c\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

則當 a = 1 時

$$\Rightarrow c>\frac{98+8b}{1+2b}$$

$\Rightarrow b=1\Rightarrow c>35.33\cdots$

$\Rightarrow b=2\Rightarrow c>22.8$

$\Rightarrow b=3\Rightarrow c>17.42\cdots$

$\Rightarrow b=4 \Rightarrow c>14.4 \cdots$

$\Rightarrow b=5 \Rightarrow c>11.63 \cdots$

$\Rightarrow b=6 \Rightarrow c>11.23 \cdots$

$\Rightarrow b=7 \Rightarrow c>10.26 \cdots$

$\Rightarrow b=8 \Rightarrow c>9.52 \cdots$

$\Rightarrow b=9 \Rightarrow c>8.94 \cdots$

$\therefore$依此類推，三位數的V_1有 199,299,399,499,599,699,799,899,999；佔$\dfrac{9}{900}=\dfrac{1}{100}$。

（3）**四位數**

設 abcd 爲個位數 d，十位數 c，百位數 b，千位數字 a 的四位數字，

$a \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，$b \wedge c \wedge d \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，同樣利用上面的方法寫成 $d > \dfrac{999a+99b+9c-1-abc-ab-bc-ac}{abc+ab+bc+ac+a+b+c}$

則四位數的V_1有 1999,2999,3999,4999,5999,6999,7999,8999,9999；

佔$\dfrac{9}{9000}=\dfrac{1}{1000}$。

（4）**m 位數**

由以上分析我們推廣到 m 位數字。

想法：我們假設一個 m 位數字由a_{m-1}、a_i及（m - 2）個 9 組成，則只需討論

$a_{m-1}a_i 99\cdots 9$ 及 $a_{m-1}99\cdots 9a_i$ 的情況中a_{m-1}與a_i的關係，即可證明

＜定理一＞，其中$g_1(a_{m-1}99\cdots 9a_i)=g_1(a_{m-1}a_i 99\cdots 9)$。

證明：

（Ⅰ）設一個 m 位數字爲$a_{m-1}99\cdots 9a_i=(a_{m-1}\cdot 10^{m-1}+10^{m-1}-1)-9+a_i$，則當它爲$V_1$，會有下面的關係式：

$$g_1(a_{m-1}99\cdots 9a_i)>a_{m-1}99\cdots 9a_i$$

$$\Rightarrow (a_{m-1}+1)(a_i+1)\cdot 10^{m-2} > a_{m-1}\cdot 10^{m-1}+10^{m-1}-10+a_i$$

$$\Rightarrow a_i > \frac{(a_{m-1}+1)(10^{m-1}-10^{m-2})-10}{a_{m-1}\cdot 10^{m-2}+10^{m-2}-1}$$

$$=\frac{9\cdot(a_{m-1}+1)\cdot 10^{m-2}-10}{(a_{m-1}+1)\cdot 10^{m-2}-1}=8+\frac{(a_{m-1}+1)\cdot 10^{m-2}-2}{(a_{m-1}+1)\cdot 10^{m-2}-1}$$

$\because 0<\dfrac{(a_{m-1}+1)\cdot 10^{m-2}-2}{(a_{m-1}+1)\cdot 10^{m-2}-1}<1 \quad \therefore a_i>8.\cdots \quad \therefore a_i=9$

（Ⅱ）設一個 m 位數字爲$a_{m-1}a_i 99\cdots 9 = a_{m-1}\cdot 10^{m-1} + a_i\cdot 10^{m-2} + (10^{m-2}-1)$

，則當它爲V_1，會有下面的關係式：

$$g_1(a_{m-1}a_i 99\cdots 9) > a_{m-1}a_i 99\cdots 9$$

$$\Rightarrow (a_{m-1}+1)(a_i+1)\cdot 10^{m-2} > a_{m-1}\cdot 10^{m-1} + a_i\cdot 10^{m-2} + 10^{m-2}$$

$$\Rightarrow a_i > \frac{9a_{m-1}\cdot 10^{m-2}-1}{a_{m-1}\cdot 10^{m-2}} = 8 + \frac{a_1\cdot 10^{m-2}-1}{a_1\cdot 10^{m-2}}$$

$$\because \frac{a_{m-1}\cdot 10^{m-2}-1}{a_{m-1}\cdot 10^{m-2}} < 1 \qquad \therefore a_i > 8.\cdots \qquad \therefore a_i = 9$$

由（Ⅰ)、(Ⅱ）可知，只要爲此種類型的數字，皆爲V_1，反之亦然。 #

＜法二＞

想法：由＜法一＞的結果觀察，我們企圖將$n-g_1(n)$整理，並企圖讓決定是否遞增的關鍵是首位數字。

觀察：（1）二位數　$n-g_1(n)$

$$= (a_1\cdot 10 + a_0) - (a_1+1)(a_0+1) = a_1[10-(a_0+1)]-1$$

（2）三位數

$$n-g_1(n) = (a_2\cdot 10^2 + a_1\cdot 10 + a_0) - (a_2+1)(a_1+1)(a_0+1)$$

$$= a_2[10^2 - (a_1a_0 + a_1 + a_0 + 1)] + a_1[10-(a_0+1)] - 1$$

$$= a_2[10^2 - (a_1+1)(a_0+1)] + a_1[10-(a_0+1)] - 1$$

（3）m 位數　$n-g_1(n)$

$$= a_{m-1}[10^{m-1} - \prod_{i=0}^{m-2}(a_i+1)] + a_{m-2}[10^{m-2} - \prod_{i=0}^{m-3}(a_i+1)] + \cdots a_1[10-(a_0+1)] - 1$$

證明：$n = a_{m-1}\cdot 10^{m-1} + a_{m-2}\cdot 10^{m-2} + \cdots + a_1\cdot 10 + a_0$（$\forall a_i \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$），

$g_1(n) = \prod_{i=0}^{m-1}(a_i+1)$，則：

$$n-g_1(n) = a_{m-1}[10^{m-1} - \prod_{i=0}^{m-2}(a_i+1)] + a_{m-2}[10^{m-2} - \prod_{i=0}^{m-3}(a_i+1)] + \cdots + a_1[10-(a_0+1)] - 1$$

（Ⅰ）假設a_i爲最大的數字 9（$\forall i = 0,1,2,\cdots,m-2$），即$a_{m-1}99\cdots 9$，$a_{m-1}\in N$

$$n-g_1(n) = -1 < 0$$

$\Rightarrow n < g_1(n)$表爲$a_{m-1}99\cdots 9$的形式$\Rightarrow$爲V_1（必要條件）

（Ⅱ）如果考慮<u>最可能發生遞增</u>的一數，但非上述情形，即某個$a_i = 8$，其它皆爲 9，其中，又$\because g_1(a_{m-1}9\cdots 98_i) = g_1(a_{m-1}9\cdots 89) = \cdots = g_1(a_{m-1}89\cdots 9)$，

故又再考慮當中最可能發生遞增的，因此取 n= $a_{m-1}89\cdots 9$

$\Rightarrow a_{m-2}=8, a_{m-3}=a_{m-4}=\cdots=a_1=a_0=9$

$$n-g_1(n)=a_{m-1}[10^{m-1}-(9\times10^{m-2})]-1=a_{m-1}\times10^{m-2}-1\geq 0$$

$\Rightarrow g_1(n)\leq n$ ，表示 V_1 必為 $a_{m-1}99\cdots9$ 的形式（充分條件）#

小結：隨著位數增加，V_1 的比例會越來越小；當為 m 位數字時，V_1 佔的比例= $\dfrac{1}{10^{m-1}}$ 。

2. $g_1(n)$ 的不動點與循環點

舉個例子來看 $g_1(250)=3\times6\times1-1+1=18 \Rightarrow g_1(18)=2\times9-1+1=18$ ，

在 n = 250 時，$g_1(n)$ 最後會收斂為 18（不動點）。下面則是利用程式做出來的數據，

在 $n=1\sim100$ ，$g_1(n)$ 的循環點與不動點：

g 1(n)=f(n)+1							
n	ℓ(循環數字)	n	ℓ(循環數字)	n	ℓ(循環數字)	n	ℓ(循環數字)
1	9(2.3.4.5.6.7.8.9.10)	26	9(6.7.8.9.10.2.3.4.5)	51	9(6.7.8.9.10.2.3.4.5)	76	9(6.7.8.9.10.2.3.4.5)
2	9(3.4.5.6.7.8.9.10.2)	27	9(6.7.8.9.10.2.3.4.5)	52	1(18)	77	9(6.7.8.9.10.2.3.4.5)
3	9(4.5.6.7.8.9.10.2.3)	28	9(6.7.8.9.10.2.3.4.5)	53	9(6.7.8.9.10.2.3.4.5)	78	9(6.7.8.9.10.2.3.4.5)
4	9(5.6.7.8.9.10.2.3.4)	29	9(4.5.6.7.8.9.10.2.3)	54	9(4.5.6.7.8.9.10.2.3)	79	9(9.10.2.3.4.5.6.7.8)
5	9(6.7.8.9.10.2.3.4.5)	30	9(4.5.6.7.8.9.10.2.3)	55	9(6.7.8.9.10.2.3.4.5)	80	9(9.10.2.3.4.5.6.7.8)
6	9(7.8.9.10.2.3.4.5.6)	31	9(8.9.10.2.3.4.5.6.7)	56	9(6.7.8.9.10.2.3.4.5)	81	1(18)
7	9(8.9.10.2.3.4.5.6.7)	32	9(6.7.8.9.10.2.3.4.5)	57	9(4.5.6.7.8.9.10.2.3)	82	9(6.7.8.9.10.2.3.4.5)
8	9(9.10.2.3.4.5.6.7.8)	33	9(10.2.3.4.5.6.7.8.9)	58	9(4.5.6.7.8.9.10.2.3)	83	9(6.7.8.9.10.2.3.4.5)
9	9(10.2.3.4.5.6.7.8.9)	34	9(3.4.5.6.7.8.9.10.2)	59	9(7.8.9.10.2.3.4.5.6)	84	9(4.5.6.7.8.9.10.2.3)
10	9(2.3.4.5.6.7.8.9.10)	35	9(6.7.8.9.10.2.3.4.5)	60	9(7.8.9.10.2.3.4.5.6)	85	9(4.5.6.7.8.9.10.2.3)
11	9(4.5.6.7.8.9.10.2.3)	36	9(6.7.8.9.10.2.3.4.5)	61	9(10.2.3.4.5.6.7.8.9)	86	9(6.7.8.9.10.2.3.4.5)
12	9(6.7.8.9.10.2.3.4.5)	37	9(6.7.8.9.10.2.3.4.5)	62	9(6.7.8.9.10.2.3.4.5)	87	9(6.7.8.9.10.2.3.4.5)
13	9(8.9.10.2.3.4.5.6.7)	38	9(6.7.8.9.10.2.3.4.5)	63	9(6.7.8.9.10.2.3.4.5)	88	1(18)
14	9(10.2.3.4.5.6.7.8.9)	39	9(5.6.7.8.9.10.2.3.4)	64	9(6.7.8.9.10.2.3.4.5)	89	9(10.2.3.4.5.6.7.8.9)
15	9(6.7.8.9.10.2.3.4.5)	40	9(5.6.7.8.9.10.2.3.4)	65	9(6.7.8.9.10.2.3.4.5)	90	9(10.2.3.4.5.6.7.8.9)
16	9(10.2.3.4.5.6.7.8.9)	41	9(10.2.3.4.5.6.7.8.9)	66	9(6.7.8.9.10.2.3.4.5)	91	9(3.4.5.6.7.8.9.10.2)
17	9(10.2.3.4.5.6.7.8.9)	42	9(6.7.8.9.10.2.3.4.5)	67	9(6.7.8.9.10.2.3.4.5)	92	9(4.5.6.7.8.9.10.2.3)
18	1(18)	43	9(3.4.5.6.7.8.9.10.2)	68	9(6.7.8.9.10.2.3.4.5)	93	9(5.6.7.8.9.10.2.3.4)
19	9(3.4.5.6.7.8.9.10.2)	44	1(18)	69	9(8.9.10.2.3.4.5.6.7)	94	9(6.7.8.9.10.2.3.4.5)
20	9(3.4.5.6.7.8.9.10.2)	45	9(4.5.6.7.8.9.10.2.3)	70	9(8.9.10.2.3.4.5.6.7)	95	9(7.8.9.10.2.3.4.5.6)
21	9(6.7.8.9.10.2.3.4.5)	46	9(6.7.8.9.10.2.3.4.5)	71	9(10.2.3.4.5.6.7.8.9)	96	9(8.9.10.2.3.4.5.6.7)
22	9(9.10.2.3.4.5.6.7.8)	47	9(5.6.7.8.9.10.2.3.4)	72	9(6.7.8.9.10.2.3.4.5)	97	9(9.10.2.3.4.5.6.7.8)
23	9(6.7.8.9.10.2.3.4.5)	48	9(4.5.6.7.8.9.10.2.3)	73	9(6.7.8.9.10.2.3.4.5)	98	9(10.2.3.4.5.6.7.8.9)
24	9(6.7.8.9.10.2.3.4.5)	49	9(6.7.8.9.10.2.3.4.5)	74	9(5.6.7.8.9.10.2.3.4)	99	9(2.3.4.5.6.7.8.9.10)
25	1(18)	50	9(6.7.8.9.10.2.3.4.5)	75	9(4.5.6.7.8.9.10.2.3)	100	9(2.3.4.5.6.7.8.9.10)

我們發現相較於 $f(n)$ ，明顯地 $g_1(n)$ 會產生大量的循環點，因此我們推測 $g_1(n)$ 型的循環長度有兩種類型：$l=1$ （不動點）及 $l=9$ 。

（1）$g_1(n)$ **不動點為** 18。

證明：根據＜定理一＞，除了 $a_{m-1}99\cdots9$ 外，其他數字帶入 $g_1(n)$ 皆呈遞減，如果考慮當中最可能發生**遞減最少**的一數，即採某個 $a_i=8$，其它皆為 9，其中，又$\because$ $g_1(a_{m-1}9\cdots98)=g_1(a_{m-1}9\cdots89)=\cdots=g_1(a_{m-1}89\cdots9)$，故又再考慮當中最可能讓 n 與 $g_1(n)$ 的值**產生最接近的數**，因此取 n= $a_{m-1}89\cdots9$，且我們也可以由＜定理一＞法二的（Ⅱ）得到：

$$n-g_1(n)=a_{m-1}[10^{m-1}-(9\times10^{m-2})]-1=a_{m-1}\times10^{m-2}-1$$

$$\Rightarrow \ni g_1(n)=n \text{ 成立時} \Rightarrow a_{m-1}=\frac{1}{10^{m-2}} \because a_{m-1}\in N$$

$$\therefore \Rightarrow m=2 \Rightarrow n=18$$

再考慮**第二**可能符合條件的數，因此再取

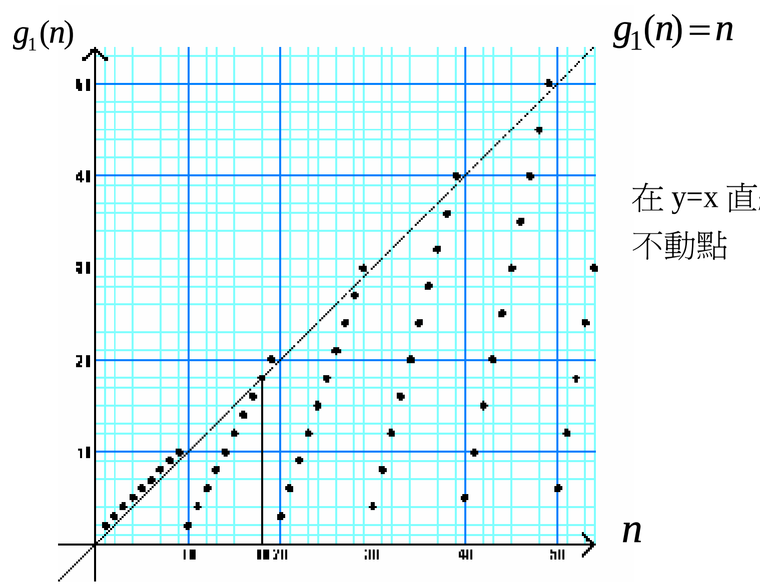
$$n=a_{m-1}79\cdots9 \Rightarrow a_{m-2}=7, a_{m-3}=a_{m-4}=\cdots=a_1=a_0=9$$

$$n-g_1(n)$$

$$=a_{m-1}[10^{m-1}-\prod_{i=0}^{m-2}(a_i+1)]+a_{m-2}[10^{m-2}-\prod_{i=0}^{m-3}(a_i+1)]+\cdots+a_1[10-(a_0+1)]-1$$

$$=a_{m-1}[10^{m-1}-(8\times10^{m-2})]-1=a_{m-1}[2\times10^{m-2}]-1>0$$

表以下都不可能再有不動點了， $\therefore$可知 B_1 的元素必只有 18＃



在 y=x 直線上的點為
不動點

（2）$l=9$ **的循環點為**（2,3,4,5,6,7,8,9,10）。

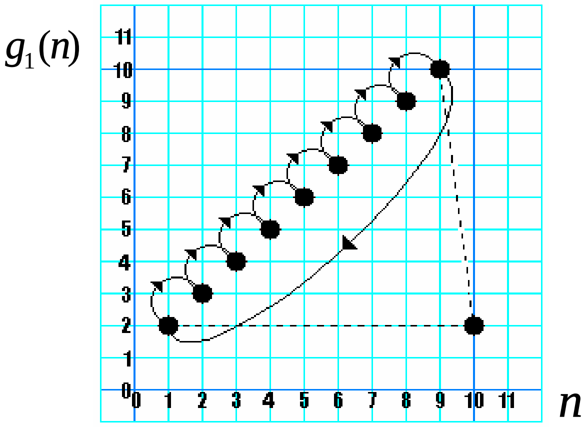
先由二位數著手：我們從數據中循環點的部分，猜想有一正整數 m，當它帶入 $g_k(n)$ 而形成一系列的循環點時，會有這樣的恆等式產生：$\exists m$ 使得 $a+k(m-1)<10 \wedge a+mk=10c+d \wedge (c+1)(d+1)-1+k=a$，則 $l=m+1$，

其中 a 為此循環的首項數字，10c+d 為此循環的末項數字。

證明：將上列的式子聯立可得$\Rightarrow$ $k(m+1)=c(9-d) \wedge d\le k-1$，而 k = 1，c = 1$\Rightarrow m+1=9-d \wedge d=0$，則 m = 8，得循環點(2,3,4,5,6,7,8,9,10)＃

m **位數**：循環點中（$l \geq 2$）最小的數必是遞增點，然而$V_1 = a_{m-1}99\cdots9$及個位數，

經計算後先遞增至$a00\cdots0$，將此數$a00\cdots0$再帶入$g_1(n)$則遞減爲個位數，**最終**還是掉入循環點（2,3,4,5,6,7,8,9,10）中。故知$g_1(n)$循環點必爲18（亦是不動點）與（2,3,4,5,6,7,8,9,10）#



3. $g_1(n)$ 爲遞減函數

當自然數 N 丟入$g_1(n)$之中，大家都變小（遞減），只有1,2,3,4,5,6,7,8,9 及＜定理一＞的V_1會變大（遞增）。過程中有遞減至$\boxed{\text{不動點}}$及**先減再增**或**先增再減**的$\boxed{\text{循環點}}$，但剔除掉這些V_1，發現其餘的正整數會有這樣的關係：

$$\forall n \in \overline{V_1} \ni g_1(n) \leq n \text{ (保留與 } f(n) \text{ 相同的遞減性)}$$

證明：設$n = \sum_{i=0}^{m-1} a_i \cdot 10^i$爲$m$位數字，令$g_1(n) = \prod_{i=0}^{m-1}(a_i + 1)$，$\bar{n} = n - a_{m-1} \cdot 10^{m-1}$

假設$g_1(\bar{n}) \leq \bar{n}$在位數爲 m - 1 時成立，則位數 m 時：

$$g_1(n) = \prod_{i=0}^{m-1}(a_i + 1) = (a_{m-1} + 1)\prod_{i=0}^{m-2}(a_i + 1)$$

$$= (a_{m-1} + 1)[g_1(\bar{n})] \leq (a_{m-1} + 1)(\bar{n})$$

$$= \bar{n} \cdot a_{m-1} + n - a_{m-1} \cdot 10^{m-1} = n + a_{m-1}(\bar{n} - 10^{m-1}) < \text{n}$$

$\therefore \Rightarrow \ g_1(n) \leq n$ （等式成立與B_1有關）

又V_1（$a_{m-1}99\cdots9$及個位數）經計算後（1~2 次）遞增爲$a00\cdots0$時，再次帶入$g_1(n)$則會遞減爲個位數，**最終**還是掉入循環點（2,3,4,5,6,7,8,9,10）中，
所以對$g_1(n)$來說是**不會發散的**，故得證 #

（二）$g_2(n)$

1. $g_2(n)$的遞增點

同樣地，大部分$n \in \mathrm{N}$會使$g_2(n) \le n$，但也$\exists n \ni g_2(n) > n$，與V_1一樣，我們也將$n - g_2(n)$整理。

※註：下列內容不探討n爲個位數之情形，因爲個位數字必成立。

證明： $n = a_{m-1} \cdot 10^{m-1} + a_{m-2} \cdot 10^{m-2} + \mathbf{L} + a_1 \cdot 10 + a_0$（$\forall a_i \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$），

$g_2(n) = \prod_{i=0}^{m-1}(a_i+1)$，則：

$$
\begin{aligned}
& n - g_2(n) \\
&= a_{m-1}[10^{m-1} - \prod_{i=0}^{m-2}(a_i+1)] + a_{m-2}[10^{m-2} - \prod_{i=0}^{m-3}(a_i+1)] + \mathbf{L} + a_1[10-(a_0+1)] - 2
\end{aligned}
$$

（Ⅰ）假設a_i爲最大的數字 9（$\forall i = 0,1,2,\mathbf{L},m-2$），即$a_{m-1}99\mathbf{L}9$

$n - g_2(n) = -2 < 0$

$\Rightarrow g_2(n) > n$，即$a_{m-1}99\mathbf{L}9$的形式爲V_2

（Ⅱ）如果再**考慮最可能發生遞增的一數**，但非上述情形，即某個$a_i = 8$，其它皆爲 9，其中， 因爲$g_2(a_{m-1}9\mathbf{L}98_i) = g_2(a_{m-1}9\mathbf{L}89) = \mathbf{L} = g_2(a_{m-1}89\mathbf{L}9)$，故又再考慮當中最可能發生遞增的，因此取

$n = a_{m-1}89\mathbf{L}9$（$a_{m-1} \in N$）$\Rightarrow a_{m-2} = 8$，$a_{m-3} = a_{m-4} = \mathbf{L} = a_1 = a_0 = 9$

$n - g_2(n) = a_{m-1}[10^{m-1} - (9 \times 10^{m-2})] - 2 = a_{m-1} \times 10^{m-2} - 2$

上式中，存在$a_{m-1} \times 10^{m-2} - 2 < 0$的條件惟有$\boxed{m = 2 \wedge a_{m-1} = 1}$才會成立（即$n = 18$），其他爲此形式的數字皆使$g_2(n) < n$，表示：

$\boxed{V_2\text{必爲}a_{m-1}99\mathbf{L}9\text{與 18 的形式}}$（不探討個位數），反之亦然＃

2. $g_2(n)$的不動點與循環點

成功的經驗使我們推向$g_2(n)$，同樣地，由【數據二】(放在附錄）我們也推測$g_2(n)$循環長度有兩種類型：$l = 1$（不動點）及$l = 4$。

（1）$l=1$ 即 B_2={17,28}

證明：與 $g_1(n)$ 不動點的想法一樣，也考慮其中讓 n 與 $g_2(n)$ 的值**產生最接近的數**，

故亦取 $n=a_{m-1}89\cdots9$ （$a_{m-1}\in N$），相同的我們也可以得到：

$n-g_2(n)=a_{m-1}[10^{m-1}-(9\times10^{m-2})]-2=a_{m-1}\times10^{m-2}-2$

$\Rightarrow \ni g_2(n)-n=0$ 成立時 $\Rightarrow a_{m-1}=\dfrac{2}{10^{m-2}}$ $\because a_{m-1}\in\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

$\therefore\Rightarrow m=2\Rightarrow n=28$

再考慮**第二個**可能發生**最接近**的數，因此再取

$n=a_{m-1}79\cdots9$ ，$a_{m-1}\in N\Rightarrow a_{m-2}=7$ ，$a_{m-3}=a_{m-4}=\cdots=a_1=a_0=9$ ，

則： $n-g_2(n)=a_{m-1}\times[2\times10^{m-2}]-2$

$\Rightarrow \ni g_2(n)=n$ 成立時 $\Rightarrow a_{m-1}=\dfrac{2}{2\times10^{m-2}}$

$\because a_{m-1}\in\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ $\therefore\Rightarrow m=2\Rightarrow n=17$

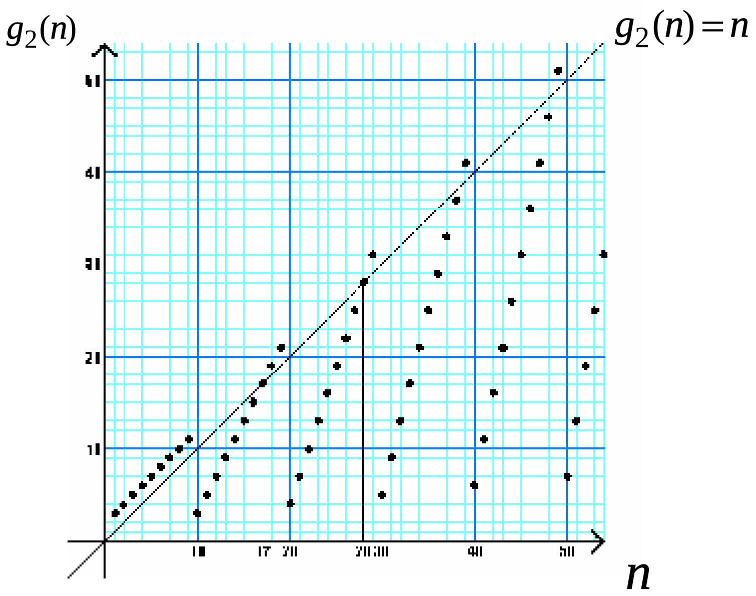
再考慮**第三個**可能的數，因此又取 $n=a_{m-1}69\cdots9$ （$a_{m-1}\in N$）

$\Rightarrow n-g_2(n)=a_{m-1}[10^{m-1}-(7\times10^{m-2})]-2=a_{m-1}\times[3\times10^{m-2}]-2>0$

表以下都不可能再有不動點了，∴可知 B_2 的元素必只有 28、17＃

小結：利用「分段討論」的方式可得 B_k ，而隨 k 值的改變，討論次數可能不同。

在 y=x 直線上的點爲
不動點



（2）$l=4$ **的循環點爲**（5,7,9,11）。

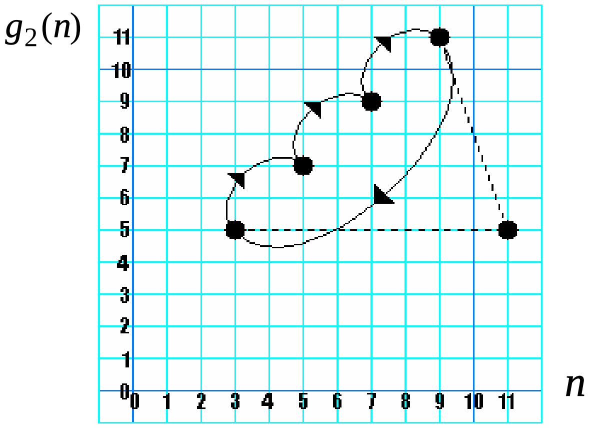
亦先由二位數著手，同樣地，依據之前第七頁的想法

$\Rightarrow k(m+1)=c(9-d)\wedge d\le k-1$ ，而 $l=m+1$ 。

若 k = 2，c = 1 $\Rightarrow 2m+2=9-d\wedge d=1$ 則 m = 3 $\Rightarrow l=4$ ，

因此可得二位數循環點（5,7,9,11）＃

m **位數**：循環點中（$l \geq 2$）最小的數必是遞增點，然而$V_2 = V_1 \cup \{18\}$，經計算後先遞增至$a00\mathbf{L}0$，將此數$a00\mathbf{L}0$再帶入$g_2(n)$則遞減成爲個位數或是 11，**最終**還是掉入循環點（5,7,9,11）中，故知$g_2(n)$循環點必爲 28,17 (亦是不動點)與(5,7,9,11）＃



3. $g_2(n)$爲遞減函數

同$g_1(n)$，剔除掉這些V_2，其餘的正整數也會有這樣的關係：

$$\forall n \in \overline{V_2} \ni g_2(n) \leq n$$

證明：設$n = \sum_{i=0}^{m-1} a_i \cdot 10^i$爲 m 位數字，令$g_2(n) = \prod_{i=0}^{m-1}(a_i + 1) + 1$，

$$\overline{n} = n - a_{m-1} \cdot 10^{m-1}$$

假設$g_2(\overline{n}) \leq \overline{n}$在位數爲 m - 1 時成立，則位數 m 時：

$$g_2(n) = \prod_{i=0}^{m-1}(a_i + 1) - 1 + 2 = (a_{m-1} + 1)\prod_{i=0}^{m-2}(a_i + 1) + 1$$

$$= (a_{m-1} + 1)[g_2(\overline{n}) - 1] + 1 \leq (a_{m-1} + 1)(\overline{n} - 1) + 1$$

$$= \overline{n} \cdot a_{m-1} + n - a_{m-1} \cdot 10^{m-1} - a_{m-1}$$

$$= n + a_{m-1}(\overline{n} - 10^{m-1} - 1) < n$$

$\Rightarrow \ g_2(n) \leq n$ （等式成立與B_2有關）

又$V_2 = V_1 \cup \{18\}$，經計算後遞增爲$a00\mathbf{L}0$時，$a00\mathbf{L}0$再帶入$g_2(n)$則遞減爲個位數或是 11，**最終會**掉入循環點（5,7,9,11）中，故**對**$g_2(n)$**來說是不會發散的**，得證＃

小結：這些遞減的機制，會使得自然數形成【不動點】或者【循環點】。
而至於【遞增點】因爲與 k 值有關：k 值越小，遞增點經過較少次的計算，便能進入【遞減】的行列；相對地，k 值越大，則需經過較多次的運算後，才能進入此行列中。

（三）$g_k(n)$----推廣至一般

1. **不動點的研究**

（1）對於 $g_k(n)$ 的函數而言，一開始我們先針對二位數字來探討，設法找出不動點，設 ab 爲個位數 b，十位數 a 的二位數字，$a \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，$b \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，則

$$g_k(n) = (a+1)(b+1) - 1 + k = 10a + b = n \qquad \Rightarrow a = \frac{k}{9-b}$$

依據上式，我們可以了解 a（十位數字）必爲 k 的正因數，即 a｜k。

接著再把 b（個位數字）當主角則可 $\Rightarrow b = 9 - \frac{k}{a}$，所以只要知道 a 值，b 值亦可運算得出，結果可參看下頁圖表。

例如：$g_8(n)$ 的不動點的十位數字即爲 8 的正因數有 8,4,2,1，個位數字經運算再配對，即得二位數的不動點爲 88,47,25,11 四種。

（2）運用此法，我們從反方向切入，只要給定一正整數 n，我們就可以找到所對應的 k 值，此時 n 即爲所對應到 $g_k(n)$ 函數的不動點。

例如：n = 123，則 $g_k(n) = (1+1)(2+1)(3+1) - 1 + k = 123 \Rightarrow k = 100$

由此可知：$g_{100}(n)$ 這個函數，有一個不動點爲 123。

因此，我們得到下面的定理。

【定理二】：若任給一個 $n \in \mathrm{N} \Rightarrow \exists k \ni g_k(n) = n$ 。

證明：$f(n) = \prod_{i=0}^{m-1}(a_i + 1) - 1$，

已知 $f(n) \le n$（原作者找出的定理）$\Rightarrow n - f(n) \ge 0$

令 $n - f(n) = k$ ，$k \in \mathrm{N} \vee \{0\}$

$$\Rightarrow n = f(n) + k$$
$$\Rightarrow n = g_k(n)$$ 故得證 #

………………………………………………………………………………………………

以下是 $g_1(n) \sim g_{30}(n)$ 的不動點 B_k ：

g(n)的Bk																							
排法:以除首位數字外其餘數字皆相同者爲一直行																							
gk(n)	Bk																						**計算至/個數**
g0(n)=f(n)	1~9	19	29	39	49	59	69	79	89	99				199		299		399	499	599	......	999999	一百萬/(54)
g1(n)		18																					一百萬/(1)
g2(n)		17	28																				一百萬/(2)
g3(n)		16		38																			一百萬/(2)
g4(n)		15	27		48																		一百萬/(3)
g5(n)		14				58																	一百萬/(2)
g6(n)		13	26	37			68																一百萬/(4)
g7(n)		12						78															一百萬/(2)
g8(n)		11	25		47				88														一百萬/(4)
g9(n)		10		36						98													一百萬/(3)
g10(n)			24			57							189										一百萬/(3)
g11(n)																							一百萬/(0)
g12(n)			23	35	46		67																一百萬/(4)
g13(n)																							一百萬/(0)
g14(n)			22					77															一百萬/(2)
g15(n)				34		56																	一百萬/(2)
g16(n)			21		45				87														一百萬/(3)
g17(n)																							一百萬/(0)
g18(n)			20	33			66			97													一百萬/(4)
g19(n)														198									一百萬/(1)
g20(n)					44	55						179			289								一百萬/(4)
g21(n)				32				76															一百萬/(2)
g22(n)																							一百萬/(0)
g23(n)																							一百萬/(0)
g24(n)				31	43		65		86														一百萬/(4)
g25(n)						54																	一百萬/(1)
g26(n)																							一百萬/(0)
g27(n)				30						96			188										一百萬/(3)
g28(n)					42			75															一百萬/(2)
g29(n)																298							一百萬/(1)
g30(n)						53	64				169						389						一百萬/(4)

由＜定理二＞得到下面定理三與定理四的靈感：

＜定義＞ $\mathbf{U}\, B_k$ ：**所有 $g_k(n)$ 型的不動點所構成的集合。**

【定理三】 $\mathbf{U}\, B_k = \mathrm{N}$ （$k \in \mathrm{N} \cup \{0\}$）。

證明： $\forall\, n \in \mathrm{N}$ ，$\exists k$ 使得 $g_k(n) = n$ (根據＜定理二＞)

$\therefore n \in \mathbf{U} B_k$ 即 $n \in \mathrm{N} \Rightarrow n \in \mathbf{U}\, B_k$ $\therefore \mathrm{N} \subset \mathbf{U} B_k$

又 $\mathbf{U}\, B_k \subset \mathrm{N}$ $\therefore \mathbf{U}\, B_k = \mathrm{N}$ 故得證 #

【定理四】：所有不動點 n 皆對應到唯一的 k 值，使得 $g_k(n)=n$

即 $x \in B_{k_1} \wedge x \in B_{k_2} \Rightarrow k_1 = k_2$ 。

證明：利用反證法　設 $g_{k_1}(x) = x = g_{k_2}(x)$（ $k_1 \neq k_2$ ）成立

$\Rightarrow f(x)+k_1 = f(x)+k_2 \quad \Rightarrow k_1 = k_2$ …矛盾　　　故得證＃

【定理五】：任意截取 $g_k(n)$ 循環點，則此段（ $l \geq 2$ ）不可能出現在別的循環點中。

證明：利用反證法　假設 $k_1 = k_2$ ，又 k_1 的某個循環點爲（ $n_1, \mathbf{L}, n_i, n_j, \mathbf{L}$ ）

$\Rightarrow g_{k_1}(n_i) = n_j = g_{k_2}(n_i) \Rightarrow f(n_i)+k_1 = f(n_i)+k_2$

（ $f(n)$ 爲原作者的函數）$\Rightarrow k_1 \neq k_2$ 　…矛盾 $\therefore \Rightarrow g_{k_2}(n_i) \neq n_j$ ＃

2. 遞增點的研究

【定理六】：若 $g_k(x) \geq x$ ，則 $g_{k+n}(x) > x \quad (x \wedge n \in N)$

證明： $g_k(x) = \prod_{i=0}^{m-1}(a_i+1)-1+k$ ，當 $g_k(x) \geq x$ ，

則 $g_{k+n}(x) = \prod_{i=0}^{m-1}(a_i+1)-1+k+n = [\prod_{i=0}^{m-1}(a_i+1)-1+k]+n$

$= g_k(x)+n = x+n \; > x$ 　　故得證＃

※註：即表示若是 B_k 或 V_k 的元素，則必爲 V_{k+n} 的元素（見下圖）。

g(n)的Bk與Vk																									
gk(n)	**Bk**																								**計算至/個數**
g0(n)=f(n)	1~9	19	29	39	49	59	69	79	89	99						199			299		399		499	999999	一百萬/(54)
g1(n)		18																							一百萬/(1)
g2(n)		17	28																						一百萬/(2)
g3(n)		16		38																					一百萬/(2)
g4(n)		15	27		48																				一百萬/(3)
g5(n)		14				58																			一百萬/(2)
g6(n)		13	26	37			68																		一百萬/(4)
g7(n)		12						78																	一百萬/(2)
g8(n)		11	25		47				88																一百萬/(4)
g9(n)		10		36						98															一百萬/(3)
gk(n)	**Vk**																								**計算至/個數**
g0(n)=f(n)																									一百萬/(0)
g1(n)	1~9	19	29	39	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	a99…99	一百萬/(54)
g2(n)	V1	18																							一百萬/(55)
g3(n)	V1	18	17								28														一百萬/(57)
g4(n)	V1	18	17	16							28				38										一百萬/(59)
g5(n)	V1	18	17	16	15						28	27			38			48							一百萬/(62)
g6(n)	V1	18	17	16	15	14					28	27			38			48		58					一百萬/(64)
g7(n)	V1	18	17	16	15	14	13				28	27	26		38	37		48		58	68				一百萬/(69)
g8(n)	V1	18	17	16	15	14	13	12			28	27	26		38	37		48		58	68	78			一百萬/(70)
g9(n)	V1	18	17	16	15	14	13	12	11		28	27	26	25	38	37		48	47	58	68	78	88		一百萬/(74)
g10(n)	V1	18	17	16	15	14	13	12	11	10	28	27	26	25	38	37	36	48	47	58	68	78	88	98	一百萬/(77)

【定理七】：$V_k = \bigcup_{i=0}^{k-1} B_i$

證明：根據＜定理六＞，若$g_k(n) \ge n$，則$g_{k+1}(n) > n \Rightarrow V_k \cup B_k \subset V_{k+1}$

且又若$g_{k+1}(n) > n$，則$g_k(n) \ge n \Rightarrow V_{k+1} \subset V_k \cup B_k$

故$V_{k+1} = V_k \cup B_k$　　而其中$V_1 = B_0$

$\Rightarrow V_1 \cup B_1 = V_2 = B_0 \cup B_1$

$\Rightarrow V_2 \cup B_2 = V_3 = (B_0 \cup B_1) \cup B_2$

$\cdots\cdots\cdots \Rightarrow V_k = \bigcup_{i=0}^{k-1} B_i$ #

由此結果得知，當$k \to \infty$時的V_k會等於$\bigcup B_k$，根據＜定理三＞知$\bigcup B_k = \mathrm{N}$，

則此V_k包含整個正整數系 N，即表示$\lim_{k\to\infty} V_k = \mathrm{N}$。

※註：作者的函數無遞增點的存在，即當$k=0$時，$V_0 = f$。

小結：故$g_k(n)$函數的V_k多寡是與它的 k 值有關，k 值越大，V_k的元素越多。

3. 遞減性的研究

【定理八】：$\forall n \in \overline{V_k} \ni g_k(n) \le n$。

證明：設$n = \sum_{i=0}^{m-1} a_i \cdot 10^i$為 m 位數字，令$g_k(n) = \prod_{i=0}^{m-1}(a_i+1) - 1 + k$，

$\bar{n} = n - a_{m-1} \cdot 10^{m-1}$　　假設$g_k(\bar{n}) \le \bar{n}$在 m - 1 位數時成立，則 m 位數時

$$g_k(n) = \prod_{i=0}^{m-1}(a_{m-1}+1) - 1 + k = (a_{m-1}+1)\prod_{i=0}^{m-2}(a_i+1) - 1 + k$$

$$= (a_{m-1}+1)(g_k(\bar{n}) + 1 - k) - 1 + k$$

$$\le (a_{m-1}+1)(\bar{n} + 1 - k) - 1 + k$$

$$= \bar{n} \cdot a_{m-1} + a_{m-1} - k \cdot a_{m-1} + n - a_{m-1} \cdot 10^{m-1}$$

$$= n + a_{m-1}(\bar{n} + 1 - k - 10^{m-1}) < n \qquad (\because \bar{n} - (10^{m-1} - 1) \le 0)$$

$\therefore \Rightarrow g_k(n) \le n$（等式成立與$B_k$有關）　故得證#

三、 $p_k(n)$的研究

（一）不動點與 k 值的關係

$$p_k(n)=\prod_{i=0}^{m-1}(a_i+k)-k^m$$

$$n=a_{m-1}\times 10^{m-1}+a_{m-2}\times 10^{m-2}+\mathbf{L}+a_1\times 10+a_0\times 10^0$$

對於 $p_k(n)$函數，我們首先探討 k 值在什麼情況下會有不動點，確定討論的範圍。

※註：對於 $p_k(n)$的 B_k 不探討 n 爲個位數之情形，因爲一位數字皆爲不動點。

1. **二位數字**

   設 ab 爲十位數字 a，個位數字 b 的二位數字， $a\in\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，
   $b\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，則
   $p_k(n)=(a+k)(b+k)-k^2=10a+b=n$
   $\Rightarrow ab+b(k-1)=a(10-k)\cdots\cdots$①
   我們發現：左式＝$b(a+k-1)\geq 0$
   $\therefore 10-k\geq 0\Rightarrow\boxed{k\leq 10}$
   由①式可得$k(a+b)=a(10-b)+b\cdots\cdots$
   得知$k\geq 0$令$k=0\Rightarrow 0=a(10-b)+b$，使得右式爲一正整數，左式爲零，產生矛盾，$\Rightarrow\boxed{k\neq 0}$
   因此，我們知道二位數有不動點時 k 的範圍爲$\boxed{1\leq k\leq 10}$。

2. **三位數字**

   設 abc 爲百位數字 a，十位數字 b，個位數字爲 c 的三位數字，
   $a\in\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，$b\wedge c\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，則：

   $(a+k)(b+k)(c+k)-k^3=100a+10b+c$依上法又將此式整理成：

   $\boxed{\text{式一}}\Rightarrow abc+k(ab+bc+ca)+b(k^2-10)+c(k^2-1)=a(100-k^2)$

   $\boxed{\text{式二}}\Rightarrow k(ab+bc+ca)+k^2(a+b+c)=a(100-bc)+10b+c$

   得到了三位數 k 的範圍：$\boxed{1\leq k\leq 10}$，與二位數居然有異曲同工之妙。

3. **四位數字**

   設 abcd 爲千位數字 a，百位數字 b，十位數字爲 c，個位數字爲 d 的四位數字，
   $a\in\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，$b\wedge c\wedge d\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，則：

   $(a+k)(b+k)(c+k)(d+k)-k^4=1000a+100b+10c+d$

$\boxed{式一} \Rightarrow abcd + k(abc + bcd + abd + acd) + k^2(ab + ac + ad + bc + bd + cd)$

$+ b(k^3 - 100) + c(k^3 - 10) + d(k^3 - 1) = a(1000 - k^3)$

$\boxed{式二} \Rightarrow k(abc + bcd + abd + acd) + k^2(ab + ac + ad + bc + bd + cd)$

$+ k^3(a + b + c + d) = a(1000 - bcd) + 100b + 10c + d$

同理，亦得到了一個意料中的答案$\boxed{\Rightarrow 1 \le k \le 10}$。

4. m **位數字**

有了之前的基礎，我們推導至 m 位數：

設一 m 位數為 $a_{m-1}a_{m-2}a_{m-3} \cdots a_1 a_0$ ，我們發現它產生不動點的關鍵在使得：

$\boxed{式一} \Rightarrow a_{m-1}(10^{m-1} - k^{m-1}) \ge 0$ 。

$\because a_{m-1} \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \quad \therefore 10^{m-1} - k^{m-1} \ge 0 \quad \Rightarrow \boxed{k \le 10}$

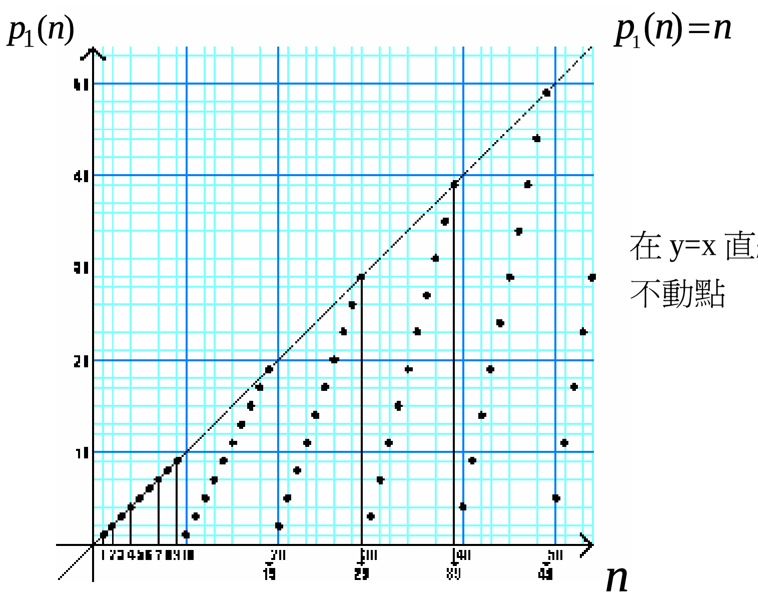
$$\boxed{式二} \Rightarrow k\left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{\prod_{i=0}^{m-1} a_i}{a_k}\right) + k^2\left(\sum_{0 \le k_1 < k_2 \le m-1} \frac{\prod_{i=0}^{m-1} a_i}{a_{k_1} \cdot a_{k_2}}\right) + \cdots + k^{m-1}\left(\sum_{k=0}^{m-1} a_k\right) > 0$$

$\because a_{m-2}, a_{m-3} \cdots a_0 \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \qquad \therefore \boxed{k \ge 1}$

小結：當 $p_k(n)$ 函數產生不動點時，其 k 值的範圍必在 $1 \le k \le 10$ 的情況(**個位數不在討論內**)。

※在得出了 k 的範圍後，我們針對不同的 k 值作討論。

5. p_1 **型**



在 y=x 直線上的點為
不動點

（Ⅰ）三位數

設 abc 為一個以 a 為百位數字，以 b 為十位數字，以 c 為個位數字的三位數 abc，則：

$p_1(n)=(a+1)(b+1)(c+1)-1=100a+10b+c=n$

$\Rightarrow \boxed{a(bc+b+c-99)=9b-bc}$

由於 $b\wedge c\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

由觀察得知

$$\begin{cases} bc+b+c-99\le 0 \\ 9b-bc\ge 0 \end{cases}$$

要使等式成立的條件為 $\boxed{bc+b+c-99=9b-bc=0}$

由 $bc+b+c-99=0$ 可解出 $b=c=9$ ， $a\in\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ #

（Ⅱ）四位數

設 n 為一個以 a 為千位數字，以 b 為百位數字，以 c 為十位數字，以 d 為個位數字的四位數 abcd，則：

$p_1(n)=(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)-1=1000a+100b+10c+d=n$

$\Rightarrow a(bcd+bc+bd+cd+b+c+d-999)=99b+9c-bc-bd-cd-bcd$

由於 $b\wedge c\wedge d\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

由觀察得知

$$\begin{cases} bcd+bc+bd+cd+b+c+d-999\le 0 \\ 99b+9c-bc-bd-cd-bcd\ge 0 \end{cases}$$

要使左右兩式相等的條件為

$\boxed{bcd+bc+bd+cd+b+c+d-999=99b+9c-bc-bd-cd-bcd=0}$

由 $bcd+bc+bd+cd+b+c+d-999=0$ 可解出

$b=c=d=9$ ， $a\in\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ #

（Ⅲ）m 位數

設 n 為一個以 a_{m-1} 為 m 位數字， a_{m-2} 為 m - 1 位數字，……， a_0 為個位數字的 m 位數 $a_{m-1}a_{m-2}\cdots a_0$ ，則定義：

$$a=\prod_{i=0}^{m-2}a_i+\sum_{k=0}^{m-2}\frac{\prod_{i=0}^{m-2}a_i}{a_k}+\sum_{0\le k_1<k_2\le m-2}\frac{\prod_{i=0}^{m-2}a_i}{a_{k_1}\cdot a_{k_2}}+\cdots+\sum_{k=0}^{m-2}a_k$$

$$b=\sum_{k=0}^{m-2}10^k\cdot a_k$$

則依 $p_1(n)=n$ 得到 $\boxed{a_{m-1}(a-10^{m-1}+1)=(b-a)}$

若能證明 $\begin{cases} a-10^{m-1}+1\le 0 \cdots\cdots ① \\ b-a\ge 0 \cdots\cdots ② \end{cases}$

則$\boxed{\text{左右兩式相等的條件爲} a-10^{m-1}+1=b-a=0}$

其中 $a=10^{m-1}-1$爲$a_{\max}$的情況

$\therefore a_{m-2}=a_{m-3}=\cdots=a_0=9$爲唯一解，而$a_{m-1}\in\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$。

以下是我們的證明：

＜法一＞

①$a=\prod_{i=0}^{m-2}a_i+\sum_{k=0}^{m-2}\frac{\prod_{i=0}^{m-2}a_i}{a_k}+\sum_{0\le k_1<k_2\le m-2}\frac{\prod_{i=0}^{m-2}a_i}{a_{k_1}\cdot a_{k_2}}+\cdots+\sum_{k=0}^{m-2}a_k$ 中

$$a\le 9^{m-1}+C_{m-2}^{m-1}\cdot 9^{m-2}+C_{m-3}^{m-1}\cdot 9^{m-3}+\cdots+C_1^{m-1}\cdot 9^1$$

$$=9^{m-1}+C_{m-2}^{m-1}\cdot 9^{m-2}+C_{m-3}^{m-1}\cdot 9^{m-3}+\cdots+C_1^{m-1}\cdot 9^1+\boxed{C_0^{m-1}\cdot 9^0-1}$$

$=10^{m-1}-1$ $\quad\therefore a\le 10^{m-1}-1$ $\quad\Rightarrow\boxed{a-10^{m-1}+1\le 0}$

②**過濾網的想法：**

（Ⅰ）先將a 中含有a_{m-2}的項集合在一起。

（Ⅱ）再將剩餘中含有a_{m-3}的項集合在一起

（Ⅲ）依次過濾之。

我們將a 拆解成

$a=$[各項中均有 a_{m-2}]+[各項中均有 a_{m-3}]$+\cdots\cdots+a_0$

提出共同項後得：

$$a=a_{m-2}\left(\prod_{i=0}^{m-3}a_i+\sum_{k=0}^{m-3}\frac{\prod_{i=0}^{m-3}a_i}{a_k}+\cdots+\sum_{k=0}^{m-3}a_k+1\right)$$

$$+a_{m-3}\left(\prod_{i=0}^{m-4}a_i+\sum_{k=0}^{m-4}\frac{\prod_{i=0}^{m-4}a_i}{a_k}+\cdots+\sum_{k=0}^{m-4}a_k+1\right)$$

$$+a_{m-4}\left(\prod_{i=0}^{m-5}a_i+\sum_{k=0}^{m-5}\frac{\prod_{i=0}^{m-5}a_i}{a_k}+\cdots+\sum_{k=0}^{m-5}a_k+1\right)$$

…

…

$+a_0$

括弧中以二項式定理求出最大值：

$$a \le a_{m-2}(9^{m-2} + C_{m-3}^{m-2} \cdot 9^{m-3} + C_{m-4}^{m-2} \cdot 9^{m-4} + \cdots + C_0^{m-2} \cdot 9^0)$$

$$+ a_{m-3}(9^{m-3} + C_{m-4}^{m-3} \cdot 9^{m-4} + C_{m-5}^{m-3} \cdot 9^{m-5} + \cdots + C_0^{m-3} \cdot 9^0)$$

$$+ a_{m-4}(9^{m-4} + C_{m-5}^{m-4} \cdot 9^{m-5} + C_{m-6}^{m-4} \cdot 9^{m-6} + \cdots + C_0^{m-4} \cdot 9^0)$$

$$\cdots$$

$$+ a_0$$

$$a \le a_{m-2} \cdot 10^{m-2} + a_{m-3} \cdot 10^{m-3} + a_{m-4} \cdot 10^{m-4} + \cdots + a_0$$

$$\Rightarrow a \le \sum_{k=0}^{m-2} a_k \cdot 10^k \quad \Rightarrow a \le b \quad \Rightarrow \boxed{b - a \ge 0}$$

由於這種寫法a過於冗長，因此我們嘗試找出更簡潔的寫法。

＜法二＞

定義：$a = \prod_{i=0}^{m-2}(a_i + 1) - 1$ 及 $b = \sum_{k=0}^{m-2} 10^k \cdot a_k$

①$a - 10^{m-1} + 1 \le 0 \Rightarrow \prod_{i=0}^{m-2}(a_i + 1) - 10^{m-1} \le 0$

$$\because a_{m-2}, a_{m-3} \ldots a_0 \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \qquad \therefore 1 \le \prod_{i=0}^{m-2}(a_i + 1) \le 10^{m-1}$$

$$\therefore \prod_{i=0}^{m-2}(a_i + 1) - 10^{m-1} \le 0 \qquad \Rightarrow \boxed{a - 10^{m-1} + 1 \le 0}$$

②一樣用過濾網的想法，我們將a拆解成：

$a =$[各項中均有 a_{m-2}] + [各項中均有 a_{m-3}]$+\cdots\cdots+a_0$

依次提出共同項得：

$$a = a_{m-2}\prod_{i=0}^{m-3}(a_i + 1) + \prod_{i=0}^{m-3}(a_i + 1) - 1$$

$$= a_{m-2}\prod_{i=0}^{m-3}(a_i + 1) + a_{m-3}\prod_{i=0}^{m-4}(a_i + 1) + \prod_{i=0}^{m-4}(a_i + 1) - 1$$

$$= a_{m-2}\prod_{i=0}^{m-3}(a_i + 1) + a_{m-3}\prod_{i=0}^{m-4}(a_i + 1) + a_{m-4}\prod_{i=0}^{m-5}(a_i + 1) + \prod_{i=0}^{m-5}(a_i + 1) - 1$$

$$= a_{m-2}\prod_{i=0}^{m-3}(a_i+1) + a_{m-3}\prod_{i=0}^{m-4}(a_i+1) + a_{m-4}\prod_{i=0}^{m-5}(a_i+1) + \cdots\cdots\cdots + a_0$$

$$\because \prod_{i=0}^{m-s}(a_i+1) \le 10^{m-s+1} \Rightarrow a \le a_{m-2}\cdot 10^{m-2} + a_{m-3}\cdot 10^{m-3} + a_{m-4}\cdot 10^{m-4} + \cdots + a_0$$

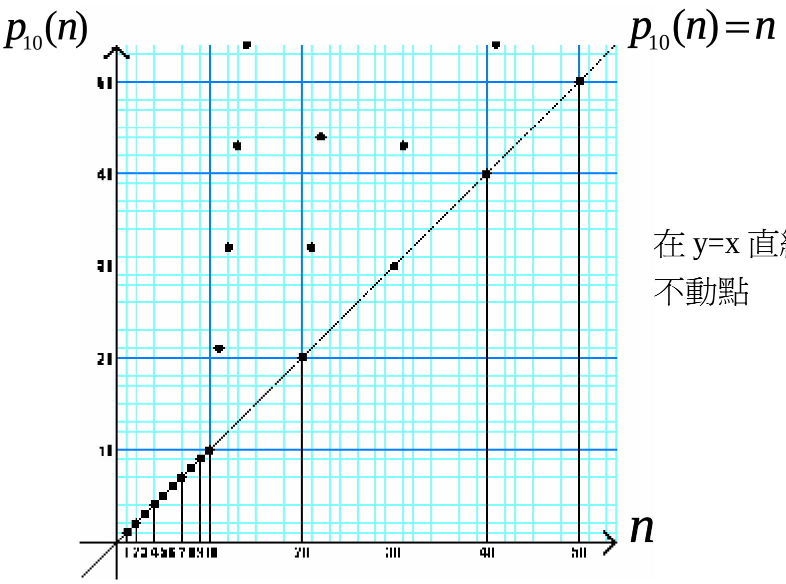
$$\Rightarrow a \le \sum_{k=0}^{m-2} a_k \cdot 10^k \quad \Rightarrow a \le b \quad \Rightarrow \boxed{b-a\ge 0}$$

∴當 k = 1 時的 m 位數字，不動點為 $a_{m-1}99\cdots 9$ 及個位數，其中

$a_{m-1}\in\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，恰與 V_1 的集合相同，亦佔的比例 $=\dfrac{1}{10^{m-1}}$ 。

※註：事實上 $p_1(n)=f(n)=g_0(n)$ ，我們得到與原作者不同的證明途徑。

6. p_{10} 型



在 y=x 直線上的點為不動點

（Ⅰ）三位數

設 n 為一個以 a 為百位數字，b 為十位數字，c 為個位數字的三位數 abc，則：

$p_{10}(n)=(a+10)(b+10)(c+10)-1000=100a+10b+c=n$

$\Rightarrow a(bc+10b+10c)=-(10bc+90b+99c)$

由於 $b\wedge c\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ 　由觀察得知

$$\begin{cases} bc+10b+10c\ge 0 \\ -(10bc+90b+99c)\le 0 \end{cases}$$

要使左右兩式相等的條件為 $\boxed{bc+10b+10c=-(10bc+90b+99c)=0}$

即知 $b=c=0$ ， $a\in\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

（Ⅱ）四位數

設 n 爲一個以 a 爲千位數字，b 爲百位數字，c 爲十位數字，d 爲個位數字的四位數 abcd，則：

$p_{10}(n)=(a+10)(b+10)(c+10)(d+10)-10000=1000a+100b+10c+d=n$

$\Rightarrow a(bcd+10bc+10bd+10cd+100b+100c+100d)$

$\quad =-(900b+990c+999d+100bc+100bd+100cd+10bcd)$

由於 $b \wedge c \wedge d \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

由觀察得知

$$\begin{cases} bcd+10bc+10bd+10cd+100b+100c+100d \geq 0 \\ -(900b+990c+999d+100bc+100bd+100cd+10bcd) \leq 0 \end{cases}$$

要使左右兩式相等的條件爲

$bcd+10bc+10bd+10cd+100b+100c+100d=0$

$=-(900b+990c+999d+100bc+100bd+100cd+10bcd)$

由 $bcd+10bc+10bd+10cd+100b+100c+100d=0$ 可解出 $\boxed{b=c=d=0}$，

$a \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ #

……………………………………………………………………………………………………

（Ⅲ）m 位數

設 n 爲一個以 a_{m-1} 爲 m 位數字，a_{m-2} 爲 m - 1 位數字，……，a_0 爲個位數字的 m 位數 $a_{m-1}a_{m-2}\ldots a_0$，則定義：

$$g=\prod_{i=0}^{m-2}(a_i+10)-10^{m-1} \quad 及 \quad b=\sum_{k=0}^{m-2}a_k\cdot 10^k$$

同 $p_1(n)$ 的分析，若 $p_{10}(n)=n$

$\Rightarrow a_{m-1}(g)=(b-10g)$

我們希望得到以下結果

$$\begin{cases} g\geq 0 \cdots\cdots ① \\ b-10g\leq 0 \cdots\cdots ② \end{cases}$$

則 $a_{m-1}(g)=(b-10g)$ 左右兩式相等的條件爲 $g=b-10g=0$

$\because g=0$ 爲 $g_{\min}$

$\therefore a_{m-2}=a_{m-3}=\ldots=a_0=0$ 爲唯一解

又 $\because a_{m-1}$ 不在 g 中 $\quad \therefore a_{m-1}\in\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

以下是$\boxed{\text{我們的證明}}$：

①首先，用過濾網的想法將 g 展開

$$g=a_{m-2}\prod_{i=0}^{m-3}(a_i+10)+10\prod_{i=0}^{m-3}(a_i+10)-10^{m-1}$$

$$=a_{m-2}\prod_{i=0}^{m-3}(a_i+10)+10a_{m-3}\prod_{i=0}^{m-4}(a_i+10)+10^2\prod_{i=0}^{m-4}(a_i+10)-10^{m-1}$$

$$= a_{m-2}\prod_{i=0}^{m-3}(a_i+10)+10a_{m-3}\prod_{i=0}^{m-4}(a_i+10)+10^2 a_{m-4}\prod_{i=0}^{m-5}(a_i+10)+....+10^{m-2}a_0$$

由於 $a_{m-2}, a_{m-3}, \mathbf{L}, a_0 \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

又 g 的展開式中無負項

$\therefore \boxed{g \geq 0}$

②我們知道 g 展開式的另一種型態爲

$$g = \prod_{i=0}^{m-2} a_i + 10\cdot\sum_{k=0}^{m-2}\frac{\prod_{i=0}^{m-2} a_i}{a_k} + 10^2\cdot\sum_{0\le k_1<k_2\le m-2}\frac{\prod_{i=0}^{m-2} a_i}{a_{k_1}\cdot a_{k_2}} + \mathbf{L} + 10^{m-2}\sum_{k=0}^{m-2} a_k$$

由於 $b = \sum_{k=0}^{m-2} a_k \cdot 10^k$

而 g 展開式最後一項爲 $10^{m-2}\cdot\sum_{k=0}^{m-2} a_k$

$\because a_{m-2}, a_{m-3}, \mathbf{L}, a_0 \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

$\therefore 10^{m-2}\cdot\sum_{k=0}^{m-2} a_k \geq \sum_{k=0}^{m-2} a_k \cdot 10^k = b$

$\Rightarrow g \geq b$

$\Rightarrow 10g \geq b$ $\quad \Rightarrow \boxed{b - 10g \leq 0}$

所以當 k = 10 時，$p_{10}(n)$的不動點爲 $a_{m-1}00\mathbf{L}0$ 及個位數，其中

$a_{m-1} \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$的形態 #

7. 小結

與 $p_1(n)$ 、 $p_{10}(n)$ 相較之下， $p_2(n) \sim p_9(n)$ 較缺乏規律性，所以基本上依然用代數法求取其不動點。

設 n 爲個位數 b，十位數 a 的二位數字 ab， $a \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，$b \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，

則 $\quad p_k(n) = n \Rightarrow (a+k)(b+k) - k^2 = 10a + b \Rightarrow a = \dfrac{b-bk}{b+k-10}$

得到的結果請參考【數據十】，例如：k=2，$a = \dfrac{b}{8-b}$，得 ab={14,36,77}∈ B_2 。

（二）$p_k(n)$的增減性

【定理九】：當 $k \geq 11$，則 $\forall n \in \mathrm{N}$， $p_k(n) \geq n$（遞增函數）。

證明：令 $n = \sum_{k=0}^{m-1} 10^k \cdot a_k$

$$p_k(n)=[a_{m-1}+k]\cdot[a_{m-2}+k]\ldots[a_0+k]-k^m\geq[a_{m-1}+a_{m-2}+\ldots a_0]\cdot k^{m-1}$$

$$\because[a_{m-1}+a_{m-2}+\ldots a_0]\cdot k^{m-1}-n$$

$$=[a_{m-1}+a_{m-2}+\ldots a_0]\cdot k^{m-1}-(a_{m-1}\cdot 10^{m-1}+a_{m-2}\cdot 10^{m-2}+\ldots a_0)$$

$$=a_{m-1}\cdot(k^{m-1}-10^{m-1})+a_{m-2}(k^{m-1}-10^{m-2})+\ldots+a_0(k^{m-1}-1)\geq 0$$

當 $k\geq 11\Rightarrow p_k(n)\geq n$（**個位數為其等式成立的條件**），故得證 #

【定理十】：當 $k=0$ ，則 $\forall n\in \mathrm{N}$ ， $p_0(n)\leq n$ 。(遞減函數)

證明： $p_0(n)=a_{m-1}\cdot a_{m-2}\cdot\ldots a_0$

$a_{m-1}\cdot a_{m-2}\cdot\ldots a_0<(a_{m-1}+1)\cdot(a_{m-2}+1)\cdot\ldots(a_0+1)$

$\Rightarrow p_0(n)<f(n)+1$

$\Rightarrow p_0(n)\leq f(n)\qquad\Rightarrow p_0(n)\leq f(n)\leq n$

當 $k=0\Rightarrow p_0(n)\leq n$（**個位數為其等式成立的條件**），故得證 #

小結：由上述兩定理可知：

1.當 $k\geq 11$ 時， $p_k(n)$ 有下列性質：

（1）遞增點：除了個位數外，其餘皆是。

（2）不動點：即個位數。

（3）循環點：只有不動點。

（4）剔除個位數，則其餘皆為**嚴格遞增**函數。

2.當 $k=0$ 時， $p_k(n)$ 有下列性質：

（1）遞增點：沒有。

（2）不動點：即個位數。

（3）循環點：只有不動點。

（4）剔除個位數，則其餘皆為**嚴格遞減**函數。

四、 $g_k(n)$ 及 $p_k(n)$ 共同特性

（一）共線性

過程中我們發現了一個有趣的現象： $g_k(n)$ 及 $p_k(n)$ 裡，在一個 m 位數字 $a_{m-1}a_{m-2}\ldots a_0$ 中，當 $a_i\,(i=0\sim m-1)$ 項之值為 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 (但如果 $i=m-1$ ，則 $a_{m-1}\neq 0$)，而其餘項皆為定值時，這些數字帶入函數於圖形上會共線。

例： $(300,g_k(300))$、$(301,g_k(301))$、$(302,g_k(302))\ldots(309,g_k(309))$ 10 點共線

$(200,p_k(200))$、$(210,p_k(210))$、$(220,p_k(220))\ldots(290,p_k(290))$ 10 點共線

試分別說明之：

1. $g_k(n)$

將符合題意的 10 個數字代入函數：

① $g_k(n_0)=(a_{m-1}+1)(a_{m-2}+1)\cdots(a_{i+1}+1)(0+1)(a_{i-1}+1)\cdots(a_0+1)-1+k$

② $g_k(n_1)=(a_{m-1}+1)(a_{m-2}+1)\cdots(a_{i+1}+1)(1+1)(a_{i-1}+1)\cdots(a_0+1)-1+k$

…

⑩ $g_k(n_9)=(a_{m-1}+1)(a_{m-2}+1)\cdots(a_{i+1}+1)(9+1)(a_{i-1}+1)\cdots(a_0+1)-1+k$

發現點$\left(n_{s_1},g_k(n_{s_1})\right)$與點$\left(n_{s_2},g_k(n_{s_2})\right)$連線之斜率可為

$$\boxed{\frac{\prod_{t=0}^{m-2}(a_t+1)}{10^{m-1}}}\ \text{or}\ \boxed{\frac{\prod_{t=i+1}^{m-1}(a_t+1)\cdot\prod_{t=0}^{i-1}(a_t+1)}{10^{i}}}\ \text{or}\ \boxed{\frac{\prod_{t=1}^{m-1}(a_t+1)}{10^{0}}}$$ 值皆相同

$\therefore \left(n_0,g_k(n_0)\right)\left(n_1,g_k(n_1)\right)\left(n_2,g_k(n_2)\right)\left(n_3,g_k(n_3)\right)\ldots\left(n_9,g_k(n_9)\right)$10 點共線

2. $p_k(n)$

將符合題意的 10 個數字代入函數：

① $p_k(n_0)=(a_{m-1}+k)(a_{m-2}+k)\cdots(a_{i+1}+k)(0+k)(a_{i-1}+k)\cdots(a_0+k)-k^m$

② $p_k(n_1)=(a_{m-1}+k)(a_{m-2}+k)\cdots(a_{i+1}+k)(1+k)(a_{i-1}+k)\cdots(a_0+k)-k^m$

…

⑩ $p_k(n_9)=(a_{m-1}+k)(a_{m-2}+k)\cdots(a_{i+1}+k)(9+k)(a_{i-1}+k)\cdots(a_0+k)-k^m$

發現點$\left(n_{s_1},p_k(n_{s_1})\right)$與點$\left(n_{s_2},p_k(n_{s_2})\right)$連線之斜率可為

$$\boxed{\frac{\prod_{t=0}^{m-2}(a_t+k)}{10^{m-1}}}\ \text{or}\ \boxed{\frac{\prod_{t=i+1}^{m-1}(a_t+k)\cdot\prod_{t=0}^{i-1}(a_t+k)}{10^{i}}}\ \text{or}\ \boxed{\frac{\prod_{t=1}^{m-1}(a_t+k)}{10^{0}}}$$ 值皆相同

$\therefore \left(n_0,p_k(n_0)\right)\left(n_1,p_k(n_1)\right)\left(n_2,p_k(n_2)\right)\left(n_3,p_k(n_3)\right)\ldots\left(n_9,p_k(n_9)\right)$10 點共線 #

由於有此性質，我們可以衍生出一種應用問題：

Q：k 為定值，若 $p_k(4179)=30879$、 $p_k(4579)=45855$，求 $p_k(4879)=?$

A：想直接從 $p_k(n)$ 數據求出 k 值幾乎不可能，但我們知道$\left(4179,p_k(4179)\right)$、

$\left(4579,p_k(4579)\right)$、$\left(4879,p_k(4879)\right)$三點共線，因此我們可使用分點公式：

$$30879+(45855-30879)\times\frac{4879-4179}{4579-4179}=57087$$

因此，毋需求出 k 值，亦可得出 $p_k(4879)=57087$ #

（二）公比性（以下以 $p_k(n)$ 作說明）

以共線性作爲基礎，我們也想到公比性的可能：

【三位數的個位數字】

n	$p_3(n)$	
521	133	①
522	173	②
524	253	③
524	413	④

依數據來看，我們似乎是失敗了，但我們把這些數據兩兩相減，發現等比數列果然存在於數據中。

②－①	40
③－②	80
④－③	160

因此我們假設 abc、ab（cr）、ab（cr^2）、ab（cr^3）爲四個以 a 爲百位數字，以 b 爲十位數字，以 c、cr、cr^2、cr^3 爲個位數字的三位數，則：

a. $\Rightarrow\ (a+k)(b+k)(c+k)-k^3$ ……①

b. $\Rightarrow\ (a+k)(b+k)(cr+k)-k^3$ ……②

c. $\Rightarrow\ (a+k)(b+k)(cr^2+k)-k^3$ ……③

d. $\Rightarrow\ (a+k)(b+k)(cr^3+k)-k^3$ ……④

②－① $\Rightarrow\ [(a+k)(b+k)(cr+k)-k^3]-[(a+k)(b+k)(c+k)-k^3]$

$$=c(a+k)(b+k)(r-1)$$

③－② $\Rightarrow\ [(a+k)(b+k)(cr^2+k)-k^3]-[(a+k)(b+k)(cr+k)-k^3]$

$$=cr(a+k)(b+k)(r-1)$$

④－③

$\Rightarrow\ [(a+k)(b+k)(cr^3+k)-k^3]-[(a+k)(b+k)(cr^2+k)-k^3]$

$$=cr^2(a+k)(b+k)(r-1)$$

$\Rightarrow$ ④－③$=r$（③－②）$=r^2$（②－①），公比性即爲所求＃

（三）費氏性

有共線性、公比性，我們更進一步聯想到費波那契數列，因此我們找了一組數據。

【三位數的個位數字】

n	$p_4(n)$	
451	296	①
452	368	②
453	440	③
455	584	④
458	800	⑤

比照公比性，將其值兩兩相減，正是費波那契數列。

②－①	72
③－②	72
④－③	144
⑤－④	216

因此我們假設 abc、abd，ab（c+d）、ab（c+2d）、ab（2c+3d）爲五個以 a 爲百位數字，以 b 爲十位數字，以 c、d、c+d、c+2d、2c+3d 爲個位數字的三位數，則：

a. $\Rightarrow\ (a+k)(b+k)(c+k)-k^3$ ……①

b. $\Rightarrow\ (a+k)(b+k)(d+k)-k^3$ ……②

c. $\Rightarrow\ (a+k)(b+k)(c+d+k)-k^3$ ……③

d. $\Rightarrow\ (a+k)(b+k)(c+2d+k)-k^3$ ……④

e. $\Rightarrow\ (a+k)(b+k)(2c+3d+k)-k^3$ ……⑤

②－① $\Rightarrow [(a+k)(b+k)(d+k)-k^3]-[(a+k)(b+k)(c+k)-k^3]$

$=(a+k)(b+k)(d-c)$ ……⑥

③－② $\Rightarrow [(a+k)(b+k)(c+d+k)-k^3]-[(a+k)(b+k)(d+k)-k^3]$

$=c(a+k)(b+k)$ ……⑦

④－③ $\Rightarrow [(a+k)(b+k)(c+2d+k)-k^3]-[(a+k)(b+k)(c+d+k)-k^3]$

$=d(a+k)(b+k)$ ……⑧

⑤－④

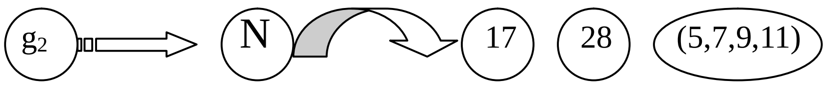
$\Rightarrow [(a+k)(b+k)(2c+3d+k)-k^3]-[(a+k)(b+k)(c+2d+k)-k^3]$

$=(a+k)(b+k)(c+d)$ ……⑨ $\Rightarrow$ ⑥ ＋ ⑦ ＝ ⑧，⑦ ＋ ⑧ ＝ ⑨，費波那契數列＃

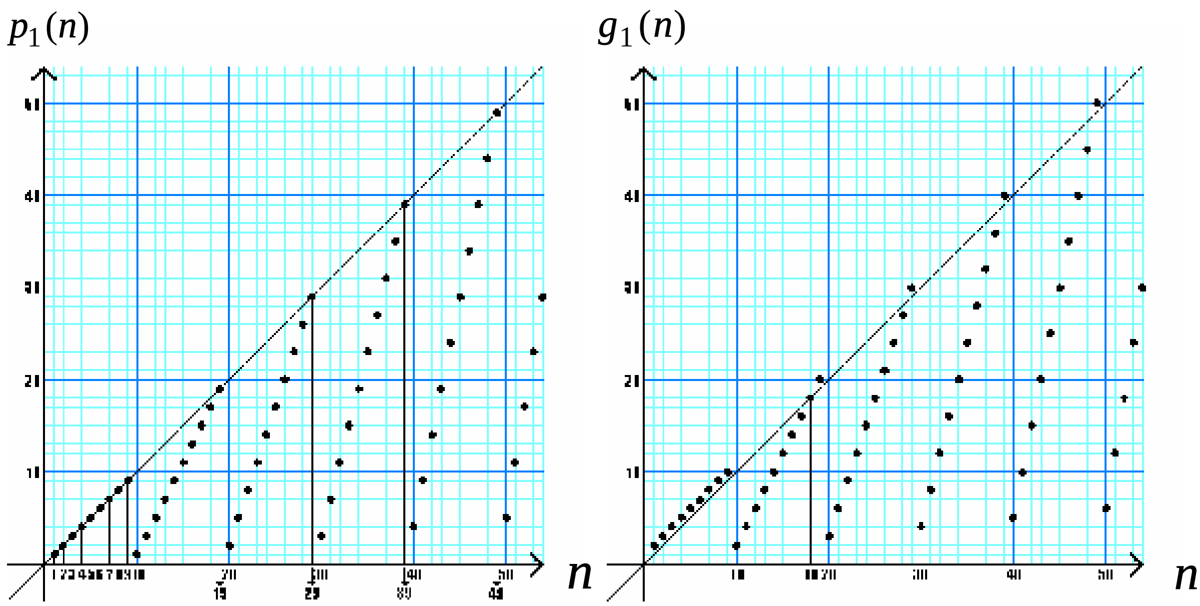
※註： $g_k(n)$ 的過程與 $p_k(n)$ 相同，相減後彼此的常數項皆會消掉，剩下亦是呈現公比性與費氏性的特徵＃

肆、討論及應用

一、當 $g_k(n)$ 對稱函數丟入自然數 N 時，所有自然數會重整。例如 $g_1(n)$ 會使 N 重組成兩個形態：不動點 18 及一個循環點；$g_2(n)$ 會使 N 重組成三種形態：不動點 17 及 28 和一個循環點(5,7,9,11)；$g_3(n)$ 會使 N 重組成三種形態：不動點 16 及二種循環點，像是用整數除以 3 得到三個餘數類子集合(為 0,1,2)。總之，對稱函數會將自然數 N 重整為：不動點與循環點。類似同餘的作用，產生分類的動作。如下圖：



二、 $g_1(n)$ 不動點只有 18 的另一種證明方式：【幾何式】



由圖形看，我們知道 $g_k(n)$ 圖只是將 $p_1(n)$ 上移 k 單位之後的產物，($g_1(n)$ 即是上移 1 個單位）之前證明 $p_1(n)$ 不動點 $\boxed{\text{僅有個位數及 } a_{m\text{-}1}99\cdots9}$ 的形式，故上移 1 個單位後，此形式便為 $g_1(n)$ 的 $\boxed{\text{遞增點}}$ 了，而此時成為 $g_1(n)$ 不動點的便是 $a_{m\text{-}1}99\cdots98$。

※ 註：$a_{m\text{-}1}99\cdots98$ 的首位數字 a_{m-1} 與末位數字 8 必同時存在，所以決定是幾位數字的關鍵是兩者之間共有幾個 9。

因此
$$\begin{cases} g_1(a_{m\text{-}1}99\cdots9) = p_1(a_{m\text{-}1}99\cdots9)+1 = a_{m\text{-}1}99\cdots9+1 & -\ ① \\ g_1(a_{m\text{-}1}99\cdots98) = p_1(a_{m-1}99\cdots8)+1 = a_{m\text{-}1}99\cdots98\ \ (\text{不動點}) & -\ ② \end{cases}$$

$$①-②\Rightarrow g_1(a_{m\text{-}1}99\cdots9)-g_1(a_{m\text{-}1}99\cdots98)$$
$$= p_1(a_{m\text{-}1}99\cdots9)-p_1(a_{m\text{-}1}99\cdots98)=2$$

由此可見當 $p_1(a_{m\text{-}1}99\cdots9)$ 與 $p_1(a_{m\text{-}1}99\cdots98)$ 相差 2 時（必要條件），$a_{m\text{-}1}99\cdots98$ 為 $g_1(n)$ 的不動點（充分條件）。

而 $p_1(a_{m-1}99\mathbf{L}9) - p_1(a_{m-1}99\mathbf{L}98)$

$= (a_{m-1}+1)(9+1)(9+1)\mathbf{L}(9+1) - (a_{m-1}+1)(9+1)(9+1)\mathbf{L}(8+1) = 2$

$\Rightarrow 10^{m-1}(a_{m-1}+1) - 9\cdot 10^{m-2}(a_{m-1}+1) = 2$

$\Rightarrow 10^{m-2}(a_{m-1}+1) = 2$

$\Rightarrow m = 2$ 且 $a_{m-1} = 1$ (唯一解)

可見 n 只能是二位數字，且此數為 18 #

三、嘗試找出 $g_k(n)$ 和 $p_k(n)$ 中與原作者 $f(n)$ 函數五個定理相同的結果，卻發現 k 的出現，使得**循環點成為**新的問題，而在 $g_1(n)$ 及 $g_2(n)$ 的**二位數**中，循環點中若出現「**兩次以上進位成十位數**」的現象，雖有 $(c+1)(d+1)-1+k=a$ 作為工具，但像在 $g_3(n)$ 中，此式便不實用了，研究顯示，十位數的排列順序並無一定規則，也非以等差數列的形式循環，且隨著 k 值增加，相信循環點的變化必更為複雜，故推至 m 位數字便出現了困難，這是未來還可繼續研究的課題。

四、本文內容回答 Morrow 教授所提到的問題，並因為 $f(n) = g_0(n) = p_1(n)$ 同時也發展出一些新的分析工具和研究成果。

五、對於 $p_2(n) \sim p_9(n)$ 的部份，發現它們較無規律性及一般性，研究結果在附錄【數據十】。

六、 $g_k(n)$ 及 $p_k(n)$ 這兩類對稱函數具有共同的特性－**共線性、公比性及費氏性。**

七、對稱函數之後續研究，可考慮將視野放至多項函數、三角函數（周期函數）或其它簡單函數，作為對照與比較。

伍、結論

一、不動點的結論：

(一)定理二：若任給一個 $n \in \mathrm{N} \Rightarrow \exists k \ni g_k(n) = n$ 。表示任何一個自然數 n 必屬於某一個 $g_k(n)$ 的不動點。

(二)定理三：所有 $g_k(n)$ 不動點所構成的集合為全體自然數，即 $\cup B_k = \mathrm{N}$ 。

(三)定理四：所有不動點 n 皆對應到唯一的 k 值，即 $x \in B_{k_1} \wedge x \in B_{k_2} \Rightarrow k_1 = k_2$ 。

(四) $p_k(n)$ 中，在 $1 \le k \le 10$ 存在不動點，$k = 0$ 呈遞減、$k \ge 11$ 呈發散(剔除個位數的情況)。

(五) $p_1(n)$ 的不動點必為 $a_{m-1}99\mathbf{L}9$ 的形式。

(六) $p_{10}(n)$ 的不動點必為 $a_{m-1}00\mathbf{L}0$ 的形式。

二、循環點的結論：

(一)定理五：任意截取 $g_k(n)$ 循環點一段，則此段（$l \geq 2$）不可能出現在別的循環點中。

三、遞增遞減性的結論：

(一)定理一：在 $g_1(n)$ 型中，x 不為個位數時，若 $x \in V_1 \Leftrightarrow x = a_{m-1}99 \ldots 9$ 的形式。

(二)定理六：若 $g_k(x) \geq x$，則 $g_{k+n}(x) > x \quad (x \wedge n \in N)$

(三)定理七：$V_k = \bigcup_{i=0}^{k-1} B_i$。k 決定了集合之間的關係。

(四)定理八：$\forall n \in \overline{V_k} \Rightarrow g_k(n) \leq n$。表示 $g_k(n)$ 必會收斂。

(五)定理九：當 $k \geq 11$，則 $p_k(n) \geq n$（遞增函數）。

(六)定理十：當 $k = 0$，則 $p_0(n) \leq n$（遞減函數）。

(七) $g_k(n)$ 的遞增的數 V_k 集合元素個數會隨著 k 值增大而增加。

並且由定理七可推知：$\lim_{k \to \infty} V_k = N$。

四、表格整理：

k	$g_k(n)$	L 循環長度	V_k	B_k	循環點型態
0	$g_0(n)$	1	空集合	a...99	none
1	$g_1(n)$	1,9	B_0	18	(2,3,4,5,6,7,8,9,10)
2	$g_2(n)$	1,4	$B_0 \cup B_1$	17,28	(5,7,9,11)
3	$g_3(n)$	1,3,5	$B_0 \cup B_1 \cup B_2$	16,38	(4,7,10)及(6,9,12,8,11)
4	$g_4(n)$	1,2	$B_0 \cup B_1 \cup \ldots \cup B_3$	15,27,48	(7,11)
5	$g_5(n)$	1,2,6	$B_0 \cup B_1 \cup \ldots \cup B_4$	14	(19,24)及(6,11,8,13,12,10)

五、在過程中，藉由數學歸納法、二項式定理的數學工具和 V.B.電腦語言協助，探索出有關對稱函數一些深刻的性質。這兩型**對稱函數**每個位數的地位都是相同的！正是此函數的迷人之處，由內層不易觸摸，擴展至可臆測的結局，有天真的期待、浪漫的幻想，渴望地知道其隱含的意義，觸動年少熱情，從生澀到熟練，雖有掙扎、曲折顫抖，但其中的學習、成長與一項定理或問題的解決，那份悸動與興奮著實令人陶醉歡愉！

陸、參考資料

一、D.C.Morrow. Dept. of Mathematics , Washington＆Jafferson College , Washington , PA 15301, The Mathematical Gazette：A digit function with many 1-cycles, March 2002,Vol. 86, No. 505(P 105 ~ P 109)。

二、林福來、李恭晴、徐正梅、陳冒海、陳順宇著，高中數學第一冊，南一書局。

附錄

【數據二】

$g_2(n)$的循環長度有 1 和 4

g(n)=f(n)+2							
1	4(5.7.9.11)	26	4(5.7.9.11)	51	4(9.11.5.7)	76	4(9.11.5.7)
2	4(5.7.9.11)	27	4(7.9.11.5)	52	4(7.9.11.5)	77	4(7.9.11.5)
3	4(5.7.9.11)	28	1(28)	53	4(7.9.11.5)	78	1(17)
4	4(5.7.9.11)	29	4(9.11.5.7)	54	4(9.11.5.7)	79	4(7.9.11.5)
5	4(7.9.11.5)	30	4(5.7.9.11)	55	1(17)	80	4(5.7.9.11)
6	4(5.7.9.11)	31	4(9.11.5.7)	56	4(7.9.11.5)	81	4(7.9.11.5)
7	4(11.5.7.9)	32	4(9.11.5.7)	57	4(9.11.5.7)	82	1(28)
8	4(5.7.9.11)	33	1(17)	58	1(17)	83	1(17)
9	4(11.5.7.9)	34	4(7.9.11.5)	59	4(9.11.5.7)	84	4(9.11.5.7)
10	4(5.7.9.11)	35	4(7.9.11.5)	60	4(5.7.9.11)	85	1(17)
11	4(5.7.9.11)	36	4(9.11.5.7)	61	4(9.11.5.7)	86	4(9.11.5.7)
12	4(7.9.11.5)	37	1(17)	62	4(5.7.9.11)	87	1(17)
13	4(11.5.7.9)	38	1(17)	63	4(9.11.5.7)	88	1(28)
14	4(11.5.7.9)	39	4(11.5.7.9)	64	4(9.11.5.7)	89	4(7.9.11.5)
15	4(9.11.5.7)	40	4(5.7.9.11)	65	4(7.9.11.5)	90	4(11.5.7.9)
16	4(9.11.5.7)	41	4(11.5.7.9)	66	4(7.9.11.5)	91	4(7.9.11.5)
17	1(17)	42	4(9.11.5.7)	67	4(9.11.5.7)	92	4(9.11.5.7)
18	4(9.11.5.7)	43	4(7.9.11.5)	68	4(9.11.5.7)	93	4(11.5.7.9)
19	4(7.9.11.5)	44	4(5.7.9.11)	69	1(17)	94	4(9.11.5.7)
20	4(5.7.9.11)	45	4(9.11.5.7)	70	4(9.11.5.7)	95	4(9.11.5.7)
21	4(7.9.11.5)	46	4(9.11.5.7)	71	1(17)	96	1(17)
22	4(5.7.9.11)	47	4(11.5.7.9)	72	4(7.9.11.5)	97	4(7.9.11.5)
23	4(9.11.5.7)	48	4(9.11.5.7)	73	1(17)	98	4(7.9.11.5)
24	4(9.11.5.7)	49	4(9.11.5.7)	74	4(11.5.7.9)	99	4(5.7.9.11)
25	4(7.9.11.5)	50	4(7.9.11.5)	75	4(9.11.5.7)	100	4(5.7.9.11)

【數據三】

$g_3(n)$ 的循環點與不動點

g(n)=f(n)+3					
1	3(4.7.10)	18	5(8.11.6.9.12)	35	5(8.11.6.9.12)
2	5(8.11.6.9.12)	19	5(11.6.9.12.8)	36	5(6.9.12.8.11)
3	5(6.9.12.8.11)	20	5(8.11.6.9.12)	37	5(11.6.9.12.8)
4	3(7.10.4)	21	5(8.11.6.9.12)	38	1(38)
5	5(8.11.6.9.12)	22	5(11.6.9.12.8)	39	5(8.11.6.9.12)
6	5(9.12.8.11.6)	23	5(8.11.6.9.12)	40	3(7.10.4)
7	3(10.4.7)	24	5(8.11.6.9.12)	41	5(12.8.11.6.9)
8	5(11.6.9.12.8)	25	5(8.11.6.9.12)	42	5(8.11.6.9.12)
9	5(12.8.11.6.9)	26	5(8.11.6.9.12)	43	5(11.6.9.12.8)
10	3(4.7.10)	27	5(8.11.6.9.12)	44	5(8.11.6.9.12)
11	5(6.9.12.8.11)	28	5(8.11.6.9.12)	45	5(8.11.6.9.12)
12	5(8.11.6.9.12)	29	5(8.11.6.9.12)	46	5(11.6.9.12.8)
13	3(10.4.7)	30	5(6.9.12.8.11)	47	5(8.11.6.9.12)
14	5(12.8.11.6.9)	31	3(10.4.7)	48	5(8.11.6.9.12)
15	5(12.8.11.6.9)	32	5(8.11.6.9.12)	49	5(8.11.6.9.12)
16	1(16)	33	5(8.11.6.9.12)	50	5(8.11.6.9.12)
17	5(8.11.6.9.12)	34	5(11.6.9.12.8)		

【數據四】

$g_4(n)$ 的循環點與不動點

g(n)=f(n)+4					
1	2(11.7)	18	2(11.7)	35	1(27)
2	2(11.7)	19	1(15)	36	2(11.7)
3	2(7.11)	20	2(11.7)	37	1(27)
4	2(11.7)	21	2(11.7)	38	1(15)
5	2(11.7)	22	2(11.7)	39	1(15)
6	2(11.7)	23	1(15)	40	2(11.7)
7	2(11.7)	24	2(11.7)	41	2(11.7)
8	2(11.7)	25	2(11.7)	42	2(11.7)
9	2(11.7)	26	2(11.7)	43	1(15)
10	2(11.7)	27	1(27)	44	2(7.11)
11	2(7.11)	28	2(7.11)	45	1(15)
12	2(11.7)	29	1(15)	46	1(15)
13	2(11.7)	30	2(7.11)	47	1(15)
14	2(11.7)	31	2(11.7)	48	1(48)
15	1(15)	32	1(15)	49	1(27)
16	1(15)	33	1(15)	50	2(11.7)
17	1(15)	34	1(15)		

【數據五】

$g_5(n)$的循環長度(循環點)

g(n)=f(n)+5					
1	6(6.11.8.13.12.10)	18	6(13.12.10.6.11.8)	35	6(12.10.6.11.8.13)
2	6(12.10.6.11.8.13)	19	2(24.19)	36	6(13.12.10.6.11.8)
3	6(8.13.12.10.6.11)	20	6(12.10.6.11.8.13)	37	6(13.12.10.6.11.8)
4	1(14)	21	6(10.6.11.8.13.12)	38	1(14)
5	6(10.6.11.8.13.12)	22	6(13.12.10.6.11.8)	39	2(24.19)
6	6(11.8.13.12.10.6)	23	6(13.12.10.6.11.8)	40	1(14)
7	6(12.10.6.11.8.13)	24	2(19.24)	41	1(14)
8	6(13.12.10.6.11.8)	25	6(13.12.10.6.11.8)	42	2(19.24)
9	1(14)	26	6(13.12.10.6.11.8)	43	2(24.19)
10	6(6.11.8.13.12.10)	27	6(12.10.6.11.8.13)	44	2(24.19)
11	6(8.13.12.10.6.11)	28	6(12.10.6.11.8.13)	45	2(24.19)
12	6(10.6.11.8.13.12)	29	2(24.19)	46	2(24.19)
13	6(12.10.6.11.8.13)	30	6(8.13.12.10.6.11)	47	2(24.19)
14	1(14)	31	6(12.10.6.11.8.13)	48	2(24.19)
15	6(13.12.10.6.11.8)	32	6(13.12.10.6.11.8)	49	2(24.19)
16	6(13.12.10.6.11.8)	33	6(12.10.6.11.8.13)	50	6(10.6.11.8.13.12)
17	6(12.10.6.11.8.13)	34	2(24.19)		

【數據六】

$g_6(n)$的循環長度(循環點)

g(n)=f(n)+6					
1	1(13)	18	5(17.21.11.9.15)	35	2(29.35)
2	5(15.17.21.11.9)	19	5(17.21.11.9.15)	36	5(21.11.9.15.17)
3	5(9.15.17.21.11)	20	5(15.17.21.11.9)	37	1(37)
4	1(13)	21	5(15.17.21.11.9)	38	5(15.17.21.11.9)
5	5(11.9.15.17.21)	22	5(15.17.21.11.9)	39	2(35.29)
6	5(11.9.15.17.21)	23	5(17.21.11.9.15)	40	1(13)
7	1(13)	24	5(15.17.21.11.9)	41	5(15.17.21.11.9)
8	5(15.17.21.11.9)	25	5(17.21.11.9.15)	42	5(15.17.21.11.9)
9	5(15.17.21.11.9)	26	1(26)	43	5(17.21.11.9.15)
10	1(13)	27	2(29.35)	44	5(9.15.17.21.11)
11	5(9.15.17.21.11)	28	5(17.21.11.9.15)	45	2(35.29)
12	5(11.9.15.17.21)	29	2(35.29)	46	1(13)
13	1(13)	30	5(9.15.17.21.11)	47	2(35.29)
14	5(15.17.21.11.9)	31	1(13)	48	5(11.9.15.17.21)
15	5(17.21.11.9.15)	32	5(17.21.11.9.15)	49	5(15.17.21.11.9)
16	5(17.21.11.9.15)	33	5(21.11.9.15.17)	50	5(11.9.15.17.21)
17	5(21.11.9.15.17)	34	5(17.21.11.9.15)		

【數據七】

$p_2(n)$ 的循環點與不動點

P2(n)					
1	1(1)	18	1(36)	35	1(5)
2	1(2)	19	1(8)	36	1(36)
3	1(3)	20	1(4)	37	1(14)
4	1(4)	21	1(8)	38	1(4)
5	1(5)	22	1(8)	39	1(4)
6	1(6)	23	1(4)	40	1(8)
7	1(7)	24	1(4)	41	1(14)
8	1(8)	25	1(4)	42	1(4)
9	1(9)	26	1(36)	43	1(36)
10	1(2)	27	1(4)	44	1(4)
11	1(5)	28	1(36)	45	1(4)
12	1(8)	29	1(8)	46	1(4)
13	1(5)	30	1(6)	47	1(2)
14	1(14)	31	1(5)	48	1(4)
15	1(4)	32	1(4)	49	1(36)
16	1(4)	33	1(8)	50	1(2)
17	1(4)	34	1(36)		

【數據八】

$p_3(n)$ 的循環點與不動點

P3(n)					
1	1(1)	18	8(39.63.45.47.61.27.41.19)	35	8(39.63.45.47.61.27.41.19)
2	1(2)	19	8(39.63.45.47.61.27.41.19)	36	8(45.47.61.27.41.19.39.63)
3	1(3)	20	1(6)	37	1(7)
4	1(4)	21	1(7)	38	1(7)
5	1(5)	22	8(27.41.19.39.63.45.47.61)	39	8(63.45.47.61.27.41.19.39)
6	1(6)	23	1(7)	40	1(7)
7	1(7)	24	8(45.47.61.27.41.19.39.63)	41	8(19.39.63.45.47.61.27.41)
8	1(8)	25	1(7)	42	8(45.47.61.27.41.19.39.63)
9	1(9)	26	8(45.47.61.27.41.19.39.63)	43	8(27.41.19.39.63.45.47.61)
10	1(3)	27	8(41.19.39.63.45.47.61.27)	44	1(7)
11	1(7)	28	8(47.61.27.41.19.39.63.45)	45	8(47.61.27.41.19.39.63.45)
12	1(7)	29	1(7)	46	8(47.61.27.41.19.39.63.45)
13	1(7)	30	1(9)	47	8(61.27.41.19.39.63.45.47)
14	8(19.39.63.45.47.61.27.41)	31	1(7)	48	8(27.41.19.39.63.45.47.61)
15	1(7)	32	1(7)	49	1(7)
16	8(27.41.19.39.63.45.47.61)	33	8(27.41.19.39.63.45.47.61)	50	1(7)
17	1(7)	34	8(27.41.19.39.63.45.47.61)		

【數據九】

$p_4(n)$ 的循環點與不動點

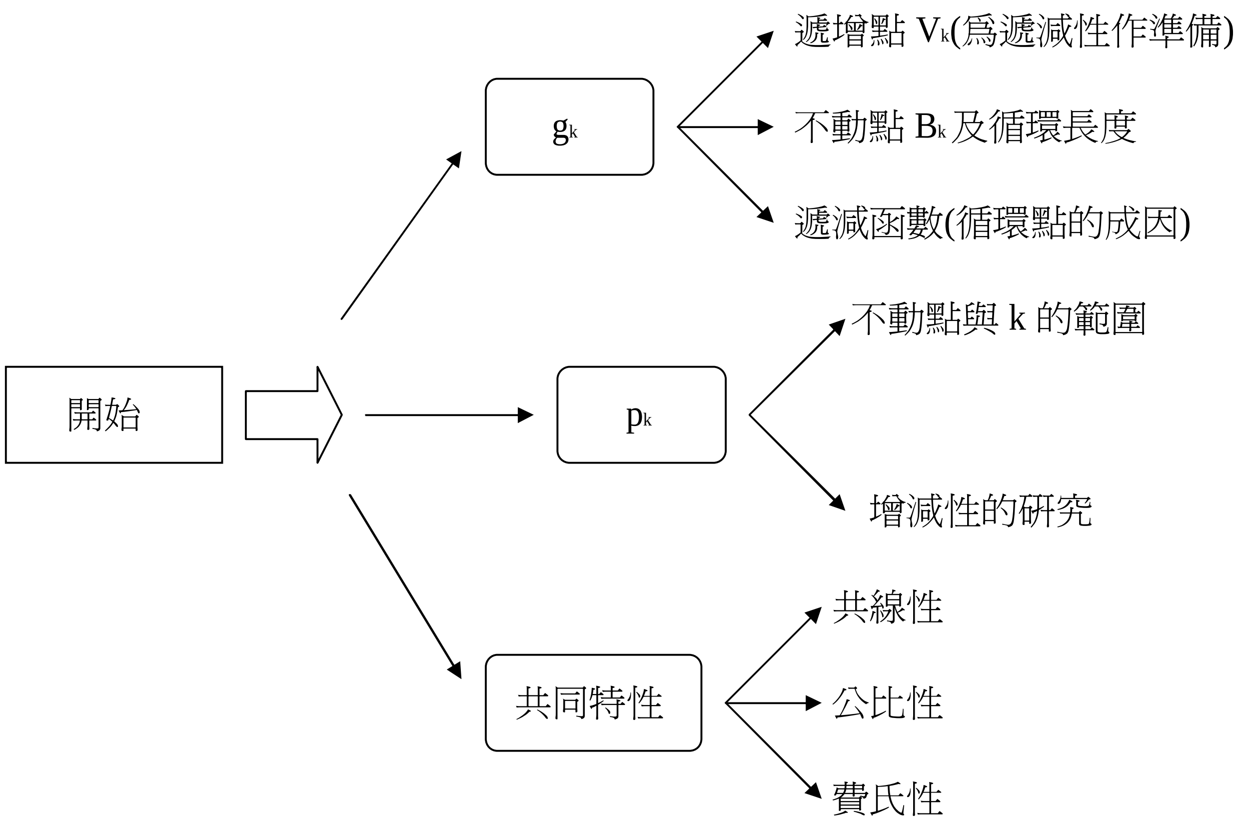
P4(n)	
1	1(1)
2	1(2)
3	1(3)
4	1(4)
5	1(5)
6	1(6)
7	1(7)
8	1(8)
9	1(9)
10	1(4)
11	1(9)
12	5(32.26.44.48.80)
13	12(128.296.716.486.896.1496.4944.6400.1024.704.288.800)
14	5(32.26.44.48.80)
15	5(44.48.80.32.26)
16	3(34.40.16)
17	12(896.1496.4944.6400.1024.704.288.800.128.296.716.486)
以下部分因為循環長度冗長故不再列出	

【數據十】

$p_k(n)$ 的不動點

P(n)的Bk												
pk(n)	**Bk**											**計算至/個數**
p0(n)	1~9											一百萬/(9)
p1(n)=f(n)	1~9	19	29	……	……	……	……	……	………	………	a999…9	一百萬/(54)
p2(n)	1~9	14	36	77	696	28768	97978					一百萬/(15)
p3(n)	1~9	55	273	2439	7839	12557	23757	87757	398439			一百萬/(17)
p4(n)	1~9	33	64	224	391	636	728	937	2048	2624		一百萬/(18)
p5(n)	1~9	11	63	260	323	415	442	4226	27115	31435	76075	一百萬/(19)
p6(n)	1~9	52	120	3024	3114	5711	46024	51514	63504			一百萬/(17)
p7(n)	1~9	31	521	66003								一百萬/(12)
p8(n)	1~9	71										一百萬/(10)
p9(n)	1~9	801										一百萬/(10)
p10(n)	1~9	10	20	……	……	………	………	………	………	………	a000…0	一百萬/(55)
p11(n)	1~9											一百萬/(9)
…	…											…
p100(n)	1~9											一百萬/(9)

研究流程圖


遞增點 V_k(爲遞減性作準備)
g_k
不動點 B_k 及循環長度
遞減函數(循環點的成因)
不動點與 k 的範圍
開始
p_k
增減性的研究
共線性
共同特性
公比性
費氏性