第四屆旺宏科學獎

成果報告書

參賽編號：SA4-205

作品名稱：勝敗天注定

姓名：鍾逸亭

關鍵字：必勝圖形、橫拿、斜拿

勝敗天注定

摘要

1.正常規則：用火柴棒疊成 b 列的三角形【如圖一】，若兩個人輪流拿取，一人一次只能從**其中一列**拿取 1~a 根，拿到最後一根者勝。求可拿根數（1~a）與列數（b）對於勝敗的影響。

【圖一】

因為此種排列方式很像側面看去的金字塔，因此以下概稱為金字塔圖形。

2.特殊規則：改爲一人一次能從**其中一列或一行（即可以斜拿）**拿取 1~a 根，拿到最後一根者勝。此特殊規則放在**推廣與延伸**部分。

壹、研究動機

在書上看到一些拿火柴的數學遊戲，剛好學到巴斯卡三角形，因此試著拼湊了這個遊戲。一開始只是和同學嘗試性地玩一玩，也沒想到竟然發現些許理路，勝敗似乎有規則可循？因此我們再接再厲，將一開始設定的可拿 1~3 根逐漸推廣成 1~a 根，希望推導勝敗公式，成爲「拿火柴遊戲」之王。

貳、研究目的

一、研究剩下怎樣的圖形才會必勝。
二、推導出必勝圖形的公式。
三、用必勝圖形推算和驗證金字塔的層數、可拿根數與勝敗之間的關係。

參、研究設備及器材

紙、筆、黑板、電腦、人腦、恆心。

肆、研究過程或方法

■正常規則

爲了方便大量火柴的表示，故用第一列幾根*第二列幾根*第三列幾根…來簡單表示。因爲不限定拿第幾列，所以上下排列的順序並無特別意義。（如 1 * 4 * 5＝5 * 4 * 1）

先拿方，後拿方，n∈ N， $k \in N \cup \{0\}$，a＝可拿最大根數，

b＝列數（如 b＝3 表示 1 * 2 * 3，1 * 2 * 3-1 表示先拿者在第三列拿一根）

一、必勝圖形

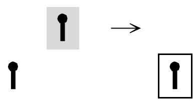
玩的過程中，我們發現在剩下某些狀態的火柴時就可以確認自己必勝了，因此將之命名爲必勝圖形，即剩下圖形爲必勝的狀態＝此圖形的後拿者必勝。

a=1：只要剩下偶數根就贏了，所以 a=1 的必勝圖形以下不討論。

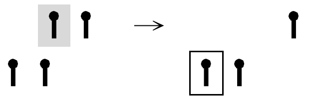
（一） 兩列同根數

<a＝2>

1. 1 * 1：後拿者必勝（以下簡稱必勝）

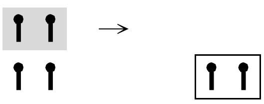


2. 2 * 2：嘗試後發現必勝

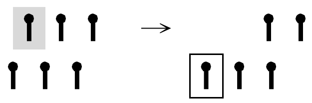


1 * 1 必勝

或

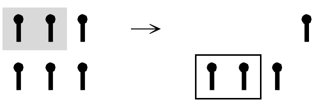


3. 3 * 3：由以上推廣



2 * 2 必勝

或



1 * 1 必勝

4. 討論：兩列同根數時，只要後拿者拿取與先拿者相同的根數，使成較少數量的兩列同根數，最後必能化簡成以上情形，故必勝。而 a 的大小並不影響，因爲化簡到 n * n（n≦a），先拿者仍無法拿到最後一根。

n-(1~a) * n → n-(1~a) * n-(1~a)

n-n * n → 0 * n-n

（二） 直向加成性

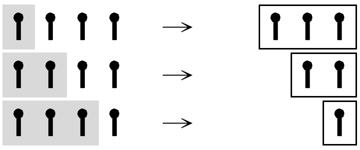
由於不能跨列拿取，必勝圖形的垂直相加並不彼此干擾。如 1 * 1 加上 2 * 2 成爲 1 * 1 * 2 * 2 也必勝。

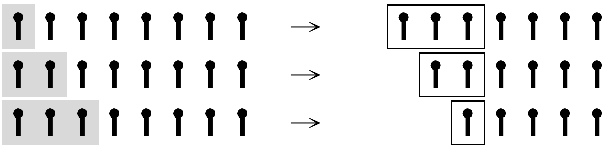
（三） n（a+1）根的隨意加成性

（a+1）-(1~a) → （a~1）- $\boxed{a\sim 1}$ ＝0

因此 a+1 是必勝圖形。

舉例來看：a＝3 時





a+1＝4 必勝，且 2（a+1）＝8 也必勝，因爲只要後拿者拿的根數與先拿者加起來等於 a+1 即可消去 a+1 的倍數，若最後能化簡達到 a+1 則必勝。反過來看，**必勝圖形也可以任意消去或加上（a+1）的倍數**，也仍然必勝。如 n＊n+（a+1）必勝

（四） 特殊加成性

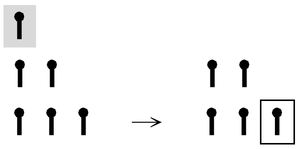
1. 兩列同根數特殊推廣 1＊0＊1→1＊2＊3→1＊4＊5→…
   →**1＊2k＊2k+1**

（1）1＊0＊1 爲兩列同根數 ∴必勝

（2）1＊2＊3

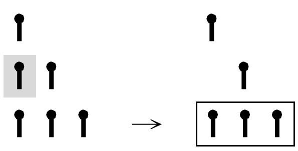
全部拿法如下：

a＝2



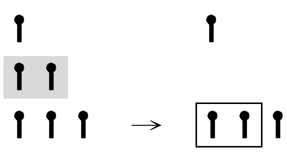
2＊2 必勝

或



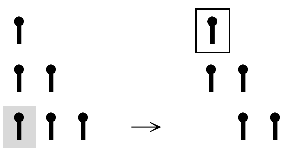
1＊1 必勝

※但這種拿法，a 至少=3，故 a=2 時 1＊2＊3 並不是必勝圖形。用化簡法減去 a+1 來檢查：1＊2＊3＝1＊2＊0 並非勝圖。



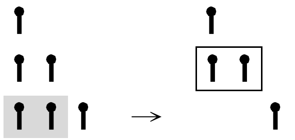
1＊1 必勝

或



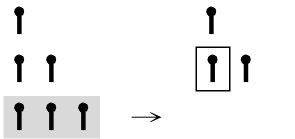
2＊2 必勝

或



1 * 1 必勝

a＝3



1 * 1 必勝

a≧3 時，由於一列最多只有三根，所以能拿超過三根也不會影響勝敗。

其勝利的關鍵在於，1 * 2 * 3 無法讓先拿者達成兩列同根數，而後拿者必然能達成。∴ $a=1 \vee a\geq 3$，1 * 2 * 3 必勝

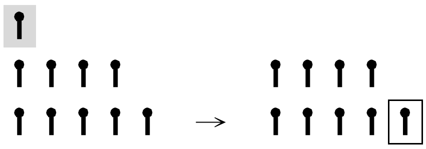
（3）1 * 4 * 5

a＝2，1 * 4 * 5 消去 2+1＝1 * 1 * 2，非必勝

a＝3，1 * 4 * 5 可消去 3+1，因此等同 1 * 0 * 1 的結果　∴必勝

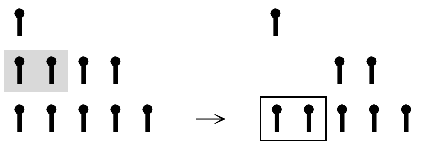
a＝4，1 * 4 * 5 消去 4+1＝1 * 4 * 0，非必勝

a＝5：



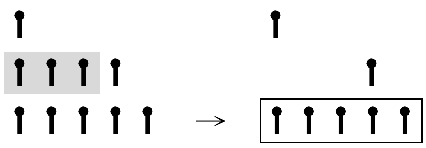
4 * 4 必勝

或



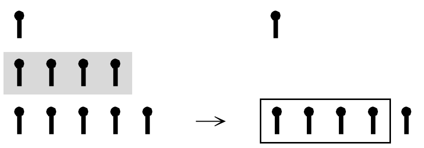
1 * 2 * 3 必勝

或



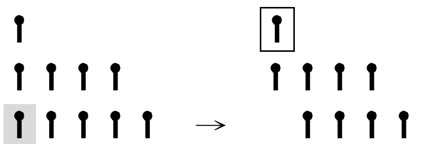
1 * 1 必勝

或



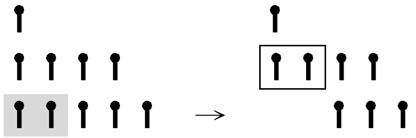
1 * 1 必勝

或



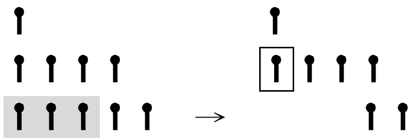
4 * 4 必勝

或



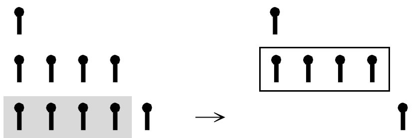
1 * 2 * 3 必勝

或



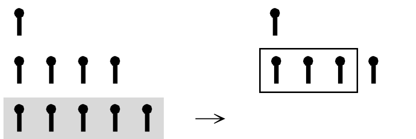
1 * 2 * 3 必勝

或



1 * 1 必勝

或



1 * 1 必勝

a≧5，勝敗都與 a＝5 相同，因為 1 * 4 * 5 一列最多不超過 5 根。

$\therefore a=1 \vee a=3 \vee a \geq 5$，1 * 2 * 3 必勝

（4）討論：1 * 2k * 1+2k

a＝奇數，設 k＝n＞0：

A.1-$\boxed{1}$ * 2n * 1+2n → 0 * 2n * 1+2n-1 ＝ 2n * 2n

B.1 * 2n-$\boxed{1}$ * 1+2n → 1 * 2n-1 * 1+2n-3 ＝ 1 * 2n-2 * 2n-1

＝1 * 2（n-1）* 2（n-1）+1

C.1 * 2n-$\boxed{2}$ * 1+2n → 1 * 2n-2 * 1+2n-2 ＝ 1 * 2n-2 * 2n-1

＝1 * 2（n-1）* 2（n-1）+1

D.1 * 2n-$\boxed{3}$ * 1+2n → 1 * 2n-3 * 1+2n-5 ＝ 1 * 2n-4 * 2n-3

＝1 * 2（n-2）* 2（n-2）+1

E.1 * 2n-$\boxed{4}$ * 1+2n → 1 * 2n-3 * 1+2n-4 ＝ 1 * 2n-4 * 2n-3

＝1 * 2（n-2）* 2（n-2）+1

（按照這個規律，B、D 設先拿者在第二列已經拿 **a** 根時，則後拿者似乎要拿 **a+2** 根才能使成必勝圖形，然而 a+1 是必勝圖形可以化簡，所以後拿者只要拿 1 根便等同於拿 a+2 根而必勝。）

F. 1 * 2n * 1+2n-$\boxed{1}$ → 1-1 * 2n * 2n ＝ 2n * 2n

G.1 * 2n * 1+2n-$\boxed{2}$ → 1 * 2n-2 * 2n-1 ＝ 1 * 2（n-1）* 2（n-1）+1

H.1 * 2n * 1+2n-$\boxed{3}$ → 1 * 2n-1 * 2n-2 ＝ 1 * 2（n-1）* 2（n-1）+1

I. 1 * 2n * 1+2n-$\boxed{4}$ → 1 * 2n-4 * 2n-3 ＝ 1 * 2（n-2）* 2（n-2）+1

J. 1 * 2n * 1+2n-$\boxed{5}$ → 1 * 2n-3 * 2n-4 ＝ 1 * 2（n-2）* 2（n-2）+1

其他的狀況後拿者可拿根數不必大於先拿者，因此必能成爲兩列同根數或 1 * 2n * 1+2n 的形式，而歸於上面討論。

a＝偶數

a＞2k+1 勝敗等同 a＝2k+1 而必勝，a＜2k+1 時 1 * 2n * 1+2n 卻不一定是 a ＝2、4…的必勝圖形。

a＝2 時 1 * 0 * 1＝1 * 6 * 7…必勝

a＝4 時 1 * 0 * 1＝1 * 10 * 11…；1 * 2 * 3＝1 * 12 * 13…必勝

a＝2n 時 1 * 0 * 1 ~ 1 * 2n-2 * 2n-1 必勝

2k	圖 a	2	4	6
0	1 * 0 * 1	O	O	O
2	1 * 2 * 3	X	O	O
4	1 * 4 * 5	X	X	O
6	1 * 6 * 7	O	X	X
8	1 * 8 * 9	X	X	X
10	1 * 10 * 11	X	O	X
12	1 * 12 * 13	O	O	X
14	1 * 14 * 15	X	X	O

即 a≧2k+1 所成立的圖形橫向加成，結果如上表：$\frac{2k+2}{a+1}$ 必定餘 a

（4）結論：1 * 2k * 1+2k，成立條件 $a \geq 2k+1 \cup a \in$ 奇數 $\cup \frac{2k+2}{a+1}$ 餘數爲a

2. 四列連環數

爲了化簡遊戲方便，故從連續數的排列著手。

（1）1 * 2 * 3 * 4

a=2　1 * 2 * 0 * 1（化簡 3）　輸

a=3　1 * 2 * 3 * 0（化簡 4）　勝

a>3　先拿者拿取 4 根後便成爲 1 * 2 * 3 的必勝圖形，後拿者相對地便輸了

※a=3 時 2 * 3 * 4 * 5＝2 * 3 * 0 * 1 必勝

3 * 4 * 5 * 6＝3 * 0 * 1 * 2 必勝

4 * 5 * 6 * 7＝0 * 1 * 2 * 3 必勝

5 * 6 * 7 * 8＝1 * 2 * 3 * 0 必勝

6 * 7 * 8 * 9＝2 * 3 * 0 *1…只要是 4 個連續整數，便必勝

（2）2 * 3 * 4 * 5 ， a≠2、4

2-1 * 3 * 4 * 5 → 1 * 3-$\boxed{3}$ * 4 * 5　剩下 1 * 4 *5

2-2 * 3 * 4 * 5 → 0 * 3-$\boxed{2}$ * 4 * 5　剩下 1 * 4 *5

2 * 3-1 * 4 * 5 → 2 * 2 * 4 * 5-$\boxed{1}$　剩下 2 * 2 * 4 * 4

2 * 3-2 * 4 * 5 → 2-$\boxed{2}$ * 1 * 4 * 5　剩下 1 * 4 *5

2 * 3-3 * 4 * 5 → 2-$\boxed{1}$ * 0 * 4 * 5　剩下 1 * 4 *5

2 * 3 * 4-1 * 5 → 2 * 3 * 3 * 5-$\boxed{3}$　剩下 2 * 2 * 3 * 3

2 * 3 * 4-2 * 5 → 2 * 3 * 2 * 5-$\boxed{2}$　剩下 2 * 2 * 3 * 3

2 * 3 * 4-3 * 5 → 2 * 3 * 1 * 5-$\boxed{5}$　**剩下** 1 * 2 * 3

2 * 3 * 4-4 * 5 → 2 * 3 * 0 * 5-$\boxed{4}$　剩下 1 * 2 * 3

2 * 3 * 4 * 5-1 → 2 * 3-$\boxed{1}$ * 4 * 4　剩下 2 * 2 * 4 * 4

2 * 3 * 4 * 5-2 → 2 * 3 * 4-$\boxed{2}$ * 3　剩下 2 * 2 * 3 * 3

2 * 3 * 4 * 5-3 → 2 * 3 * 4-$\boxed{1}$ * 2　剩下 2 * 2 * 3 * 3

2 * 3 * 4 * 5-4 → 2 * 3 * 4-$\boxed{4}$ * 1　剩下 1 * 2 * 3

2 * 3 * 4 * 5-5 → 2 * 3 * 4-$\boxed{3}$ * 0　剩下 1 * 2 * 3

紅色那列顯示後拿者必須多拿 2 根，但同之前討論仍然必勝，而其他的不論怎麼拿，後拿者的根數都不超過先拿者。但 a＝2 和 4 時 1 * 4 * 5 非必勝而不成立。

（3）3 * 4 * 5 * 6 很容易被先拿者達成 2 * 3 * 4 * 5 而輸，故一定是 2 * 3 * 4 * 5 → 4 * 5 * 6 * 7 → 6 * 7 * 8 * 9…

（4）4 * 5 * 6 * 7

<a=7>

1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * 8 * 9 * 10 * 11 化簡分類後

＝2 * 3 * 4 * 5 * 1 * 6 * 7 * 0 * 1 * 2 * 3 垂直可相加所以必勝

＝4 * 5 * 6 * 7 * 1 * 1 * 2 * 2 * 3 * 3

因 1 * 1 * 2 * 2 * 3 * 3 是必勝圖形，表示後拿者可以拿到最後一根，剩下的 4 * 5 * 6 * 7 必然要能讓後拿者拿到最後一根，這個金字塔才屬於必勝圖形。

∴對於 $a \in \{1,3,5\} \vee a \geq 7$ ，4 * 5 * 6 * 7 是必勝圖形。

※換言之 4 * 5 * 6 * 7＝1 * 4 * 5、1 * 6 * 7 垂直相加後，化簡掉 1 * 1：**垂直化簡性**

∵1 * 4 * 5 和 1 * 6 * 7 成立條件的交集＝ $(a = 2 \vee 4) \cap (a \neq 4 \vee 6)$ ，

∴4 * 5 * 6 * 7 成立條件：a≠2、4、6

改成通式

2n-2 * 2n-1 * 2n * 2n+1， $a \geq 2n+1 \cup a \in$ 奇數 **時必勝**

3. 整理

必勝圖形	成立條件	例 a=2	a=3	a=10
N * n	$a \in N$	2 * 2	5 * 5	50 * 50
a+1	$a \in N$	3	4	11
N * n+k（a+1）	$a \in N$ ， $k \in N \cup \{0\}$	2 * 5	5 * 9	50 * 61
1 * 2k * 2k+1	$a \neq 2(n-k), k \in N \cup \{0\}$	1 * 0 * 1	1 * 2 * 3	1 * 4 * 5
2n-2 * 2n-1 * 2n * 2n+1	a ≥ 2n＋1∪a ∈ 奇數		2 * 3 * 4 * 5	6 * 7 * 8 * 9

二、三角形

第一列 1 根，第二列 2 根，第三列 3 根，…，直到第 n 列是 n 根的無限巨大可能。
$k \in N \cup \{0\}$， win 表示此金字塔爲必勝圖形＝後拿者勝

（一）a＝1

由於一次只能拿一根，一開始是偶數（a+1 的倍數）即後拿者贏。

b=1 總和：0+1=1　　偶加奇=奇數
b=2 總和：1+2=3　　奇加偶=奇數
b=3 總和：3+3=6　　奇加奇=偶數 win
b=4 總和：6+4=10　　偶加偶=偶數 win

a＝1 勝敗 XXOO 一循環。

（二）a＝2：必勝圖形 3k、n * n

<b=1>（無論 a 等於多少，b＝1 皆先拿者勝，以下不再討論）

<b=2>

先拿者剩 1 * 1 而勝

<b=3>

先拿者剩 1 * 1 * 3 而勝

<b=4>1 * 2-2 * 3 * 4 →1-$\boxed{1}$ * 0 * 3 * 4 → 0 * 0 * 3 * 4-1 剩下 3 * 3
→1 * 0 * 3-$\boxed{1}$ * 4 → 1 * 0 * 2 * 4-1 剩下 1 * 2 * 3
→1 * 0 * 3-$\boxed{2}$ * 4 → 1 * 0 * 1 * 4-1 剩下 1 * 1 * 3
→1 * 0 * 3 * 4-$\boxed{1}$ → 1-1 * 0 * 3 * 3 剩下 3 * 3
→1 * 0 * 3 * 4-$\boxed{2}$ → 1 * 0 * 3 * 2-1 剩下 1 * 1 * 3 皆先拿者勝

<b=5>可分爲 1 * 4、2 * 5、3 的必勝圖形垂直相加 win （以下省略文字）

<b=6>1 * 4、2 * 5、3 * 6 win

※n * n+3 可以是 1 * 4、2 * 5、3 * 6，因爲垂直相加性，金字塔前六層恰好爲一個完整的必勝圖形。從第七層開始有 7 根，又可以把 3 的倍數化簡，7-3-3=1，

8-3-3=2…由此可知從第七層起又重複六個一循環。

例如：1* 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * 8 * 9 * 10 * 11 * 12

＝1 * 4 * 2 * 5 * 3 * 6 * 7 * 10 * 8 * 11 * 9 * 12

a=2 勝敗 XXXXO O 一循環

（三）**a=3** 必勝圖形：4k、n * n、1 * 2 * 3、2 * 3 * 4 * 5…

b=1、b=2 時由於一列最多只有 2 根，a＞2 時結果與 a＝2 相同。

<b=3> 1 * 2 * 3 win

<b=4> 1 * 2 * 3、4 win

<b=5> 1 * 2 * 3 * 4，剩 5 而非必勝圖形

<b=6> 1 * 2 * 3 * 4，剩 5 * 6＝1 * 2 非必勝圖形

<b=7> 1 * 5、2 * 6、3 * 7、 4 win

<b=8> 1 * 5、2 * 6、3 * 7、 4 * 8 win

a＝3 勝敗 XXOOX XOO 一循環

（四）a＝4 必勝圖形：5k、n * n、1 * 2 * 3、2 * 3 * 4 * 5…

同前面，1 * 6、2 * 7、3 * 8、4 * 9、5 * 10 必勝，從 11 開始可視為（11-5-5＝）1，等於又從頭開始，所以是 10 個一循環，也就是**勝敗為** 2（a+1）一循環

即 1 * 1+（a+1） 、 2 * 2+（a+1） 、 … 、 a+1 * a+1+（a+1）

b＝a+1+（a+1）＝ 2a+2 ＝ 2（a+1）

b＝1、2、3：XXO

<b＝4>扣除 1 * 2 * 3 剩 4，非必勝

<b＝5>扣除 1 * 2 * 3、5 剩 4，非必勝

<b＝6>扣除 1 * 2 * 3、5 剩 4 * 6，非必勝

<b＝7>扣除 2 * 3 * 4 * 5、1 * 6 剩 7，非必勝

<b＝8>扣除 1 * 6、2 * 7、3 * 8 剩 4 * 5，非必勝

<b＝9>分為 1 * 6、2 * 7、3 * 8、4 * 9、5 win

<b＝10>分為 1 * 6、2 * 7、3 * 8、4 * 9、5 * 10 win

a＝4 勝敗 XXOXXXXXOO 一循環

（五）a＝5

b＝1、2、3、4：XXOX

<b＝5>扣除 1 * 2 * 3 剩 4 * 5，非必勝

<b＝6>扣除 1 * 2 * 3、6 剩 4 * 5，非必勝

<b＝7>分為 2 * 3 * 4 * 5、1 * 6 * 7 win

<b＝8>扣除 2＊3＊4＊5、1＊6＊7 剩 8，非必勝
<b＝9>扣除 2＊3＊4＊5、1＊6＊7 剩 8＊9，非必勝
<b＝10>扣除 1＊7、2＊8、3＊9、4＊10 剩 5＊6，非必勝
<b＝11>分為 1＊7、2＊8、3＊9、4＊10、5＊11、6 win
<b＝12>分為 1＊7、2＊8、3＊9、4＊10、5＊11、6＊12 win

a＝5 勝敗 XXOXX XOXXX OO 一循環

（六）a＝6

b＝1、2、3、4、5：XXOXX
<b＝6>扣除 2＊3＊4＊5 剩 1＊6，非必勝
<b＝7>扣除 2＊3＊4＊5、7 剩 1＊6，非必勝
<b＝8>扣除 2＊3＊4＊5、1＊8、7 剩 6，非必勝
<b＝9>扣除 2＊3＊4＊5、1＊8、7 剩 6＊9，非必勝
<b＝10>扣除 2＊3＊4＊5、1＊8、7 剩 6＊9＊10＝6＊2＊3，非必勝
<b＝11>扣除 1＊8、2＊9、3＊10、4＊11、7 剩 5＊6，非必勝
<b＝12>扣除 1＊8、2＊9、3＊10、4＊11、5＊12、7 剩 6，非必勝
<b＝13>分為 1＊8、2＊9、3＊10、4＊11、5＊12、6＊13、7 win
<b＝14>分為 1＊8、2＊9、3＊10、4＊11、5＊12、6＊13、7＊14 win

a＝6 勝敗 XXOXX XXXXX XXOO 一循環

（七）a＝7

b＝1、2、3、4、5、6：XXOXX X
<b＝7>分為 2＊3＊4＊5、1＊6＊7 win
<b＝8>分為 2＊3＊4＊5、1＊6＊7、8 win
<b＝9>扣除 2＊3＊4＊5、1＊6＊7、8 剩 9，非必勝
<b＝10>扣除 2＊3＊4＊5、1＊6＊7、8 剩 9＊10，非必勝
<b＝11>分為 2＊3＊4＊5、1＊6＊7、8、9＊10＊11＝1＊2＊3 win
<b＝12>扣除 2＊3＊4＊5、1＊6＊7、8、9＊10＊11＝1＊2＊3 剩 12，非必勝
<b＝13>扣除 2＊3＊4＊5、1＊6＊7、8、9＊10＊11＝1＊2＊3 剩 12＊13，非必勝
<b＝14>扣除 1＊9、2＊10、3＊11、4＊12、5＊13、6＊14 剩 7＊8，非必勝
<b＝15>分為 1＊9、2＊10、3＊11、4＊12、5＊13、6＊14、7＊15、8 win
<b＝16>分為 1＊9、2＊10、3＊11、4＊12、5＊13、6＊14、7＊15、8＊16 win

a＝7 勝敗 XXOXX XOOXX OXXXO O 一循環

（八）a＝8、9、10、11、12、13、14......n 依此類推

伍、研究結果

※a 從 1 到 19 後拿者的勝敗表格：○後拿者贏，X 後拿者輸，O 以上為一循環

※淺藍色部分是 a≧b 時，因一列最多 b 根，因此勝敗都與 a=b 時相同

b＼a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
2	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
3	O	X	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O
4	O	X	O	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
5	X	O	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
6	X	O	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
7	O	X	O	X	O	X	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O
8	O	X	O	X	X	X	O	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
9	X	X	X	O	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
10	X	X	X	O	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
11	O	O	O	X	O	X	O	X	O	X	O	O	O	O	O	O	O	O	O
12	O	O	O	X	O	X	X	X	X	X	O	X	X	X	X	X	X	X	X
13	X	X	X	O	X	O	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
14	X	X	X	X	X	O	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
15	O	X	O	X	O	X	O	X	O	X	O	X	O	X	O	O	O	O	O
16	O	X	O	X	X	X	O	X	X	X	X	X	X	X	O	X	X	X	X
17	X	O	X	X	X	O	X	O	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
18	X	O	X	X	X	X	X	O	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
19	O	X	O	O	O	X	O	X	O	X	O	X	O	X	O	X	O	X	O
20	O	X	O	O	X	X	X	X	O	X	X	X	X	X	X	X	X	X	O
21	X	X	X	X	X	X	X	O	X	O	X	X	X	X	X	X	X	X	X
22	X	X	X	X	X	X	X	X	X	O	X	X	X	X	X	X	X	X	X
23	O	O	O	O	O	X	O	X	O	X	O	X	O	X	O	X	O	X	O
24	O	O	O	X	O	X	O	X	X	X	O	X	X	X	X	X	X	X	X
25	X	X	X	X	X	X	X	O	X	O	X	O	X	X	X	X	X	X	X
26	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	O	X	X	X	X	X	X	X
27	O	X	O	X	O	O	O	X	O	X	O	X	O	X	O	X	O	X	O
28	O	X	O	X	X	O	X	X	X	X	X	X	O	X	X	X	X	X	X
29	X	O	X	O	X	X	X	X	X	O	X	O	X	O	X	X	X	X	X
30	X	O	X	O	X	X	X	X	X	X	X	X	X	O	X	X	X	X	X
31	O	X	O	X	O	O	O	X	O	X	O	X	O	X	O	X	O	X	O
32	O	X	O	X	X	X	O	X	X	X	X	X	X	X	O	X	X	X	X
33	X	X	X	O	X	X	X	X	X	X	X	O	X	O	X	O	X	X	X
34	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	O	X	X	X
35	O	O	O	X	O	X	O	O	O	X	O	X	O	X	O	X	O	X	O
36	O	O	O	X	O	X	X	O	X	X	O	X	X	X	X	X	O	X	X
37	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	O	X	O	X	O	X	O	X
38	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	O	X
39	O	X	O	O	O	X	O	O	O	X	O	X	O	X	O	X	O	X	O
40	O	X	O	O	X	X	O	X	O	X	X	X	X	X	X	X	X	X	O

陸、討論與結論

一、公式：金字塔型必勝圖形

a＝可拿最大根數，b＝金字塔層數，設$m\in N\cup\{0\},k\in N\cup\{0\},n\in N$

（一）、當 a≧b 時，b＝4k+3

（二）、當 a＜b 時，b＝2（a+1）、b＝2a+1 $\begin{cases} a=4m+1, b=2(a+1)\vee 2a+1\vee 4k+3 \\ a=2m, b=2(a+1)\vee 2a+1 \\ a=4m+3, b=k(a+1)\vee 2a+1, k>0 \end{cases}$

（三）、不考慮 a 和 b 的大小：當 a＝2m+1 時（即 a 爲奇數），b＝4k+3

當 a＝4m+3 時，b＝k（a+1），k＞0

二、證明

（一）當 a≧b 時，b＝4k+3 爲必勝圖形

1. k＝0 時，b＝3
   1＊2＊3
   ∵ a≧3 ∴1＊2＊3 必勝圖形成立

2. k＝1 時，b＝7
   1＊2＊3＊4＊5＊6＊7
   ∵ a≧7 ∴1＊2＊3 和 4＊5＊6＊7 必勝圖形都成立

3. 設 k＝n 時必勝圖形成立，b＝4n+3
   1＊2＊3＊…＊4n＊4n+1＊4n+2＊4n+3 必勝

4. 則 k＝n+1 時，b＝4n+7
   1＊2＊3＊…＊4n＊4n+1＊4n+2＊4n+3＊4n+4＊4n+5＊4n+6＊4n+7

   其中 4n+4＊4n+5＊4n+6＊4n+7
   ＝2（2n+3）-2＊ 2（2n+3）-1 ＊ 2（2n+3） ＊ 2（2n+3）+1
   ∵ a≧2（2n+2）+3 ∴ 此必勝圖形成立，故可以化簡掉。

   化簡後剩下 1＊2＊3＊…＊4n＊4n+1＊4n+2＊4n+3 → b＝4n+3＝步驟（3）中的圖形 ∴由數學歸納法得證

（二）當 a＜b 時，b＝2a+2 或 b＝2a+1 是必勝圖形

因爲必勝圖形有 n * n+（a+1）的型式，可以用連續的垂直相加：
1 * 1+（a+1）、2 * 2+（a+1）、3 * 3+（a+1）、⋯、a * a+（a+1）、a+1 * a+1+（a+1）
＝1 * a+2 、 2 * a+3 、 ⋯ 、 a * 2a+1 、 a+1 * 2a+2
＝1 * 2 * ⋯ * a * a+1 * a+2 * ⋯ * 2a+1 * 2a+2 ∴ b＝2a+2 是必勝圖形

又 2a+2＝2（a+1）是必勝圖形，可以省略，所以 b＝2a+1 依然是必勝圖形。

（三）當 a＜b 時，a＝4m+1，b＝4k+3 是必勝圖形

a＜b → 4m+1＜4k+3 → m＜k+$\frac{1}{2}$ → m≦k
（$m\in N\cup\{0\},k\in N\cup\{0\}$，設 m＞k ∴ m≧k+1
→ k+1≦m＜k+$\frac{1}{2}$ 矛盾，所以 m≦k）

1. k＝0 時，m＝0，a＝1，b＝3

∵1 * 2 * 3 總根數是偶數 ∴必勝

2. k＝1 時，$m=0\vee 1,a=1\vee 5$，b＝7

1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7，其中因爲 a＞3，1 * 2 * 3 成立。
另外 4 * 5 * 6 * 7＝2n-2 * 2n-1 * 2n * 2n+1 的必勝圖形，且 a＝5、 1 所以成立

3. 設 k＝n 時必勝圖形成立，m≦n，a＝4m+1≦4n+1，b＝4n+3

1 * 2 * 3 * ⋯ * 4n-1 * 4n+1 * 4n+2 * 4n+3

4. 則 k＝n+1 時，m≦n+1，a＝4m+1，b＝4n+7
1 * 2 * 3 * ⋯* 4n-1 * 4n+1 * 4n+2 * 4n+3 * 4n+4 * 4n+5 * 4n+6 * 4n+7
此時 a 有兩種可能：$\begin{cases} a\le 4n+1 \\ a=4n+5 \end{cases}$

若 a≦4n+1，則與步驟（3）中的 a 相同，也就是 1 * 2 * 3 * ⋯ * 4n-1 * 4n+1 * 4n+2 * 4n+3 是必勝圖形而可以省略，剩下 4n+4 * 4n+5 * 4n+6 * 4n+7，用減去 a+1 的方式化簡，可分兩種狀況：
n≠0，a＝4n+1，2 * 3 * 4 * 5 因爲 a≧5 所以必勝圖形成立
n＝0，a＝1，4 * 5 * 6 * 7 合爲偶數所以必勝圖形成立

若 a＝4n+5，4n+4 * 4n+5 * 4n+6 * 4n+7 可化簡成 4n+4 * 4n+5 * 0 * 1，也就是 1 * 2（2n+2）* 2（2n+2）+1 的必勝圖形，因為 a＝2（2n+2）+1 所以成立。4n+4 * 4n+5 * 4n+6 * 4n+7 可以省略，剩下 1 * 2 * 3 * … * 4n+2 * 4n+3，由 4n+2 可知其前面共有 4n+1 列，除了 1 以外的 4n 列可全數化為必勝圖形（因為 a＞4n+1），剩下 1 * 4n+2 * 4n+3＝1 * 2（2n+1）* 2（2n+1）+1 必勝圖形，且必定成立（因為 a＞4n+3）。

（舉例：1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7＝2 * 3 * 4 * 5、1 * 6 * 7）

∴由數學歸納法得證

※如果由 a 是奇數的角度來看

必勝圖形 1 * 2n * 2n+1 、 2n * 2n+1 * 2n+2 * 2n+3 其實是全部成立的

a=奇數：1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * 8 * 9 * 10 * 11 * … * 4k * 4k+1 * 4k+2 * 4k+3

可排成必勝金字塔，∴當 a＝2m+1 **時（即** a **為奇數），**b＝4k+3 **必勝**

（四）當 a＝4m+3 **時，**b＝k（a+1），k＞0

1. k＝1 時，1 * 2 * 3 * … * 4m * 4m+1 * 4m+2 * 4m+3 * 4m+4

   因為 a＝4m+3，4m * 4m+1 * 4m+2 * 4m+3 成立，又 4m+4＝a+1 可省略

   ∴為必勝圖形

2. 設 k＝n 時

   1 * 2 * 3 *…* 4mn*（4m+1）n*（4m+2）n*（4m+3）n *（4m+4）n 為必勝圖形

3. 則 k＝n+1，1 * 2 * 3 * … * 4mn *（4m+1）n*（4m+2）n*（4m+3）n * 4m（n+1）*（4m+1）（n+1）*（4m+2）（n+1）*（4m+3）（n+1）*（4m+4）（n+1）

   其中（4m+4）（n+1）＝a+1 的倍數，所以可以省略；

   由於 a 是奇數，4m（n+1）*（4m+1）（n+1）*（4m+2）（n+1）*（4m+3）（n+1）屬於四個連環數型的必勝圖形必定可以省略。

   剩下的 1 * 2 * 3 * … * 4mn *（4m+1）n*（4m+2）n*（4m+3）n 同步驟（2）的圖形，所以必勝。

∴由數學歸納法得證

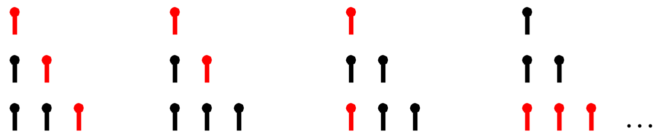
三、結論

雖然這只是一個不很困難的遊戲，但必勝圖形的堆疊、化簡、連續排列數的疑問都曾經困擾我，而且全部從零開始自己探索，尤其是數學不一定能找到結果的未知感有時也令人灰心。然而偶來的靈光乍現、數學歸納法有條理的思考、導師的口頭鼓勵、可借用的學校電腦教室（以及冷氣）都幫了我很大的忙，更重要的是，我發現數學有時並非那般艱深，它的道理俯拾即是，而且相當明瞭－只要我們抱著喜歡的心情去認識它！

柒、推廣與延伸－特殊規則

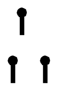
新增規則是可以斜（直）拿也可以橫拿，但因爲同列的位置可以左右互換（同行的位置不能換），所以**斜拿等同任選 1~a 列，從中各拿一根**。

拿法例：（紅色表示先拿者第一次拿取的火柴，藍色表示後拿者第一次拿取的火柴）

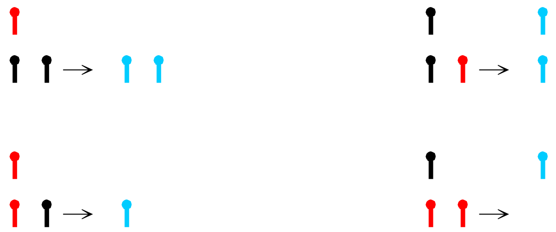


一、共通必勝圖形

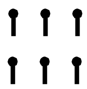
1. **1 * 2**



不考慮 a=1（a=1 只要總根數爲偶數則必勝），此圖形必勝。

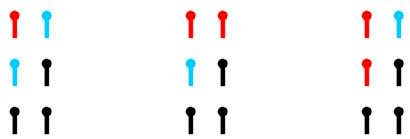


2. **3 * 3**



這是由 1.延伸的圖形，後拿者只要使剩餘圖形等於 1 * 2 或拿完即勝。

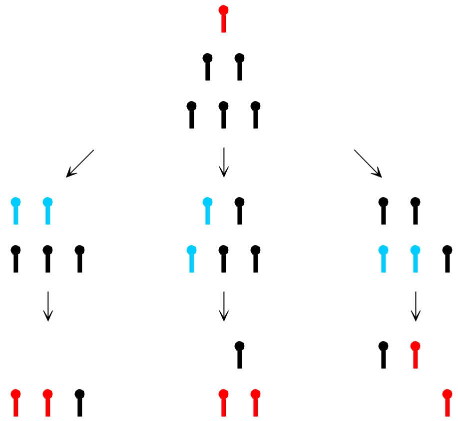
3. 2 * 2 * 2



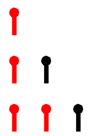
由於新規則使必勝圖形的共通性降低，以下根據 a 來分別討論必勝情形。

二、獨立必勝圖形

（一）**a＝2**：仔細研究會有很多的必勝圖形，但共通性是這些圖形的根數和皆爲 3 的倍數，原因就在於只要先拿者拿 x 根，後拿者就拿（3-x）根，不必考慮拿法。因可直拿橫拿反而變成整堆中可任意拿 1 或 2 根的狀態。



相對地 a＞2 就會受限於斜拿的規定，而不能像這樣任意拿：

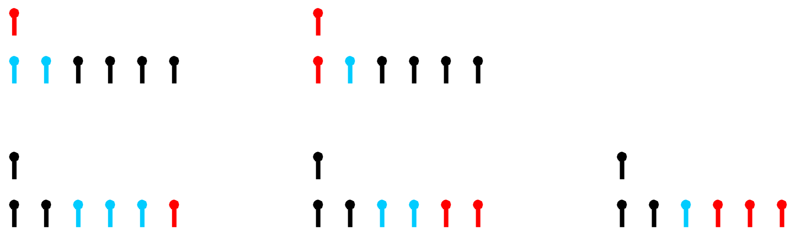


※若可任意拿 1~a 根，必勝條件即爲 $\boxed{\mathbf{a=n\ (a+1)},\ n\in N}$

∵先拿者若拿 1~a 根，後拿者便拿 a~1 根，使每一輪皆取走（a＋1）根，則後拿者必可拿到最後一根。

（二）**a＝3：**

1.　**1 * 6** 和 **2 * 5**



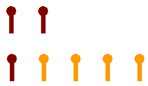
剩 4 故必勝

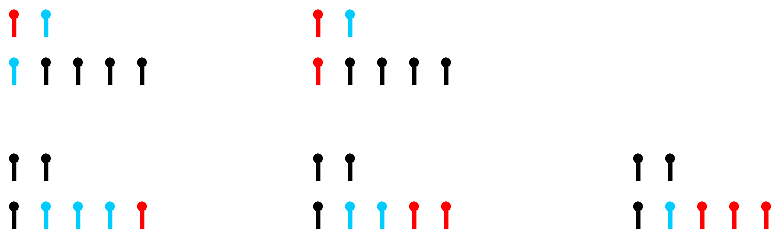
剩 1 * 2 故必勝

觀察所剩的 4 和 1 * 2，可發現此圖形的基本構成是

（以下皆以咖啡色和橘色表示不同區塊）

因爲同列可換位置，先拿者於第二列無法跨區拿（最多拿 3 根，可全歸入橘色區塊），所以此圖形必勝。同理 2 * 5 也必勝

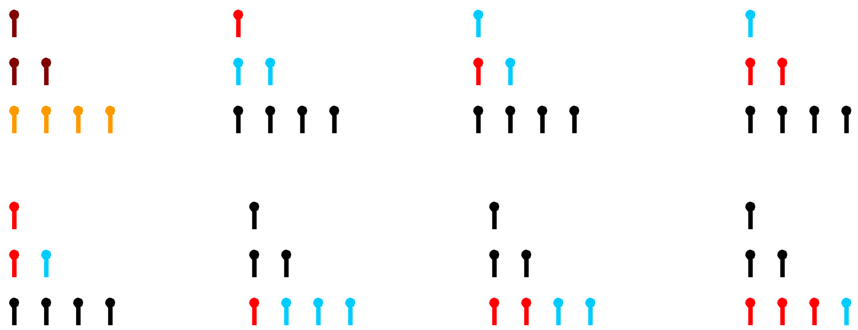




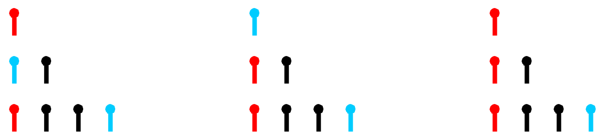
剩 4 故必勝

剩 1 * 2 故必勝

2.　**1 * 2 * 4**



以上拿法皆為不跨區，由此可見必勝圖形垂直相加下，不跨區拿仍為必勝。(即維持必勝圖形的區塊獨立，各區塊皆可由後拿者拿到末根)

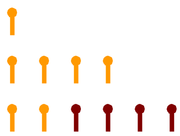


剩 1 * 2 故必勝

以上三種有跨區，獨立出來討論仍為必勝。

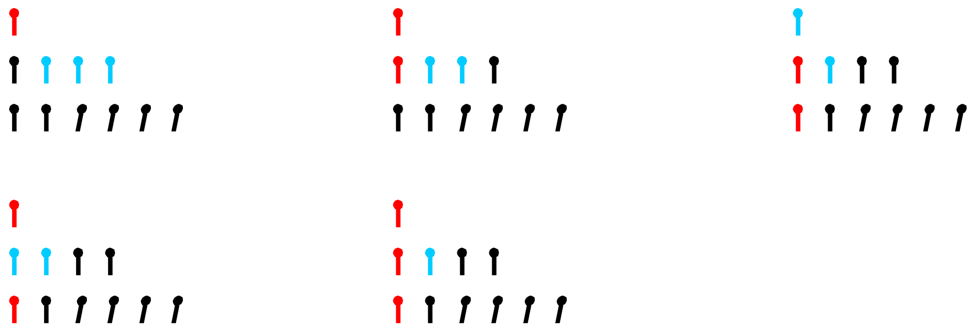
3.　無法跨區的相加

（1）**1 * 4 * 6　、　1 * 6 * 8　、　1 * 8 * 10** …



橫拿：此圖形先拿方是無法跨區的，在第三列拿 1 到 3 根即會歸於咖啡區塊，讓後拿方消掉這個新增區塊而達成必勝圖形；

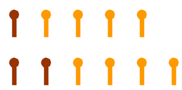
直拿：



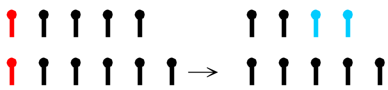
可以發現 4 確實是獨立的區塊，故**不能跨區的必勝圖形必可加在一起**

而 4 若加在簡單圖形現有任一列（至少含 1 根）中，必為不可跨區相加，所以 **4 的橫向加成是可能的**，但是 4 * 4 非必勝圖形，所以未必能連續加

5 * 6



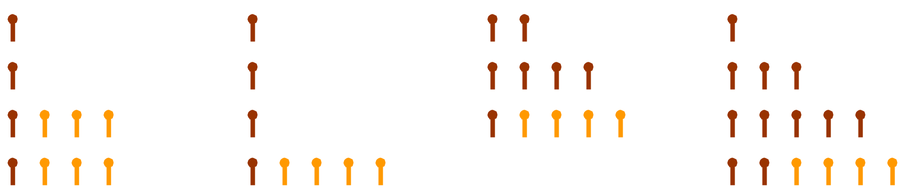
若



剩 2 * 5 故必勝

（並非照分區的拿法，由於不可跨區的狀況僅在一開始時成立，之後就要以達成新的必勝圖形為拿取目標）

（2）　**1 * 1 * 4 * 4**　　**1 * 1 * 1 * 5**　　**2 * 4 * 5**　　**1 * 3 * 5 * 6**



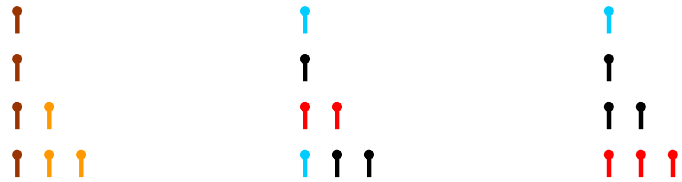
4 可跨區的相加

僅需討論跨區的情況下是否成立，原因在於想突破必勝圖形相加的狀態必定會有跨區拿的現象，把**跨區的步驟移到前面**，便可預先觀察結果。

（1）1 * 3 * 3 * 3　　含 1 * 1 * 1 * 1 和 2 * 2 * 2 和 3 * 3 的形狀

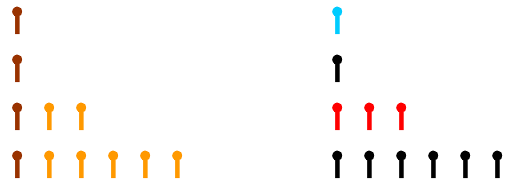
剩 3 * 3 故必勝

（2）1 * 1 * 2 * 3　　含 1 * 1 * 1 * 1 和 1 * 2 的形狀



剩 1 * 2 故必勝

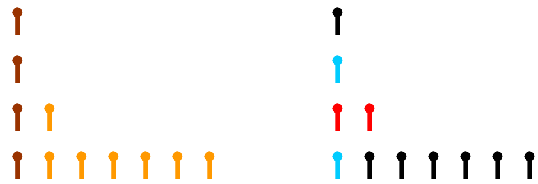
（3）1 * 1 * 3 * 6　　含 1 * 1 * 1 * 1 和 1 * 2 * 4 和 2 * 5 和 1 * 6 的形狀



剩 1 * 6 故必勝

此圖同時也是 1 * 1 * 2（+4）* 3 的不可跨區相加

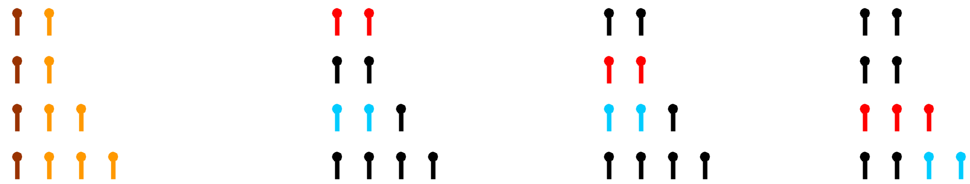
（4）1 * 1 * 2 * 7　　含 1 * 1 * 1 * 1 和 1 * 2 * 4 和 2 * 5 和 1 * 6 的形狀



剩 1 * 6 故必勝

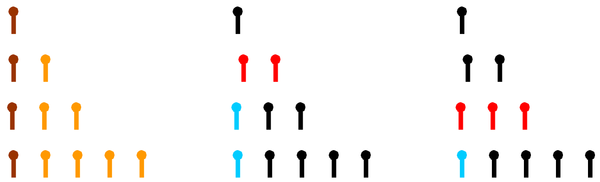
此圖同時也是 1 * 1 * 2 * 3（+4）的不可跨區相加

（5）2 * 2 * 3 * 4　　含 1 * 1 * 1 * 1 和 1 * 1 * 2 * 3 和 1 * 2 * 4 和 2 * 2 * 2 和 3 * 3 的形狀



剩 1 * 2 * 4　　1 * 2 * 4　　2 * 2 * 2 故必勝

（**6**）**1＊2＊3＊5**　含 1＊1＊1＊1 和 1＊2＊4 和 2＊5 和 1＊1＊2＊3 等形狀



剩 1＊2＊4 故必勝

（**7**）**2＊4＊4＊4**　含 1＊1＊1＊1 和 1＊2＊4 和 1＊3＊3＊3 和 3＊3＊4 等形狀

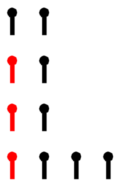
剩 3＊3＊4（證明於下）故必勝

事實上驗證跨區後仍必勝的方式就是拿先前驗證的必勝圖形來作爲證明，而此類咖啡區塊（直的 4）皆可以在旁邊加上≦4 列的必勝圖形。

（**8**）**3＊3＊4**

先看 2＊2＊2＊4

此圖形除了 4 垂直加 2＊2＊2 外還有 1＊2 加 1＊2＊4，然而



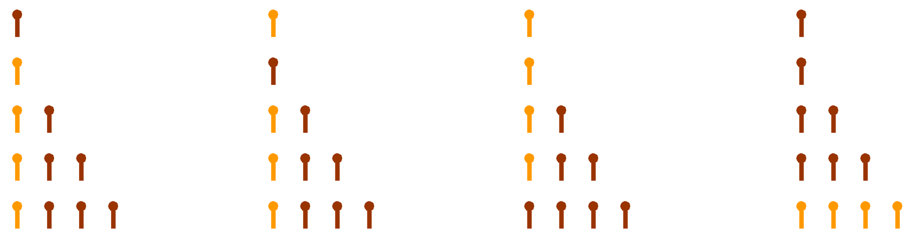
先拿者剩 1＊1＊2＊3 而必勝

將上圖形狀轉換一下使之 1＊2 加 1＊2＊4 改成橫向加成

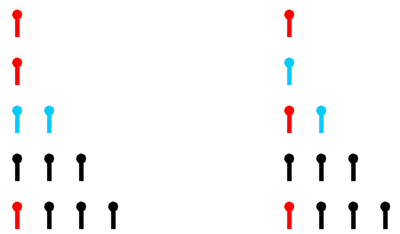
因涵括 4、2＊2＊2、3＊3、1＊2＊4 形狀，跨區後就能依靠 2＊2＊2 來獲勝：

剩 2＊2＊2 故必勝

（9）**1＊1＊2＊3＊4** 包含 1＊1＊2＊3 和 1＊2＊4 和 3＊3 的形狀



跨區後



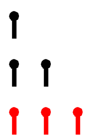
※可以看出怎麼拿都不出該圖形所包含的必勝圖形的範疇，

三、金字塔三角形

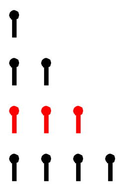
（一）1　　　　　　非必勝

（二）1＊2　　　　　必勝

（三）1＊2＊3　　　　非必勝

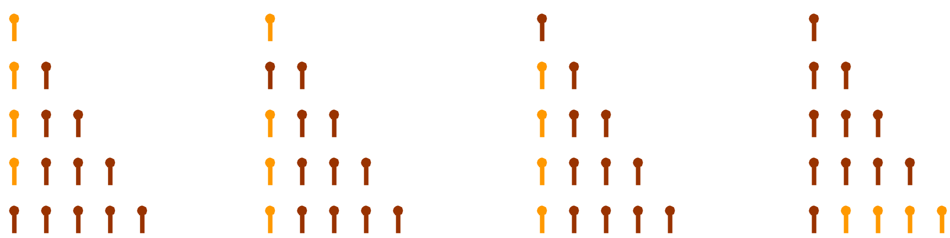


（四）1＊2＊3＊4　　　非必勝

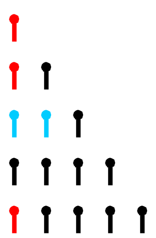


（五）1＊2＊3＊4＊5　　　必勝

必勝圖形含有 1＊2＊3＊5 和 2＊2＊3＊4 和 1＊1＊2＊3＊4 的形狀



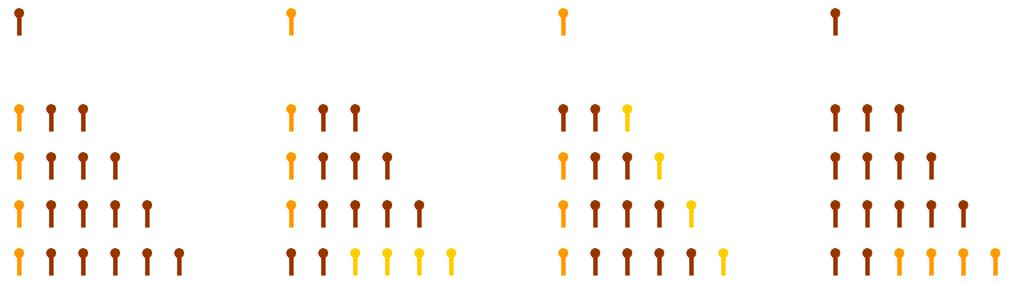
跨區後



剩 1＊1＊4＊4 故必勝

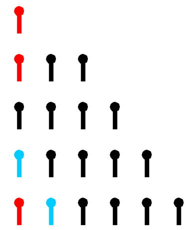
（六）1＊2＊3＊4＊5＊6　　非必勝

假設先拿者拿 2 後如下圖，須先討論 1＊3＊4＊5＊6 是否為必勝



4+1*2*3*4*5　　4+4+2*2*3*4　　4+4+2*2*3*4　　4+1*2*3*4*5

跨區拿



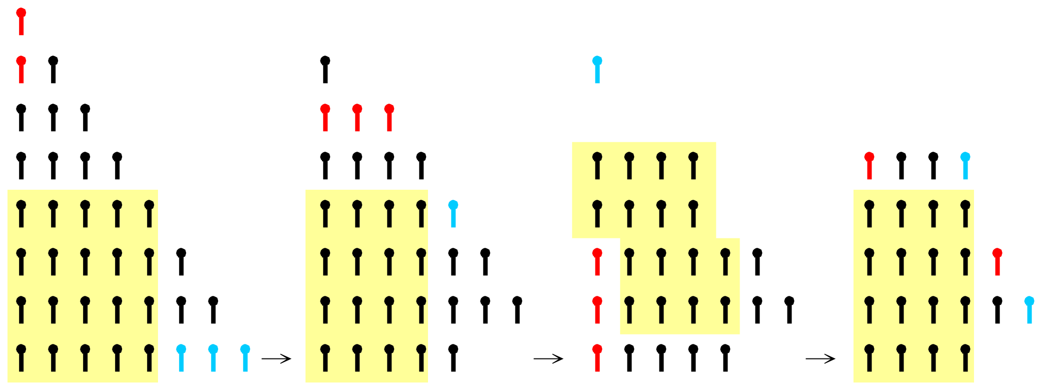
剩 2＊4＊4＊4 故 **1＊3＊4＊5＊6 必勝**

∵1＊3＊4＊5＊6 必勝　∴1＊2＊3＊4＊5＊6 非必勝

四、做法與結論

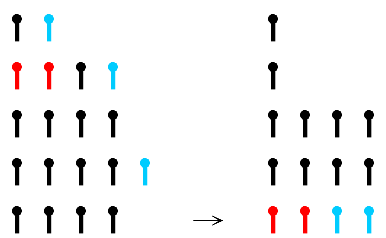
（一）做法－以必勝圖形為最後依歸

因為可斜拿而使判定勝敗較為困難，但一般圖形可能有各種分割方法，根據先拿者拿剩的圖形再行分割，以迅速達成必勝圖形為目標。以下舉 b＝8 為例，先拿者為隨機亂拿（故 b＝8 不一定是必勝圖形）



一開始由於數量過於龐大，先用 4 大略化減圖形，並使後拿者剩

1＊1＊2＊3＊4　　1＊1＊2＊3＊4　　1＊2＊4　　1＊2

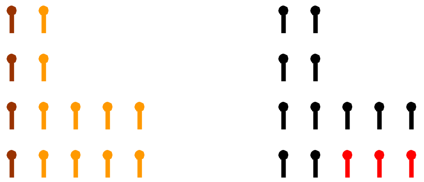


左圖可看出剩 1＊1＊4＊4＊4，可知先拿者將無法達成 1＊1＊4＊4 或 3＊3＊4 或 1＊3＊3＊3（因為皆差 4 根）故後拿者勝

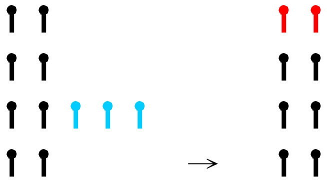
※最後的勝敗要由先前探討的必勝圖形來得知

（二）跨區之探討

用 2 * 2 * 5 * 5 來看不跨區與跨區之間的差別



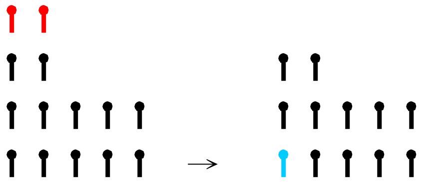
一開始乍看沒跨區，但若完全依照橘色區塊原有的拿法…



→ 就會發現後拿者輸了

但這並非此圖形不是必勝，關鍵是最後一步的先拿者跨區拿了兩根。

為了證明此圖形必勝，把跨區的拿法移到第一步驟

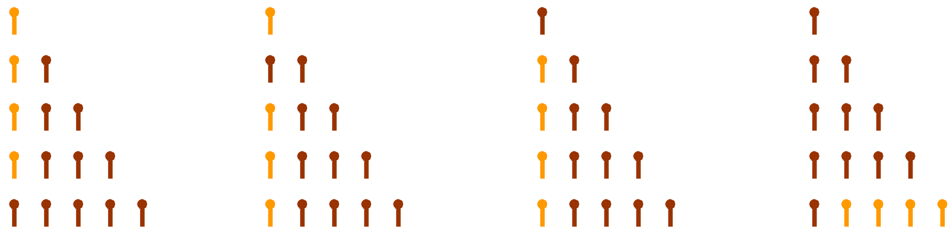


→ 後拿者剩 2 * 4 * 5 必勝

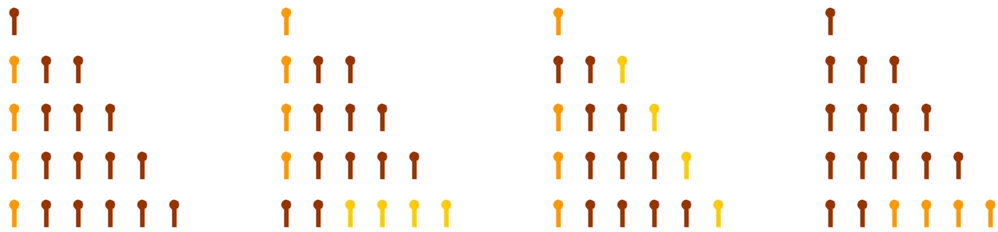
∴只要杜絕先拿者所有跨區勝利的可能性，就等於證明了必勝。

（三）似拼圖的性質

1 * 2 * 3 * 4 * 5



1 * 3 * 4 * 5 * 6



可斜拿的必勝圖形在垂直相加上相當不規則，但從拼圖的角度來看，**大型必勝圖形必有多種拼法，能保證不論先拿者怎麼拿，後拿者都能拿成必勝圖形**。

捌、附錄

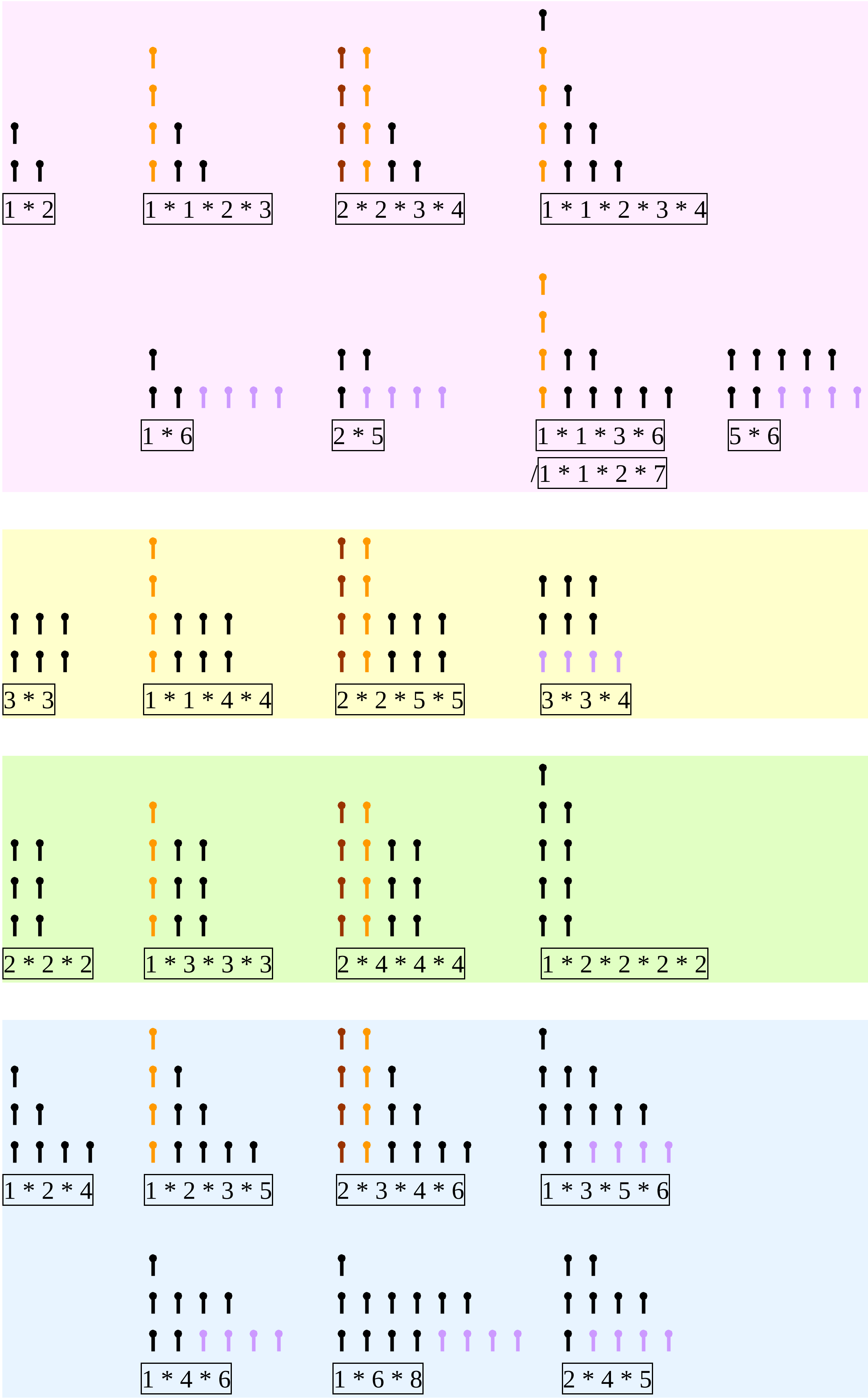
附錄 a：正常規則必勝圖形成立表

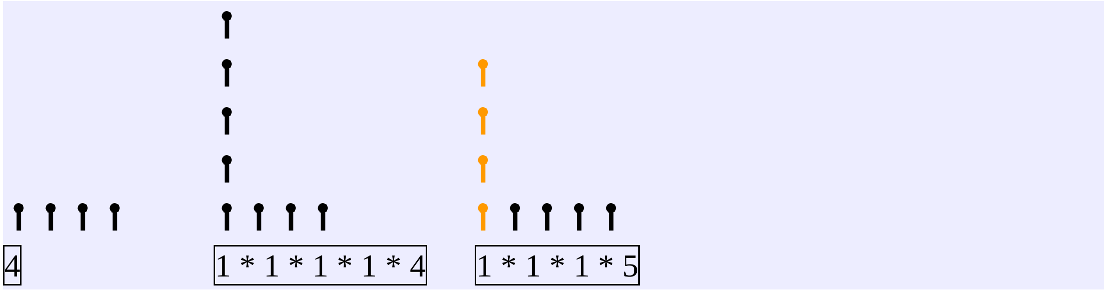
必勝圖形 \ a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1													
2	O												
3		O											
4	O		O										
5				O									
6	O	O			O								
7						O							
8	O		O				O						
9		O						O					
10	O			O					O				
11										O			
12	O	O	O		O						O		
13												O	
14	O					O							O
1*2*3	O		O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O
1*4*5	O		O		O	O	O	O	O	O	O	O	O
1*6*7	O	O	O		O		O	O	O	O	O	O	O
1*8*9	O		O		O		O		O	O	O	O	O
1*10*11	O		O		O		O		O		O	O	O
1*12*13	O	O	O		O		O		O		O		O
1*14*15	O		O		O	O	O		O		O		O
0*1*2*3	O		O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O
2*3*4*5	O		O		O	O	O	O	O	O	O	O	O
4*5*6*7	O		O		O		O	O	O	O	O	O	O
6*7*8*9	O		O		O		O		O	O	O	O	O
8*9*10*11	O		O		O		O		O		O	O	O
10*11*12*13	O		O	O	O		O		O		O		O
12*13*14*15	O		O		O		O		O		O		O
14*15*16*17	O		O		O	O	O		O		O		O
16*17*18*19	O		O		O	O	O		O		O		O
18*19*20*21	O		O		O		O	O	O		O		O
20*21*22*23	O		O	O	O		O	O	O		O		O
22*23*24*25	O		O		O		O	O	O	O	O		O
24*25*26*27	O		O		O		O		O	O	O		O
26*27*28*29	O		O		O		O		O	O	O	O	O

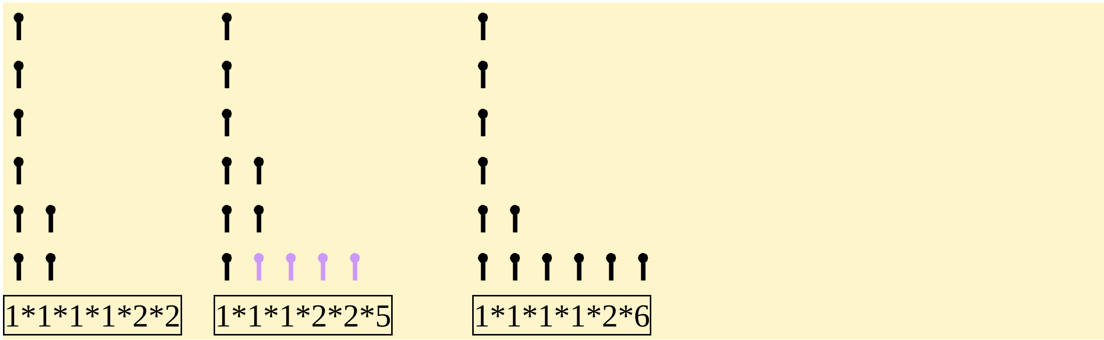
附錄 b：正常規則勝敗循環圖

b\a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
2	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
3	O	X	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O
4	O	X	O	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
5	X	O	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
6	X	O	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
7	O	X	O	X	O	X	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O
8	O	X	O	X	X	X	O	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
9	X	X	X	O	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
10	X	X	X	O	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
11	O	O	O	X	O	X	O	X	O	X	O	O	O	O	O	O	O	O	O
12	O	O	O	X	O	X	X	X	X	X	O	X	X	X	X	X	X	X	X
13	X	X	X	O	X	O	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
14	X	X	X	X	X	O	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
15	O	X	O	X	O	X	O	X	O	X	O	X	O	X	O	O	O	O	O
16	O	X	O	X	X	X	O	X	X	X	X	X	X	X	O	X	X	X	X
17	X	O	X	X	X	O	X	O	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
18	X	O	X	X	X	X	X	O	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
19	O	X	O	O	O	X	O	X	O	X	O	X	O	X	O	X	O	X	O
20	O	X	O	O	X	X	X	X	O	X	X	X	X	X	X	X	X	X	O
21	X	X	X	X	X	X	X	O	X	O	X	X	X	X	X	X	X	X	X
22	X	X	X	X	X	X	X	X	X	O	X	X	X	X	X	X	X	X	X
23	O	O	O	O	O	X	O	X	O	X	O	X	O	X	O	X	O	X	O
24	O	O	O	X	O	X	O	X	X	X	O	X	X	X	X	X	X	X	X
25	X	X	X	X	X	X	X	O	X	O	X	O	X	X	X	X	X	X	X
26	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	O	X	X	X	X	X	X	X
27	O	X	O	X	O	O	O	X	O	X	O	X	O	X	O	X	O	X	O
28	O	X	O	X	X	O	X	X	X	X	X	X	O	X	X	X	X	X	X
29	X	O	X	O	X	X	X	X	X	O	X	O	X	O	X	X	X	X	X
30	X	O	X	O	X	X	X	X	X	X	X	X	X	O	X	X	X	X	X
31	O	X	O	X	O	O	O	X	O	X	O	X	O	X	O	X	O	X	O
32	O	X	O	X	X	X	O	X	X	X	X	X	X	X	O	X	X	X	X
33	X	X	X	O	X	X	X	X	X	X	X	O	X	O	X	O	X	X	X
34	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	O	X	X	X
35	O	O	O	X	O	X	O	O	O	X	O	X	O	X	O	X	O	X	O
36	O	O	O	X	O	X	X	O	X	X	O	X	X	X	X	X	O	X	X
37	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	O	X	O	X	O	X	O	X
38	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	O	X
39	O	X	O	O	O	X	O	O	O	X	O	X	O	X	O	X	O	X	O
40	O	X	O	O	X	X	O	X	O	X	X	X	X	X	X	X	X	X	O

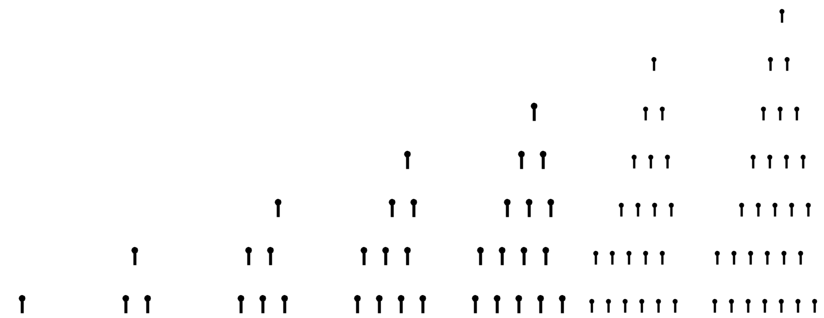
附錄 c：特殊規則必勝圖形（a＝3）







附錄 d：特殊規則勝敗圖



a \ b	1	2	3	4	5	6	7	8
1	×	×	O	O	×	×	O	O
2	×	O	O	×	O	O	×	O
3	×	O	×	×	O	×		