分和累乘再現數產生的方法及其性質探討之推廣與應用

Means of Generation of Split Sum-Squared Recurrent Numbers and its Applications
Generalization of Some Curiously Fascinating Integer Sequences — 幽靈雷劈數・雷霆數

一、研究動機

分和累乘再現數（幽靈雷劈數）這個故事，要從幾年前發現$1/17$循環節中存在非常有趣的特性開始。其實在 2004第三屆旺宏科學獎的「SA3-119：與特殊型質數之倒數關聯的兩平方總和的整數分解」之成果報告書【10】中曾以循環小數玩創意研究，其令人驚訝的結果就已開始醞釀循環小數的奧秘【11】，即下面式子

$$0588235294117647058823529411764705882353$$
$$=05882352941176470588^2+23529411764705882353^2$$

的成立，更可由這個式子引導出更多與$1/17, 1/257, 1/65537$循環節相關的有趣想法；且部分內容引用自 2003第二屆旺宏科學獎入圍決賽的創意說明書（SA2-168：與特殊型質數倒數關聯的兩半部分數字平方總和之研究)。如果了解之前所談的相關內容，就可以更容易延伸主題；在 2003 年台灣國際科展之作品說明書「Concatenating Squares」【9】，亦有談到循環小數，其中包含了以上所提到的兩段之平方和（Some Curiously Fascinating Integer Sequences）

$$05882352941176470588^2+23529411764705882353^2，$$

且所得到的結果竟然是$1/17$循環節中相鄰的兩段數字並列，即「$1/17$ 的趣味」:

$$\frac{1}{17}=0.\overline{0588235294117647}=0.\underline{05882352941176470588}\underline{\underline{23529411764705882352}}94117647\cdots\cdots。$$

真正說到「有趣」的還是「分和累乘再現數（幽靈雷劈數)」，那時並未深入研究【4】，但這次我們試著創意研究【3】之後，深深受到它的「有趣」吸引，引起了我們極大的興趣。為了能了解這份「有趣」，我實際去觀察它們的變化，正式的寫法及說明如下：所謂「分和累乘再現數（幽靈雷劈數)」滿足下面方程

$$S=k^2=(q+r)^2=q\cdot 10^n+r，$$

數字S是在某個適當位置拆解劈成兩個數再相加，其和的平方仍會等於這個數字S，稱之為「分和累乘再現數（幽靈雷劈數)」【8】。

分和累乘再現數（幽靈雷劈數）是在某個適當位置拆解劈成兩個數再相加，其和的平方仍等於這個數。如果不是相加，而是相減又會是怎麼樣的呢？創新創意且首次整合的新結果，提出「雷霆數」與「10^n+1」的質因數分解的關聯性，建立與其單一除數相關的兩個重要同餘關係式。

符號說明：

分和累乘再現數（幽靈雷劈數）$\left\langle S=k^2 \middle| k(n)\right\rangle$是類似3025這樣的數，即一個$2n$位數，把前$n$位數當作一個數加上這個數的後$n$位數，它們之和的平方正好等於這個$2n$位數（2001 第三屆青少年數學國際城市邀請賽：菲律賓-大雅市)，對於奇數位的正整數，偏前（或偏後）的拆解成兩個數，求其和後再平方正好等於原數，仍稱它為「分和累乘再現數（幽靈雷劈數)」，它又像幽靈一般地“回家”來了。

如果不是相加，而且相減的平方又會等於該數的正整數也是必定存在的，把它們稱之為「幽靈雷劈數的迴響：雷霆數」，以符號$\left\langle T=k^2 \middle| k(n)\right\rangle$表示之。

二、研究目的

(一) 描述一個新奇且簡單的方法，以產生分和累乘再現數$\left\langle S=k^2 \middle| k(n)\right\rangle$及其所對應的正整數$k$；這個方法源自於【4】的一個觀察，即$\left\langle S=k^2 \middle| k(n)\right\rangle$中所要對應出的正整數$k$之必要條件為：$k$與$k^2$對模9同餘。

(二) 證明一個分和累乘再現數$\left\langle S=k^2 \middle| k(n)\right\rangle$及其所對應的正整數$k$不是模9的同餘類$[0]$，就是同餘類$[1]$。任一對模9與$k^2$同餘的正整數$k$，能有明確的方法與步驟來找滿足$k^2=q\cdot 10^n+r$與$k=q+r$的任意正整數$q$、$r$及$n$，並用電腦代數軟體套件實現我們所述的方法【1】。

(三) 分和累乘再現數$\left\langle S=k^2 \middle| k(n)\right\rangle$所對應的正整數$k$與其平方數對模9同餘，即模9的同餘類集合即為$\{[0],[1]\}$；因此，分和累乘再現數（幽靈雷劈數）所對應的正整數k就是由這兩種同餘類所組成。

(四) 十進位的分和累乘再現數（幽靈雷劈數）所對應的正整數k能証明與(10^n-1)的單一除數有一對一的對應關係【2】且k與其互補數是成對出現的【4】！能深入探討性質並推廣二進位的偶完全數確為分和累乘再現數（幽靈雷劈數）所對應的正整數k。

(五) 表列介於1和10^{10}的分和累乘再現數$\left\langle S=k^2 \middle| k(n)\right\rangle$所對應之正整數$k$的數列及其模9的同餘類，且【5】列表中的其他數據，都是由$\mathrm{K}_+(10^{10})$所產生的，能完整地證明許多神奇的特性,「分和累乘再現數(幽靈雷劈數)」所對應的正整數k之自然密度為零。

(六) 能將分和累乘再現數（幽靈雷劈數）與雷霆數所對應的正整數k之一些相關性質【3】作創意的說明；此外，在$k=\left|q\pm r\right|$中，q具有偶數性質且r的奇偶性亦可被確定。能結合運用前面所述方法，輕易且相對快速地將指定範圍內的「分和累乘再現數$\left\langle S=k^2 \middle| k(n)\right\rangle$」與「雷霆數$\left\langle T=k^2 \middle| k(n)\right\rangle$」所對應之正整數$k$的數列產生出來。

(七) 完整探討「分和累乘再現數（幽靈雷劈數）」神奇的置換循環排列特性，及歸類新發現的某些有趣「分和累乘再現數（幽靈雷劈數）」與「雷霆數」數列之影蹤。

(八) 從「分和累乘再現數(幽靈雷劈數)」表：20位以內的分和累乘再現數(幽靈雷劈數)推廣【12】「分和累乘再現數（幽靈雷劈數）的迴響」：20位以內的「$\left\langle T=k^2 \middle| k(n)\right\rangle$雷霆數」表。

(九) 創新創意且首次整合的新結果，提出雷霆數$\left\langle T=k^2 \middle| k(n)\right\rangle$與$(10^n+1)$的質因數分解的關聯性，建立所對應的整數與$(10^n+1)$的單一除數有一對一且為映成的對應關係。

(十) 結合網路線上數學資源【7】：程式碼 Mechanical Engineering Program 2001 Publications 及整數數列資料庫【5】；能用電腦代數軟體套件完成模9運算及其應用的程序，使用計算機實現本文研究所述的方法，茲一一概略列舉如下。
The Extended GCD-http://www.hostsrv.com/webmaa/appl/MSP/webm1010/extended_gcd.
Mathcad Code-Mathcad Software. Website：http://www/mathsoft.com/mathcad.
Factorizations of $10^n\mp1$：Contemporary Mathematics 22
「The unitary divisors of $10^n\mp1$」http://www.maths.hscripts.com/primefactor.php
Eric W. Weisstein. "*Kaprekar Number*." From MathWorld-- A Wolfram Web Resource

三、研究設備及器材

(一) 紙筆若干	(二) 個人電腦二台	(三) 人腦兩顆
(四) 滑鼠・印表機	(五) 工程用計算機	(六) 電腦代數軟體套件 Mathcad

四、研究過程與方法

(一) 文獻探討【4】【12】「里程指示牌-分和累乘再現數（幽靈雷劈數）」

查找這類數字的辦法很多【7】，從初等數學到高等數學，應有盡有【5】，已有一些小冊子與文章探討過它及許多其它數字的特性，在 David Wells 的奇妙有趣的數字字典【6】中也有收錄進去，此主題之創意是值得研究的對象。

http://mathworld.wolfram.com/KaprekarNumber.html
http://en.wikipedia.org/wiki/Kaprekar_number
http://home.earthlink.net/~mrob/pub/math/seq-kaprekar.html
http://chancezoo.soyuan.net/qixiang/lps.htm
http://www.cs.uwaterloo.ca/journals/JIS/VOL3/iann2a.html

下文介紹兩種最簡單的辦法。第一種是日本趣味數學名家藤村幸三郎的解法。設四位數的前兩位為q，後兩位為r，由「分和累乘再現數（幽靈雷劈數）」的特性可列出式子：

$$k^2=(q+r)^2=q\cdot 10^2+r$$

即

$$q^2+2(r-50)q+(r^2-r)=0$$

把它看成q的一元二次方程，並解出$q=(50-r)\pm\sqrt{2500-99r}$。因為$(2500-99r)$必須是完全平方數，故$r$只能等於$25$或$1$，抓住這個要點跟蹤追擊，我們即可求出四個分和累乘再現數：2025、3025與9801。其中還有一個0001，但根據一般習慣，不可視為四位數，故從略。

第二種辦法是日本淺野英夫的解法。設四位數的前兩位與後兩位分別為q、r，於是有

$$(q+r)^2=10^2\cdot q+r=q+r+(10^2-1)q，$$

故

$$k(k-1)=(q+r)(q+r-1)=(10^2-1)q，$$

從而可看出$(q+r)$與$(q+r-1)$中一個是9的倍數，一個是11的倍數。這樣就很容易找出合適的候補者是45、55與99，從而可發現三個分和累乘再現數（幽靈雷劈數）：2025、3025與9801。分和累乘再現數不限於四位，其他位數也有。我們不妨再隨便舉出一個八位數，它是由美國數學家亨特所發現的，此數等於60481729，把它分成前後兩段並相加求和，將可得到

$$6048+1729=7777，$$

而

$$7777^2=60481729。$$

分和累乘再現數（幽靈雷劈數）它又像幽靈一般地“回家”來了！這就是令我們覺得奇妙、有趣的原因所在【8】。

(二) 簡介

分和累乘再現數（幽靈雷劈數）的定義如下：

數字S是在某個適當位置拆解劈成兩個數再相加，所得到的和為k（n位數），且k的平方仍會等於該數字S，稱S為「分和累乘再現數（幽靈雷劈數）」，以符號$\left\langle S=k^2\middle|k(n)\right\rangle$表示之；即數字$S$可分成前後兩段並相加求和，可得到$k$（$n$位數），而平方後它又像幽靈一般地“回家”來了。一個分和累乘再現數$\left\langle S=k^2\middle|k(n)\right\rangle$滿足下列二個方程式（定義）：

$$\begin{cases} S = k^2 = q \cdot 10^n + r \\ k = q + r \end{cases} \quad （k \ge 1 \text{ 且 } n \in \mathrm{N}），$$

其中$q \in \mathrm{N}$且$0 \le r < 10^n$（$r \in \mathrm{N}$）；而對於$k > 1$，我們要求$q > 0$且$0 < r < 10^n$，r是可以少於n個位數。

引用傳統的說法，對所有$n \ge 1$而言，1是分和累乘再現數（幽靈雷劈數），因為

$$\begin{cases} 1^2 = 0 \cdot 10^n + 1 \\ 1 = 0 + 1 \end{cases};$$

規定0與形如10的偶乘冪的數都不是分和累乘再現數（幽靈雷劈數）。因為，

$$\begin{cases} \underbrace{999\cdots999}_{n\text{個}9}{}^2 = \underbrace{999\cdots998}_{(n-1)\text{個}9}\underbrace{000\cdots001}_{(n-1)\text{個}0} \\ \underbrace{999\cdots998}_{(n-1)\text{個}9} + \underbrace{000\cdots001}_{(n-1)\text{個}0} = \underbrace{999\cdots999}_{n\text{個}9} \end{cases} \quad (n \ge 1)，$$

也就是說，$(10^n - 1)^2$是分和累乘再現數（幽靈雷劈數），滿足了下列二個方程式：

$$\begin{cases} (10^n - 1)^2 = (10^n - 2) \cdot 10^n + 1 \\ 10^n - 1 = (10^n - 2) + 1 \end{cases}$$

其中$n \in \mathrm{N}$。事實上，在【2】中曾特別設計並提出關於此有趣主題的“略去法”，可從數字$(10^n - 1)$的質因數分解中來產生任意大小的「分和累乘再現數（幽靈雷劈數）」。本文中，我們將在「$(10^n - 1)$的單一除數」與「分和累乘再現數（幽靈雷劈數）」之間建立一個一對一且為映成的對應關係並深入加以推廣。在此，a是m的單一除數，意即若$ab = m$且$(a,b) = 1$。

(三) 主要結果（I）：$\langle S = k^2 | k(n) \rangle$與$(10^n - 1)$的單一除數會有一對一且是映成的對應關係

分和累乘再現數$\langle S = k^2 | k(n) \rangle$所對應的正整數$k$與$(10^n - 1)$的單一除數之間必可建立一個一對一且為映成的對應關係。對每一個正整數$N > 1$，使$\mathrm{K}_+(N)$代表滿足下列條件的正整數k的集合：存在正整數q與r，使得

$$\begin{cases} S = k^2 = q \cdot N + r \\ k = q + r \end{cases} \quad （0 \le r < N \text{ 且 } r \in \mathrm{N}）；$$

依照慣例，我們並不考慮$k = N$（則$q = N$，而且規定$r = 0$）的情形，由原來定義的二個方程式，可得

$$k(k-1) = (N-1)q；$$

既然不考慮上述$k = N$的情況，則有$1 \le k \le N - 1$（因為若$k \ge N$，由上式可推得$q > k$，此與$k = q + r$相抵觸）。且集合$\mathrm{K}_+(N)$是非空的，因為$1 \in \mathrm{K}_+(N)$。我們假設$k \in \mathrm{K}_+(N)$，既然$(k, k-1) = 1$，由

$$k(k-1) = (N-1)q$$

可知必定存在滿足$dd' = N - 1$及$(d, d') = 1$之正整數d及d'，使得$d | k$且$d' | k - 1$。再令$k' = N - k$，因為$1 \le k \le N - 1$，所以$k' > 0$；既然$k' = (N-1) - (k-1)$，所以$d' | k'$；因此，存在正整數m及m'，使得$k = dm$及$k' = d'm'$，推得

$$k + k' = dm + d'm' = N = dd' + 1；$$

且以下的結果是不難證明的。

The Extended GCD：必存在整數 m 及 m'，可將 d 與 d' 之最大公因數 $(d,d')=1$ 表示成如下的線性組合

$$d\,m+d'\,m'=(d,d')=1，$$

所欲求的整數 m 及 m' 可寫成一般通解型式的線性參數解，參數經特殊整數的取值（取 0 或 1），即能找到合乎條件的整數 m 及 m'。
http://www.hostsrv.com/webmaa/app1/MSP/webm1010/extended_gcd

定　義：若 $(d,d')=1$，令 $\mathrm{Inv}^{+1}(d,d')$ 代表滿足

$$d\,m\equiv 1\,(\mathrm{mod}\;d')$$

的最小正整數 m，則 $m=\mathrm{Inv}^{+1}(d,d')$ 成立，若且唯若

$$d\,m\equiv 1\,(\mathrm{mod}\;d')\text{ 且 }1\le m<d'\text{。}$$

引理一：設 $(d,d')=1$，則

(1) $m=\mathrm{Inv}^{+1}(d,d')$ 且 $m'=\mathrm{Inv}^{+1}(d',d)$，若且唯若

$$d\,m+d'\,m'=d\,d'+1，$$

其中 $m\,(1\le m<d')$ 及 $m'\,(1\le m'<d)$ 是正整數；

(2)更進一步，可得

$$k=d\,m=d\cdot\mathrm{Inv}^{+1}(d,d')\text{ 與 }k'=d'\,m'=d'\cdot\mathrm{Inv}^{+1}(d',d)\text{。}$$

反之，令 $d\,d'=N-1$，根據 $(d,d')=1$，令 $m=\mathrm{Inv}^{+1}(d,d')$ 及 $m'=\mathrm{Inv}^{+1}(d',d)$，則由引理，可得 $d\,m+d'\,m'=d\,d'+1=N$，因此

$$\begin{aligned}d^2m^2&=(N-d'\,m')^2\\&=N^2-N\,d'\,m'-(d\,m+d'\,m')\,d'\,m'+(d'\,m')^2\\&=N^2-N\,d'\,m'-m\,m'\,d\,d'\\&=(N-d'\,m'-m\,m')\,N+m\,m'\end{aligned}，$$

所以

$$\begin{cases}(d\,m)^2=(N-d'\,m'-m\,m')\,N+m\,m' & (1\le m\,m'\le N-1)\\ d\,m=(N-d'\,m'-m\,m')+m\,m'\end{cases}；$$

也就是說，$d\,m$ 滿足了原來的兩個方程式，其中 $q=N-d'\,m'-m\,m'$ 且 $r=m\,m'$，因此 $d\,m\in\mathrm{K}_+(N)$；且基於對稱性，$d'm'$ 也在 $\mathrm{K}_+(N)$ 中。據此，可證明下列主要結果：

定理一：$\mathrm{K}_+(N)$

元素 k 在 $\mathrm{K}_+(N)$ 中，若且唯若存在 $(N-1)$ 的某一個單一除數 d，使得

$$k=d\cdot\mathrm{Inv}^{+1}\left(d,\frac{(N-1)}{d}\right)；$$

且 k 與其互補數是成對出現的，即若 $k\in\mathrm{K}_+(N)$，則 $(N-k)\in\mathrm{K}_+(N)$。

使 $\Omega(\mathrm{M})$ 代表可以整除 M 的質數之個數【1】，則 M 有 $2^{\Omega(\mathrm{M})}$ 個單一除數；以下的結果顯然是成立的：$\mathrm{K}_+(N)$ 包含 $2^{\Omega(N-1)}$ 個元素，且能證明「分和累乘再現數（幽靈雷劈數）」所對應的正整數 k 之自然密度為零【3】。慣例中，要求 $\mathrm{K}_+(N)$ 不包含 N 是為了要保證 $\mathrm{K}_+(N)$ 的元素與 $(N-1)$ 的單一除數間的一對一且是映成的對應關係。

1和 $(10^n-1)^2$ 都是分和累乘再現數（幽靈雷劈數），且其所對應的正整數 k 是會對應到 (10^n-1) 的單一除數【1】，這也就是我們允許兩者都是分和累乘再現數（幽靈雷劈數）的原因；對任何 $n\ge 1$ 而言，10^{2n} 不是分和累乘再現數 $\left\langle S=k^2\,\middle|\,k(n)\right\rangle$，因其所對應的正整數 k 為 10^n 且對原來的二個方程式（取 $N=10^n$）來說是明顯的解答。

(四) 主要結果（II）：模9運算的應用與分和累乘再現數（幽靈雷劈數）產生的方法

本文將再探討一個新方法：模9運算的應用，以產生小於或等於一給定數字所有的分和累乘再現數$\left\langle S=k^2 \middle| k(n)\right\rangle$及其所對應的正整數$k$。本方法開始時即觀察到正整數$k$若滿足分和累乘再現數$\left\langle S=k^2 \middle| k(n)\right\rangle$所對應的正整數，其條件之一是$k$與$k^2$對模9是同餘的【8】；也就是說，其模9同餘類的集合即為$\{[0],[1]\}$，k與k^2不是屬於對模9的同餘類$[0]$，就是屬於同餘類$[1]$。

引理二：分和累乘再現數$\left\langle S=k^2 \middle| k(n)\right\rangle$所對應的正整數$k$能滿足

$$k^2 \equiv k\ (\bmod (10^n-1))，$$

並推得分和累乘再現數（幽靈雷劈數）所對應的正整數k能使

$$k^2 \equiv k\ (\bmod 9)$$

是成立的。

證明：

原來定義的二個方程式，可得：

$$k^2 = q\cdot(10^n-1)+(q+r)，$$

故

$$k^2 \equiv (q+r)\ (\bmod (10^n-1))，$$

即

$$k^2 \equiv k\ (\bmod (10^n-1))。$$

從上所述，分和累乘再現數$\left\langle S=k^2 \middle| k(n)\right\rangle$所對應的正整數$k$之平方的定義可知：除了$k=1$（此時，$q=0$且$r=1$）的情況外，$k^2<10^n\ (n\in \mathrm{N})$是成立的。

定理二：若$t\equiv k\ (\bmod 9)$，則t屬於分和累乘再現數$\left\langle S=k^2 \middle| k(n)\right\rangle$所對應的正整數$k$的同餘類$[0]$或$[1]$，意即$t\in\{[0],[1]\}$。

證明：

對於正整數k、s及t，必可寫成下面式子：

$$k=9\cdot s+t，$$

我們要求$0\le t\le 8$且$t\equiv k\ (\bmod 9)$，因此

$$k^2=9^2\cdot s^2+2\cdot 9\cdot s\cdot t+t^2，$$

即

$$k^2\equiv t^2\ (\bmod 9)；$$

由$\begin{cases} k^2\equiv k\ (\bmod (10^n-1)) \\ t\equiv k\ (\bmod 9) \\ k=9\cdot s+t\quad (0\le t\le 8) \\ k^2\equiv t^2\ (\bmod 9)\end{cases}$知，若$k$是分和累乘再現數$\left\langle S=k^2 \middle| k(n)\right\rangle$所對應的正整數，則

$$t\equiv t^2\ (\bmod 9)\quad (0\le t\le 8)$$

但此式只有在$t=0$或$t=1$時才會成立；所以，當k是分和累乘再現數$\left\langle S=k^2 \middle| k(n)\right\rangle$所對應的正整數時，模9的同餘類之集合必為$\{[0],[1]\}$。

(五) 產生分和累乘再現數$\left\langle S=k^2 \middle| k(n)\right\rangle$所對應的正整數$k$的方法

設正整數k滿足

$$\begin{cases} t \equiv k \pmod 9 \\ t \equiv t^2 \pmod 9 \end{cases},$$

由「定理二」知：其中$t \in \{[0],[1]\}$，則對既定的k與n，原來所定義的二個方程式可被用來解所有可能的r值，且以$r(n)$表示之。刪除q後可得：

$$r(n)=\frac{k(10^n-k)}{10^n-1} \quad (n=1,\ldots,n_{\max})\text{；}$$

因此，使得k是分和累乘再現數$\left\langle S=k^2 \middle| k(n)\right\rangle$所對應的正整數時之條件為$r(n)$必須為正整數值，且在方程式中的次冪數值$n$是從1到最大值$n_{\max}$，其$n_{\max}$的值由轉換方程式

$$k^2=q\cdot 10^n+r$$

決定。對$r>0$且$q>0$及對單調遞增的對數函數，我們有

$$10^n=\frac{(k^2-r)}{q} \Rightarrow n=\log_{10}\left[\frac{(k^2-r)}{q}\right]$$

$$\Rightarrow n<\log_{10}[k^2]=2\log_{10}[k]\text{，}$$

$$\Rightarrow n_{\max}=ceil(2\log_{10}[k])$$

其中$ceil(x)$為大於或等於x的最小整數。

五、研究結果

(一) 分和累乘再現數$\langle S=k^2 \mid k(n)\rangle$是指在某一個位置上把它拆解劈成兩個整數，亦可稱之為「幽靈雷劈數」，這兩個數的和的平方仍然等於這個數。設截斷的位置在右起第n和第$(n+1)$位之間，截成的兩個數為q與r，即該分和累乘再現數（幽靈雷劈數）等於$q\cdot 10^n+r$；則它符合以下關係：

$$q\cdot 10^n+r=(q+r)^2=q^2+2qr+r^2\cdots\cdots(1)，$$

由式(1)知，當r已知時，該分和累乘再現數（幽靈雷劈數）的q值可以從下列方程式解出來：

$$q^2+(2r-10^n)q+(r^2-r)=0\cdots\cdots(2)；$$

這是關於變數q的二次方程式，它有兩個根q_1、q_2，這就是為什麼分和累乘再現數（幽靈雷劈數）總是成對的緣故。但要使(2)的根q_1、q_2是有效的自然數，必須使其判別式等於平方數：

$$(2r-10^n)^2-4(r^2-r)=10^{2n}-4r(10^n-1)=c^2\cdots\cdots(3)；$$

由此式解出r：

$$r=\frac{(10^n+c)(10^n-c)}{4(10^n-1)}\cdots\cdots(4)，$$

只要找出一個能使(4)式的r是整數的整數c，求出(3)式的兩個根q_1、q_2(成對出現)：

$$(q_1,q_2)=\left(\frac{-(2r-10^n)\pm c}{2},\frac{10^n\mp c}{2}-r\right)\cdots\cdots(5)；$$

即找到了一對分和累乘再現數（幽靈雷劈數）：

$$(q_1\cdot 10^n+r,q_2\cdot 10^n+r)。$$

現在代替從1檢查到10^{14}找到全部分和累乘再現數（幽靈雷劈數），只要從1檢查到10^7，找使(4)式的r是整數的c值，微機只要些許分鐘就完成了。由(5)式中我們可得每對分和累乘再現數（幽靈雷劈數）之乘積

$$k_1k_2=(q_1+r)(q_2+r)=\frac{(10^{2n}-c^2)}{4}，$$

再把(3)式的$c^2=10^{2n}-4r(10^n-1)$代入可得：

$$k_1k_2=(q_1+r)(q_2+r)=r(10^n-1)，$$

因為(10^n-1)是9的倍數，即每對分和累乘再現數（幽靈雷劈數）中，至少有一個必是9的倍數。當n是偶數時，(10^n-1)還是11的倍數，即兩對分和累乘再現數(幽靈雷劈數)中，必至少有一個是11的倍數。這就是前面提到的找分和累乘再現數(幽靈雷劈數)的經驗方法所依據的規律。這個規律也可以由所列的分和累乘再現數表（幽靈雷劈數表）來進行驗證：在這66個分和累乘再現數（幽靈雷劈數）中，其和可同時被9和11整除的占15%，能被9整除的占52%，能被11整除的占32%。但是還有32%既不能被9整除也不能被11整除。

(二) 分和累乘再現數$\langle S=k^2 \mid k(n)\rangle$所對應的正整數$k$與其平方數$k^2$對模9是同餘的；甚且，模9同餘類的集合即為$\{[0],[1]\}$。因此，$\langle S=k^2 \mid k(n)\rangle$中所對應的正整數$k$就是由這兩種同餘類所組成。此外，在$k=q+r$中，$q$具有偶數性質，且$r$的奇偶性亦可被確定。發現其中的樂趣與一些特性，並探討分和累乘再現數（幽靈雷劈數）的結構、計數及主要結果與應用。

(三) 表列 $\left\langle S=k^2 \middle| k(n)\right\rangle$ 其所對應之正整數 $k\,(1\le k<10^7)$ 與 $10^n-1\ (1\le n\le 7)$ 的單一除數

令 $N=10^n$，其中 $n\ge 1$，可由主要結果（I）「定理一」推得下列式子

$$\mathrm{K}_+(10^n)=\left\{ d\cdot \mathrm{Inv}^{+1}(d\,,d'):d\,d'=10^n-1,(d\,,d')=1\right\}$$
$$=\left\{ d\cdot \mathrm{Inv}^{+1}\left(d\,,\frac{(10^n-1)}{d}\right):\left(d\,,\frac{(10^n-1)}{d}\right)=1\right\},$$

得出分和累乘再現數 $\left\langle S=k^2 \middle| k(n)\right\rangle$ 及其所對應的正整數 k 的集合，由推論可知和為 10^n 的分和累乘再現數（幽靈雷劈數）所對應的正整數 k 都是成對出現的（「定理一」之完全性）。「(10^n-1) 的單一除數」與「分和累乘再現數（幽靈雷劈數）所對應的正整數 k」之間必定可建立一個一對一且為映成的對應關係，從 (10^n-1) 的質因數分解中可得出「分和累乘再現數（幽靈雷劈數）」及其所對應的正整數 k；因此，沒有必要列出更多的 S 與正整數 k。

n	a	k	n	a	k
1	1	1	6	2079	187110
1	9	9	6	13	461539
2	1	1	6	351	609687
2	9	45	6	91	318682
2	11	55	6	2457	466830
2	99	99	6	143	643357
3	1	1	6	3861	791505
3	27	297	6	1001	500500
3	37	703	6	27027	648648
3	999	999	6	37	351352
4	1	1	6	999	499500
4	9	2223	6	259	208495
4	11	2728	6	6993	356643
4	99	4950	6	407	533170
4	101	5050	6	10989	681318
4	909	7272	6	2849	390313
4	1111	7777	6	76923	538461
4	9999	9999	6	481	812890
5	1	1	6	12987	961038
5	9	77778	6	3367	670033
5	41	4879	6	90909	818181
5	369	82656	6	5291	994708
5	271	17344	6	142857	142857
5	2439	95121	6	37037	851851
5	11111	22222	6	999999	999999
5	99999	99999	7	1	1
6	1	1	7	2151	4927941
6	27	148149	7	4649	5072059
6	7	857143	7	1111111	4444444
6	189	5292	7	9	5555556
6	11	181819	7	41841	627615
6	297	329967	7	239	9372385
6	77	38962	7	9999999	9999999

(四) 根據「定理一」：表列分和累乘再現數$\left\langle S=k^{2}\middle|k(n)\right\rangle$所有對應正整數$k$的配對，且其成對之和皆為10的次冪；也就是說，和為10^{n}的兩數能找到其所對應正整數的配對。

「分和累乘再現數（幽靈雷劈數）S所對應的正整數k」		10^{n}「配對之和為10的次冪」
1	**9**	**10**
1	99	100
45	**55**	**100**
1	999	1000
297	**703**	**1000**
1	9999	10000
2223	7777	10000
2728	7272	10000
4950	**5050**	**10000**
1	99999	100000
4879	95121	100000
17344	82656	100000
22222	**77778**	**100000**
1	999999	1000000
5292	994708	1000000
38962	961038	1000000
181819	**818181**	**1000000**
142857	857143	1000000
148149	851851	1000000
187110	812890	1000000
208495	791505	1000000
318682	681318	1000000
329967	670033	1000000
351352	648648	1000000
356643	643357	1000000
390313	609687	1000000
461539	538461	1000000
466830	533170	1000000
499500	**500500**	**1000000**
1	9999999	10000000
627615	9372385	10000000
4927941	5072059	10000000
5555556	**4444444**	**10000000**
5555555555555556	**4444444444444444**	**10000000000000000**
⋮	⋮	⋮
1111111111	**8888888889**	**10000000000**
1111111111111111111	**8888888888888888889**	**10000000000000000000**
⋮	⋮	⋮
22222222222222	**77777777777778**	**100000000000000**
22222222222222222222222	**77777777777777777777778**	**100000000000000000000000**
⋮	⋮	⋮
49995000	**50005000**	**100000000**
4999950000	**5000050000**	**10000000000**
⋮	⋮	⋮

(五) 方法的實現：

模9運算的應用與分和累乘再現數$\left\langle S=k^2 \middle| k(n)\right\rangle$產生的方法，我們由主要結果（II）「定理二」知：對一給定的正整數k，有

$$\begin{cases} t \equiv k \pmod 9 \\ t \equiv t^2 \pmod 9 \end{cases},$$

是建立分和累乘再現數$\left\langle S=k^2 \middle| k(n)\right\rangle$所對應的正整數$k$的第一步驟，接下來的步驟則是方程

$$\begin{cases} r(n)=\dfrac{k(10^n-k)}{10^n-1} \quad (n=1,\ldots,n_{\max}) \\ 10^n=\dfrac{(k^2-r)}{q} \Rightarrow n=\log_{10}\left[\dfrac{(k^2-r)}{q}\right] \\ \qquad\qquad \Rightarrow n<\log_{10}[k^2]=2\log_{10}[k] \\ \qquad\qquad \Rightarrow n_{\max}=ceil(2\log_{10}[k]) \end{cases};$$

最後，若有必要，則為方程

$$\begin{cases} S=k^2=q\cdot 10^n+r \\ k=q+r \end{cases} \quad (k\ge 1 \text{ 且 } n\in \mathrm{N}),$$

本方法在此是以電腦代數軟體套件 Mathcad 完成的，程式碼於附錄中；以下是使用此方法產生所有介於1與10^7間所有分和累乘再現數$\left\langle S=k^2 \middle| k(n)\right\rangle$所對應的正整數$k$之列表，且方程式相對應的整數$q$、$r$及$n$亦在列表中。

(六) 去9法

分和累乘再現數$\left\langle S=k^2 \middle| k(n)\right\rangle$所對應之正整數$k$的數列是由兩種正整數組成，分別對應於模9的同餘類$[0]$及$[1]$。在模9之同餘類的計算中，一個極為熟悉且容易證明的「去9法」可被用在分和累乘再現數$\left\langle S=k^2 \middle| k(n)\right\rangle$所對應之正整數$k$上。例如：

$$\begin{cases} 297 \pmod 9 \equiv (2+9+7) \pmod 9 \equiv 0 \\ 703 \pmod 9 \equiv (7+0+3) \pmod 9 \equiv 1 \\ 4879 \pmod 9 \equiv (4+8+7+9) \pmod 9 \equiv 1 \\ 95121 \pmod 9 \equiv (9+5+1+2+1) \pmod 9 \equiv 0 \\ \quad \vdots \end{cases};$$

對分和累乘再現數$\left\langle S=k^2 \middle| k(n)\right\rangle$所對應之正整數$k$，可寫成

$$k=\boxed{a_p}\boxed{a_{p-1}}\boxed{a_{p-2}}\cdots\boxed{a_3}\boxed{a_2}\boxed{a_1},$$

意即

$$k=\sum_{j=1}^{p} a_j\cdot 10^{(j-1)};$$

可知，若非

$$\left(\sum_{j=1}^{p} a_j\right) \pmod 9 \equiv 0,$$

就是

$$\left(\sum_{j=1}^{p} a_j\right) (\bmod 9) \equiv 1，$$

完整列表是對應介於1與10^7的60個分和累乘再現數(幽靈雷劈數)所對應之正整數k的數列及其模9同餘類，且所對應出的正整數k之質數分解亦在完整表列中。

(七) (1)有趣的分和累乘再現數$\left\langle S = k^2 \middle| k(n) \right\rangle$之列表(14位以內的「幽靈雷劈數」表)。

(2)根據「定理二」：S所對應的正整數k及其k是模9的同餘類($1 \le k < 10^7$)。

i	$\left\langle S = k^2 \middle\| k(n) \right\rangle$	k	q	r	n	$t \equiv k\ (\bmod 9)$	k 的質因數分解
1	1	1	**0**	1	1	[1]	1
2	**8**1	9	**8**	1	1	[0]	3^2
3	**20**25	45	**20**	25	2	[0]	$3^2 \cdot 5$
4	**30**25	55	**30**	25	2	[1]	$5 \cdot 11$
5	**98**01	99	**98**	01	2	[0]	$3^2 \cdot 11$
6	**88**209	297	**88**	209	3	[0]	$3^3 \cdot 11$
7	**494**209	703	**494**	209	3	[1]	$19 \cdot 37$
8	**998**001	999	**998**	001	3	[0]	$3^3 \cdot 37$
9	**494**1729	2223	**494**	1729	4	[0]	$3^2 \cdot 13 \cdot 19$
10	**744**1984	2728	**744**	1984	4	[1]	$2^3 \cdot 11 \cdot 31$
11	**238**04641	4879	**238**	04641	5	[1]	$7 \cdot 17 \cdot 41$
12	**2450**2500	4950	**2450**	2500	4	[0]	$2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11$
13	**2550**2500	5050	**2550**	2500	4	[1]	$2 \cdot 5^2 \cdot 101$
14	**28**005264	5292	**28**	005264	6	[0]	$2^2 \cdot 3^3 \cdot 7^2$
15	**5288**1984	7272	**5288**	1984	4	[0]	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 101$
16	**6048**1729	7777	**6048**	1729	4	[1]	$7 \cdot 17 \cdot 101$
17	**9998**0001	9999	**9998**	0001	4	[0]	$3^2 \cdot 11 \cdot 101$
18	**3008**14336	17344	**3008**	14336	5	[1]	$2^6 \cdot 271$
19	**4938**17284	22222	**4938**	17284	5	[1]	$2 \cdot 41 \cdot 271$
20	**1518**037444	38962	**1518**	037444	6	[1]	$2 \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 23$
21	**60494**17284	77778	**60494**	17284	5	[0]	$2 \cdot 3^2 \cdot 29 \cdot 149$
22	**68320**14336	82656	**68320**	14336	5	[0]	$2^5 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 41$
23	**90480**04641	95121	**90480**	04641	5	[0]	$3^3 \cdot 13 \cdot 271$
24	**99998**00001	99999	**99998**	00001	5	[0]	$3^2 \cdot 41 \cdot 271$
25	**20408**122449	142857	**20408**	122449	6	[0]	$3^3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$
26	**21948**126201	148149	**21948**	126201	6	[0]	$3^4 \cdot 31 \cdot 59$
27	**33058**148761	181819	**33058**	148761	6	[1]	$11 \cdot 16529$
28	**35010**152100	187110	**35010**	152100	6	[0]	$2 \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$
29	**43470**165025	208495	**43470**	165025	6	[1]	$5 \cdot 7^2 \cdot 23 \cdot 37$
30	**101558**217124	318682	**101558**	217124	6	[1]	$2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 103$
31	**108878**001089	329967	**108878**	221089	6	[0]	$3^3 \cdot 11^2 \cdot 101$
32	**123448**227904	351352	**123448**	227904	6	[1]	$2^3 \cdot 37 \cdot 1187$
33	**127194**229449	356643	**127194**	229449	6	[0]	$3^4 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 37$

34	**152344**237969	390313	**152344**	237969	6	[1]	$7 \cdot 11 \cdot 37 \cdot 137$
35	**213018**248521	461539	**213018**	248521	6	[1]	$13^2 \cdot 2731$
36	**217930**248900	466830	**217930**	248900	6	[0]	$2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 19$
37	**249500**250000	499500	**249500**	250000	6	[0]	$2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 37$
38	**250500**250000	500500	**250500**	250000	6	[1]	$2^2 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$
39	**284270**248900	533170	**284270**	248900	6	[1]	$2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 37 \cdot 131$
40	**289940**248521	538461	**289940**	248521	6	[0]	$3^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 37$
41	**371718**237969	609687	**371718**	237969	6	[0]	$3^5 \cdot 13 \cdot 193$
42	**39390**0588225	627615	**39390**	0588225	7	[0]	$3^3 \cdot 5 \cdot 4649$
43	**413908**229449	643357	**413908**	229449	6	[1]	$11^2 \cdot 13 \cdot 409$
44	**420744**227904	648648	**420744**	227904	6	[0]	$2^3 \cdot 3^4 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$
45	**448944**221089	670033	**448944**	221089	6	[1]	$7 \cdot 13 \cdot 37 \cdot 199$
46	**464194**217124	681318	**464194**	217124	6	[0]	$2 \cdot 3^3 \cdot 11 \cdot 31 \cdot 37$
47	**626480**165025	791505	**626480**	165025	6	[0]	$3^3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 41$
48	**660790**152100	812890	**660790**	152100	6	[1]	$2 \cdot 5 \cdot 13^3 \cdot 37$
49	**669420**148761	818181	**669420**	148761	6	[0]	$3^5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37$
50	**725650**126201	851851	**725650**	126201	6	[1]	$7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 23 \cdot 37$
51	**734694**122449	857143	**734694**	122449	6	[1]	$7 \cdot 122449$
52	**923594**037444	961038	**923594**	037444	6	[0]	$2 \cdot 3^2 \cdot 13 \cdot 37$
53	**989444**005264	994708	**989444**	005264	6	[1]	$2^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37 \cdot 47$
54	**999998**000001	999999	**999998**	000001	6	[0]	$3^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$
55	**1975308**2469136	4444444	**1975308**	2469136	7	[1]	$2^2 \cdot 239 \cdot 4649$
56	**2428460**2499481	4927941	**2428460**	2499481	7	[0]	$3^2 \cdot 29 \cdot 79 \cdot 239$
57	**2572578**2499481	5072059	**2572578**	2499481	7	[1]	$1091 \cdot 4649$
58	**3086420**2469136	5555556	**3086420**	2469136	7	[0]	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 154321$
59	**8784160**0588225	9372385	**8784160**	0588225	7	[1]	$5 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 31 \cdot 239$
60	**9999998**0000001	9999999	**9999998**	0000001	7	[0]	$3^2 \cdot 239 \cdot 4649$
The Extended GCD（http://www.hostsrv.com/webmaa/app1/MSP/webm1010/extended_gcd）							

六、討論及其應用

(一)「雷霆數」產生的方法及其性質探討之推廣與應用

(1) 楔子

創新創意且首次整合的新結果，提出「雷霆數」與10^n+1的質因數分解的關聯性，建立與其單一除數相關的兩個重要同餘關係式，與「定理一」中所定義的同餘式及相關引理內容稍有差異，但結果是不難證明的。分和累乘再現數（幽靈雷劈數）是在某個適當位置拆解劈成兩個數再相加，其和的平方仍等於這個數。如果不是相加，而是相減又會是怎麼樣的呢？

$$\begin{cases} T = k^2 = q\cdot 10^n + r \\ k = |q-r| \end{cases} \quad (\ k \ge 1 \text{ 且 } n \in \mathrm{N}\ ),$$

也就是說，劈成兩個數後，它們的差的平方等於該數的正整數也應該是存在的，編個程序找了一下，果然是有的，把它們叫作「雷劈數的迴響：雷霆數」。雷霆數比原來的雷劈數少了些許，它們也是成對出現的。則它符合以下關係：

$$k^2 = (q-r)^2 = q\cdot 10^n + r \cdots\cdots(1)\ ,$$

由式(1)知，當r已知時，該雷霆數的q值可以從下列方程式解出來：

$$q^2 - (2r+10^n)q + (r^2 - r) = 0 \cdots\cdots(2)\ ;$$

這是關於變數q的二次方程式，它有兩個根q_1、q_2，這就是為什麼雷霆數總是成對的緣故。但要使(2)的根q_1、q_2是有效的自然數，必須使其判別式等於平方數：

$$(2r+10^n)^2 - 4(r^2-r) = 10^{2n} + 4r(10^n+1) = d^2 \cdots\cdots(3)\ ;$$

由此式解出r：

$$r = \frac{(d+10^n)(d-10^n)}{4(10^n+1)} \cdots\cdots(4)\ ,$$

只要找出一個能使(4)式的r是整數的d值，並求出(3)式兩個成對的根q_1、q_2：

$$(q_1, q_2) = \left(\frac{(2r+10^n) \pm d}{2}, \frac{10^n \mp d}{2} + r \right) \cdots\cdots(5)\ ;$$

即找到了一對雷霆數

$$(q_1\cdot 10^n + r,\ q_2\cdot 10^n + r)\ ,$$

現在代替從1檢查到10^{20}找到全部雷霆數，只要從1檢查到10^{10}，最後可得每對雷霆數之積的絕對值：

$$|\,k_1 k_2\,| = |\,(q_1 - r)(q_2 - r)\,| = r(10^n+1)\ 。$$

(2) 分和累乘再現數（雷劈數）的迴響【12】：雷霆數

①1與$(10^n+1)^2$都是雷霆數，但規定0與形如10的偶乘冪的數都不是雷霆數，它們是平凡的雷霆數（顯明之解答）；這是為了要保證雷霆數所對應的整數能與10^n+1的單一除數能建立一對一且是映成的對應關係。

②根據所定義的兩個方程

$$\begin{cases} T = k^2 = q\cdot 10^n + r \\ k = |q-r| \end{cases} \quad (\ k \ge 1 \text{ 且 } n \in \mathrm{N}\ ),$$

其中$q \in N$且$0 < r < 10^n$。由以上結果可知成對的雷霆數所對應整數k的配對必為一正一負，且成對之和皆為10的乘冪，成對之積的絕對值為10^n+1的倍數。

(3) 主要結果（III）：$\langle T=k^2 \,|\, k(n)\rangle$ 與 (10^n+1) 的單一除數會有一對一且是映成的對應

雷霆數 $\langle T=k^2 \,|\, k(n)\rangle$ 所對應的正整數 k 與 (10^n+1) 的單一除數之間必可建立一個一對一且為映成的對應關係。對每一個正整數 $N>1$，使 $\mathrm{K}\_(N)$ 代表滿足下列條件的正整數 k 的集合：存在正整數 q 與 r（$0\le r<N$ 且 $r\in\mathrm{N}$），使得

$$\begin{cases} T=k^2=q\cdot N+r \\ k=\left| q-r \right| \end{cases} \quad （k\ge 1 \text{ 且 } n\in\mathrm{N}），$$

依照慣例，我們並不考慮 $k=N$（則 $q=N$，而且規定 $r=0$）的情形，由所定義的二個方程式，討論「情況 1」與「情況 2」如下：

$\boxed{\text{情況 1}}$：若 $q>r\ge 1$，可得

$$(k+1)k=(N+1)q\ ;$$

既然不考慮 $k=N$ 的情形，則有 $k\ge N+1$（因為若 $k\le N$，由上式可得 $q<k\le N$，此與 $k=q-r$ 相抵觸）。且集合 $\mathrm{K}\_(N)$ 是非空的，因為

$$1\in\mathrm{K}\_(N)\ 。$$

假設 $k\in\mathrm{K}\_(N)$，既然 $(k+1,k)=1$，由

$$(k+1)k=(N+1)q$$

可知必存在滿足 $d\,d'=N+1$ 及 $(d,d')=1$ 之正整數 d 及 d'，使得 $d'\,|\,k+1$ 且 $d\,|\,k$。再令 $k'=N-k$，因為 $k\ge N+1$，所以 $k'\le -1$；既然

$$k'=(N+1)-(k+1)\ ，$$

所以 $d'\,|\,k'$；因此，必存在最小正整數 m 及最大負整數 m'，使得 m 必須大於 d'，而 $|m'|$ 必須介於1和 d 之間，並能滿足 $1\le|m\,m'|\le N-1$，使得 $k=d\,m$ 及 $k'=d'\,m'$，推得

$$k+k'=d\,m\ +\ d'\,m'=N=d\,d'-1\ 。$$

$\boxed{\text{情況 2}}$：若 $0\le q<r$，可得

$$(-k)(-k+1)=(N+1)q\ ;$$

也不考慮 $k=N$ 的情形，則有 $-k\le -1$，且集合 $\mathrm{K}\_(N)$ 是非空的，因為

$$-1\in\mathrm{K}\_(N)\ 。$$

假設 $-k\in\mathrm{K}\_(N)$，既然 $(k,k-1)=1$，由

$$(-k)(-k+1)=(N+1)q$$

可知必存在滿足 $d\,d'=N+1$ 及 $(d,d')=1$ 之正整數 d 及 d'，使得 $d\,|-k$ 且 $d'\,|-k+1$。再令 $k'=N-(-k)$，因為 $-k\le -1$，所以 $k'\ge N+1$；既然

$$k'=(N+1)-(-k+1)\ ，$$

所以 $d'\,|\,k'$；因此，存在最大負整數 m 及最小正整數 m'，使得 $|m|$ 介於1和 d' 之間，而 m' 必須大於 d，滿足 $1\le|m\,m'|\le N-1$，使得 $-k=d\,m$ 及 $k'=d'\,m'$，推得

$$(-k)+k'=d\,m\ +\ d'\,m'=N=d\,d'-1\ ;$$

且以下的結果亦是不難證明的。且必存在整數 m 及 m'，可將 d 與 d' 之最大公因數

$$(d,d')=1$$

表示成如下的線性組合

$$d\,m+d'\,m'=(d,d')=1\ ，$$

所欲求的整數 m 及 m' 可寫成一般通解型式的線性參數解，參數經特殊整數的取值（取 0 或 -1），即能找到合乎條件的整數 m 及 m'，得出 k 值。

定　義：若 $(d,d')=1$，令 $\mathrm{I}nv^{-1}(d,d')$ 代表滿足
$$d\,m\equiv -1\,(\mathrm{mod}\ d')$$
的最小正整數 m，則 $m=\mathrm{I}nv^{-1}(d,d')$ 成立，若且唯若
$$d\,m\equiv -1\,(\mathrm{mod}\ d')$$
且 $m>d'$;而 $\mathrm{I}nv^{-1}(d',d)$ 代表滿足
$$d'\,m'\equiv -1\,(\mathrm{mod}\ d)$$
的最大負整數 m'，則 $m'=\mathrm{I}nv^{-1}(d',d)$ 成立，若且唯若
$$d'\,m'\equiv -1\,(\mathrm{mod}\ d)\text{ 且 }1\le |m'|<d\text{ 。}$$

引理三：設 $(d,d')=1$，則

(1) $m=\mathrm{I}nv^{-1}(d,d')$ 且 $m'=\mathrm{I}nv^{-1}(d',d)$，若且唯若
$$d\,m+d'\,m'=d\,d'-1\text{，}$$
其中 m 及 m' 分別是正整數（$m>d'$）與負整數（$1\le |m'|<d$）；

(2) 更進一步，可得 $k=d\cdot \mathrm{I}nv^{-1}(d,d')$ 與 $k'=d'\cdot \mathrm{I}nv^{-1}(d',d)$ 。

反之，首先由所討論的情況 1：令 $d\,d'=N+1$，根據 $(d,d')=1$，設 $m=\mathrm{I}nv^{-1}(d,d')$ 及 $m'=\mathrm{I}nv^{-1}(d',d)$，且 m 是大於 d' 的最小正整數，而 m' 是取絕對值小於 d 的最大負整數；則由引理三，可得 $k+k'=d\,m+d'\,m'=d\,d'-1=N$，因此
$$\begin{aligned}k^2&=d^2m^2\\&=(N-d'\,m')^2\\&=N^2-N\,d'\,m'-(d\,m+d'\,m')\,d'\,m'+(d'\,m')^2\text{ ，}\\&=N^2-N\,d'\,m'-m\,m'\,d\,d'\\&=(N-d'\,m'-m\,m')\,N+(-m\,m')\end{aligned}$$
所以
$$\begin{cases}k^2=(d\,m)^2=(N-d'\,m'-m\,m')\,N+(-m\,m')\quad (1\le |m\,m'|\le N-1)\\ k=d\,m=(N-d'\,m'-m\,m')-(-m\,m')\end{cases}\text{;}$$
即 $d\,m$ 滿足了原來所定義的兩個方程式，其中 $q=N-d'\,m'-m\,m'$ 且 $r=-m\,m'$，故 $d\,m\in \mathrm{K}_-(N)$；且基於對稱性，$d'\,m'$ 也在 $\mathrm{K}_-(N)$ 中。

再者，著手所討論的情況 2：令 $d\,d'=N+1$，根據 $(d,d')=1$，設 $m=\mathrm{I}nv^{-1}(d',d)$ 及 $m'=\mathrm{I}nv^{-1}(d,d')$，且 m 是取絕對值小於 d 的最大負整數，而 m' 是大於 d' 的最小正整數；則由引理三，可得 $(-k)+k'=d\,m+d'\,m'=d\,d'-1=N$，因此
$$\begin{aligned}(-k)^2&=d^2m^2\\&=(N-d'\,m')^2\\&=N^2-N\,d'\,m'-(d\,m+d'\,m')\,d'\,m'+(d'\,m')^2\text{ ，}\\&=N^2-N\,d'\,m'-m\,m'\,d\,d'\\&=(N-d'\,m'-m\,m')\,N+(-m\,m')\end{aligned}$$
所以
$$\begin{cases}(-k)^2=(d\,m)^2=(N-d'\,m'-m\,m')\,N+(-m\,m')\quad (1\le |m\,m'|\le N-1)\\ -k=d\,m=(N-d'\,m'-m\,m')-(-m\,m')\end{cases}\text{;}$$
即 $d\,m$ 也滿足了原來定義的兩個方程式，其中 $q=N-d'\,m'-m\,m'$ 且 $r=-m\,m'$，故 $d\,m\in \mathrm{K}_-(N)$；基於對稱性，$d'\,m'$ 也在 $\mathrm{K}_-(N)$ 中；據此，可證明下列主要結果。

定理三：$K_{-}(N)$

元素k_1與$k_2 = N - k_1$在$K_{-}(N)$中，若且唯若存在$(N+1)$的某一個單一除數d，使得

$$k_1 = d \cdot \mathrm{Inv}^{-1}\left(d, \frac{(N+1)}{d}\right)$$

或

$$k_2 = d \cdot \mathrm{Inv}^{-1}\left(\frac{(N+1)}{d}, d\right);$$

其中$\mathrm{Inv}^{-1}\left(d, \frac{(N+1)}{d}\right)$與$\mathrm{Inv}^{-1}\left(\frac{(N+1)}{d}, d\right)$是一正一負的整數，正整數的部份必須要大於$\frac{(N+1)}{d}$或$d$的最小正整數，而負整數的絕對值必須要小於$d$或$\frac{(N+1)}{d}$的最大負整數，且兩者乘積的絕對值必滿足

$$1 \le \left| \mathrm{Inv}^{-1}\left(d, \frac{(N+1)}{d}\right) \cdot \mathrm{Inv}^{-1}\left(\frac{(N+1)}{d}, d\right) \right| \le N-1,$$

此外，k_1與$k_2 = N - k_1$是成對的，即若$k_1 \in K_{-}(N)$，則$(N - k_1) \in K_{-}(N)$。

慣例中，要求$K_{-}(N)$不包含N是為了要能保證$K_{-}(N)$的元素與$(N+1)$的單一除數之間會有一對一且是映成的對應關係。1與$(10^n+1)^2$都是雷霆數，且其所對應的整數k是會對應到(10^n+1)的單一除數，這也就是我們允許兩者都是雷霆數的原因；對任何$n \ge 1$而言，10^{2n}不是雷霆數，因其所對應的整數k為10^n且對原來的二個方程式（取$N = 10^n$）來說是明顯的解答;「雷霆數」所對應的整數k之自然密度為零【3】。

(二) 分和累乘再現數（幽靈雷劈數）$\langle S = k^2 | k(n) \rangle$與雷霆數$\langle T = k^2 | k(n) \rangle$有趣的規律性

性質二：(1)對每對的分和累乘再現數中，至少有一個必是9的倍數；

(2)當$n \equiv 0 \pmod 2$時，兩對分和累乘再現數中，至少有一個是11的倍數，

當$n \equiv 0 \pmod 4$時，兩對分和累乘再現數中，至少有一個是101的倍數；

(3)當$n \equiv 1 \pmod 2$時，兩對雷霆數中，至少有一個是11的倍數，

當$n \equiv 2 \pmod 4$時，兩對雷霆數中，至少有一個是101的倍數；

(4)對所有的分和累乘再現數與雷霆數所對應的正整數k而言，q是偶數；

(5)對奇數的分和累乘再現數與雷霆數所對應的正整數k，則r是奇數；

(6)對偶數的分和累乘再現數與雷霆數所對應的正整數k，則r是偶數。

證明：

情況1：分和累乘再現數與雷霆數所對應的正整數k是奇數

若k是奇數且$k > 1$，則從$k = |q \pm r|$可知，若不是q為奇數且r為偶數，就是q為偶數且r為奇數；若k是奇數，可知k^2也是奇數。但從$k^2 = q \cdot 10^n + r$及$n \ge 1$時，$q \cdot 10^n$為偶數，可知r必為奇數而且q必為偶數。當$k = 1$時，可知$r = 1$且$q = 0$。

情況2：分和累乘再現數與雷霆數所對應的正整數k是偶數

若k是偶數，則不是q及r皆為偶數，就是q及r皆為奇數；而若k是偶數，k^2亦為偶數。因此，可由「情況1」的推論，可得知r及q一定都是偶數。

(三) 新發現的某些有趣的「分和累乘再現數(幽靈雷劈數)」與「雷霆數」數列之影蹤

性質一(I):對所有正整數$n \in \mathrm{N}$,有

$$
(1)\left\{\begin{array}{l}
\left\{1^{(9n-8)}\right\}^2=\left\{\underbrace{111\ldots111}_{(9n-8)\text{個}1}\right\}^2=\left[\dfrac{1}{9}(10^{9n-8}-1)\right]^2\in \mathrm{K}_+(10^{9n-8}) \\
\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}
(\underbrace{111\cdots111}_{(9n-8)\text{個}1})^2=\left(\dfrac{10^{9n-8}-10}{81}\right)\cdot 10^{9n-8}+\left(\dfrac{8\cdot 10^{9n-8}+1}{81}\right) \\
\underbrace{111\cdots111}_{(9n-8)\text{個}1}=\left(\dfrac{10^{9n-8}-10}{81}\right)+\left(\dfrac{8\cdot 10^{9n-8}+1}{81}\right)
\end{array}\right.
\end{array}\right.,
$$

$$
(2)\left\{\begin{array}{l}
\left\{2^{(9n-4)}\right\}^2=\left\{\underbrace{222\cdots222}_{(9n-4)\text{個}2}\right\}^2=\left[\dfrac{2}{9}(10^{9n-4}-1)\right]^2\in \mathrm{K}_+(10^{9n-4}) \\
\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}
(\underbrace{222\cdots222}_{(9n-4)\text{個}2})^2=\left(\dfrac{4\cdot 10^{9n-4}-22}{81}\right)\cdot 10^{9n-4}+\left(\dfrac{14\cdot 10^{9n-4}+4}{81}\right) \\
\underbrace{222\cdots222}_{(9n-4)\text{個}2}=\left(\dfrac{4\cdot 10^{9n-4}-22}{81}\right)+\left(\dfrac{14\cdot 10^{9n-4}+4}{81}\right)
\end{array}\right.
\end{array}\right.,
$$

$$
(3)\left\{\begin{array}{l}
[5\cdot 10^n(10^{n+1}+1)]^2\in \mathrm{K}_+(10^{2n+2}) \\
\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}
[5\cdot 10^n(10^{n+1}+1)]^2=(5\cdot 10^{2n+1}-25\cdot 10^{2n}+5\cdot 10^n)\cdot 10^{2n+2}+(25\cdot 10^{2n}) \\
5\cdot 10^n(10^{n+1}+1)=(5\cdot 10^{2n+1}-25\cdot 10^{2n}+5\cdot 10^n)+(25\cdot 10^{2n})
\end{array}\right. \\
[5\cdot 10^n(10^{n+1}-1)]^2\in \mathrm{K}_+(10^{2n+2}) \\
\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}
[5\cdot 10^n(10^{n+1}-1)]^2=(25\cdot 10^{2n}-5\cdot 10^n)\cdot 10^{2n+2}+(25\cdot 10^{2n}) \\
5\cdot 10^n(10^{n+1}-1)=(25\cdot 10^{2n}-5\cdot 10^n)+(25\cdot 10^{2n})
\end{array}\right.
\end{array}\right.。
$$

性質一（II）：對所有正整數$n\in\mathrm{N}$，有

(1)

$$\begin{cases}\dfrac{(4\cdot 10^{3n}+10^{2n}-10^{n}+2)}{3}=(10^{n}+1)\cdot\dfrac{(4\cdot 10^{2n}-3\cdot 10^{n}+2)}{3}\in\mathrm{K}_{-}(10^{3n})\\ \left(\dfrac{4\cdot 10^{3n}+10^{2n}-10^{n}+2}{3}\right)^{2}=\left(\dfrac{16\cdot 10^{3n}+8\cdot 10^{2n}-7\cdot 10^{n}+10}{9}\right)\cdot 10^{3n}+\left(\dfrac{4\cdot 10^{3n}+5\cdot 10^{2n}-4\cdot 10^{n}+4}{9}\right)\\ \left(\dfrac{4\cdot 10^{3n}+10^{2n}-10^{n}+2}{3}\right)=\left(\dfrac{16\cdot 10^{3n}+8\cdot 10^{2n}-7\cdot 10^{n}+10}{9}\right)-\left(\dfrac{4\cdot 10^{3n}+5\cdot 10^{2n}-4\cdot 10^{n}+4}{9}\right)\end{cases},$$

(2)

$$\begin{cases}10^{3n}-\left(\dfrac{4\cdot 10^{3n}+10^{2n}-10^{n}+2}{3}\right)=\dfrac{(10^{3n}+10^{2n}-10^{n}+2)}{3}=(10^{2n}-10^{n}+1)\cdot\dfrac{(10^{n}+2)}{3}\in\mathrm{K}_{-}(10^{3n})\\ \left(\dfrac{10^{3n}+10^{2n}-10^{n}+2}{3}\right)^{2}=\left(\dfrac{10^{3n}+2\cdot 10^{2n}-10^{n}-2}{9}\right)\cdot 10^{3n}+\left(\dfrac{4\cdot 10^{3n}+5\cdot 10^{2n}-4\cdot 10^{n}+4}{9}\right)\\ \left(\dfrac{10^{3n}+10^{2n}-10^{n}+2}{3}\right)=\left|\left(\dfrac{10^{3n}+2\cdot 10^{2n}-10^{n}-2}{9}\right)-\left(\dfrac{4\cdot 10^{3n}+5\cdot 10^{2n}-4\cdot 10^{n}+4}{9}\right)\right|\end{cases};$$

(3)

$$\begin{cases}\quad -(2\cdot 10^{10n-1}-2\cdot 10^{8n-1}+2\cdot 10^{6n-1}-2\cdot 10^{4n-1}+2\cdot 10^{2n-1}+1)\\ =(10^{2n}+1)\cdot[-(2\cdot 10^{8n-1}-4\cdot 10^{6n-1}+6\cdot 10^{4n-1}-8\cdot 10^{2n-1}+1)]\in\mathrm{K}_{-}(10^{10n})\\ \\ \quad (2\cdot 10^{10n-1}-2\cdot 10^{8n-1}+2\cdot 10^{6n-1}-2\cdot 10^{4n-1}+20\cdot 10^{2n-2}+1)^{2}\\ =(4\cdot 10^{10n-2}-8\cdot 10^{8n-2}+12\cdot 10^{6n-2}-16\cdot 10^{4n-2}+20\cdot 10^{2n-2})\cdot 10^{10n}\\ \quad +(24\cdot 10^{10n-2}-28\cdot 10^{8n-2}+32\cdot 10^{6n-2}-36\cdot 10^{4n-2}+40\cdot 10^{2n-2}+1)\\ \\ \quad (2\cdot 10^{10n-1}-2\cdot 10^{8n-1}+2\cdot 10^{6n-1}-2\cdot 10^{4n-1}+2\cdot 10^{2n-1}+1)\\ =\left|(4\cdot 10^{10n-2}-8\cdot 10^{8n-2}+12\cdot 10^{6n-2}-16\cdot 10^{4n-2}+20\cdot 10^{2n-2})\right.\\ \quad \left.-(24\cdot 10^{10n-2}-28\cdot 10^{8n-2}+32\cdot 10^{6n-2}-36\cdot 10^{4n-2}+40\cdot 10^{2n-2}+1)\right|\end{cases},$$

(4)

$$\begin{cases}\quad (10^{10n}+2\cdot 10^{10n-1}-2\cdot 10^{8n-1}+2\cdot 10^{6n-1}-2\cdot 10^{4n-1}+2\cdot 10^{2n-1}+1)\\ =(10^{8n}-10^{6n}+10^{4n}-10^{2n}+1)\cdot(10^{2n}+2\cdot 10^{2n-1}+1)\in\mathrm{K}_{-}(10^{10n})\\ \\ \quad (10^{10n}+2\cdot 10^{10n-1}-2\cdot 10^{8n-1}+2\cdot 10^{6n-1}-2\cdot 10^{4n-1}+2\cdot 10^{2n-1}+1)^{2}\\ =(4\cdot 10^{10n-2}-8\cdot 10^{8n-2}+12\cdot 10^{6n-2}-16\cdot 10^{4n-2}+20\cdot 10^{2n-2})\cdot 10^{10n}\\ \quad +(24\cdot 10^{10n-2}-28\cdot 10^{8n-2}+32\cdot 10^{6n-2}-36\cdot 10^{4n-2}+40\cdot 10^{2n-2}+1)\\ \\ \quad (10^{10n}+2\cdot 10^{10n-1}-2\cdot 10^{8n-1}+2\cdot 10^{6n-1}-2\cdot 10^{4n-1}+2\cdot 10^{2n-1}+1)\\ =(10^{2n}+44\cdot 10^{10n-2}-48\cdot 10^{8n-2}+52\cdot 10^{6n-2}-56\cdot 10^{4n-2}+60\cdot 10^{2n-2}+2)\\ \quad -(24\cdot 10^{10n-2}-28\cdot 10^{8n-2}+32\cdot 10^{6n-2}-36\cdot 10^{4n-2}+40\cdot 10^{2n-2}+1)\end{cases}。$$

證明(1) (2)：

令 $n\ge 1$，由 $10^{3n}+1=(10^n+1)(10^{2n}-10^n+1)$，顯然 (10^n+1) 與 $(10^{2n}-10^n+1)$ 是互質的，且

$$(10^n+1)\left[\frac{(10^{2n}-1)}{3}-(10^{2n}-10^n+1)t\right]=-1+(10^{2n}-10^n+1)\left[\frac{(10^n+2)}{3}-(10^n+1)t\right]$$，又

$$(10^n+1)m\equiv -1+(\bmod\,(10^{2n}-10^n+1))$$，

求最小正整數

$$m=\mathrm{I}nv^{-1}((10^n+1),(10^{2n}-10^n+1))=\frac{(4\cdot 10^{2n}-3\cdot 10^n+2)}{3}$$，

且

$$m>(10^{2n}-10^n+1)$$，

意即在相關的等式中取值為 $t=-1$；因此，由「定理三」之完全性，

$$(10^n+1)\cdot\left[\frac{(4\cdot 10^{2n}-3\cdot 10^n+2)}{3}\right]\in \mathrm{K}_{-}(10^{3n})$$；

因此「性質一（II）(1) (2)」得證。

證明(3) (4)：

令 $n\ge 1$，由 $10^{10n}+1=(10^{2n})^5+1=(10^{2n}+1)(10^{8n}-10^{6n}+10^{4n}-10^{2n}+1)$，

顯然

$$\left(10^{2n}+1,10^{8n}-10^{6n}+10^{4n}-10^{2n}+1\right)=1$$，

又

$$(10^{2n}+1)\left[\left(\frac{10^{10n}+1}{10^{2n}+1}\right)t-(2\cdot 10^{8n-1}-4\cdot 10^{6n-1}+6\cdot 10^{4n-1}-8\cdot 10^{2n-1}+1)\right],$$

$$=-1+\left(\frac{10^{10n}+1}{10^{2n}+1}\right)\left[(10^{2n}+1)t-2\cdot 10^{2n-1}\right]$$

有

$$(10^{2n}+1)m\equiv -1+(\bmod\,(10^{8n}-10^{6n}+10^{4n}-10^{2n}+1))$$，

求最大負整數

$m=\mathrm{I}nv^{-1}((10^{2n}+1),(10^{8n}-10^{6n}+10^{4n}-10^{2n}+1))=-(2\cdot 10^{8n-1}-4\cdot 10^{6n-1}+6\cdot 10^{4n-1}-8\cdot 10^{2n-1}+1)$，

且

$$1\le |m|<(10^{8n}-10^{6n}+10^{4n}-10^{2n}+1)$$，

意即在相關的等式中取值為 $t=0$；因此，由「定理三」之完全性，

$$(10^{2n}+1)\cdot[-(2\cdot 10^{8n-1}-4\cdot 10^{6n-1}+6\cdot 10^{4n-1}-8\cdot 10^{2n-1}+1)]\in \mathrm{K}_{-}(10^{10n})$$；

因此「性質一（II）(3) (4)」得證。

(四) 由「定理一」的完全性，從(10^n-1)的質因數分解中可得出分和累乘再現數（幽靈雷劈數）及其所對應的正整數；更進一步，可推得出下面的「性質三」。在「定理一」中，令$N=b^n$（$b\geq 2$且$n\in\mathrm{N}$），可得到分和累乘再現數$\left\langle S=k^2\middle|k(n)\right\rangle$及其所對應的正整數$k$，且$k$是以$b$為基底的一般表示法，在基底$b=2$時，我們尤其感有趣。

> 性質三：任何二進位表示的偶完全數的平方恰好正是分和累乘再現數（幽靈雷劈數），且其所對應的正整數值必定為成對互補的。

證明：令$n\geq 1$，顯然(2^n+1)與(2^n-1)是互質的，且

$$(2^n-1)(2^{n-1})\equiv 1 \mod (2^n+1)\text{，}$$

其中$0<2^{n-1}<2^n+1$。因此，$2^{n-1}=\mathrm{I}nv(2^n-1,2^n+1)$，故由「定理一」，知

$$(2^n-1)(2^{n-1})\in\mathrm{K}_+(2^{2n})\text{；}$$

眾所周知，每一個偶完全數都一定可寫成$2^{n-1}(2^n-1)$的形式，其中(2^n-1)是質數，因此「性質三」得證。

(1)相同地，$[b^{n-1}(b^n+1)]^2$與$[b^{n-1}(b^n-1)]^2$皆為分和累乘再現數$\left\langle S=k^2\middle|k(2n)\right\rangle$，且其所對應的正整數$k$必定是互補的，即$b^{n-1}(b^n+1)$與$b^{n-1}(b^n-1)$在偶基底為$b$的表示法中，是互補的$2n$位數。

(2)為說明「性質三」，由實例可看出表列數字是偶完全數，且其所對應產生之二進位正整數k列表對照：$6,28,496,8128,33550336,8589869056,137438691328,\ldots$。

$b^{n-1}(b^n-1)$		$[b^{n-1}(b^n-1)]^2$
$6=2\cdot(2^2-1)$	$(6)_2=110$	$\begin{cases}110^2=10\underline{0100}\\10+0100=110\end{cases}$
$28=2^2\cdot(2^3-1)$	$(28)_2=11100$	$\begin{cases}11100^2=1100\underline{010000}\\1100+010000=11100\end{cases}$
$120=2^3\cdot(2^4-1)$	$(120)_2=1111000$	$\begin{cases}1111000^2=111000\underline{01000000}\\111000+01000000=1111000\end{cases}$
$496=2^4\cdot(2^5-1)$	$(496)_2=111110000$	$\begin{cases}111110000^2=11110000\underline{0100000000}\\11110000+0100000000=111110000\end{cases}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$b^{n-1}(b^n+1)$		$[b^{n-1}(b^n+1)]^2$
$10=2\cdot(2^2+1)$	$(10)_2=1010$	$\begin{cases}1010^2=110\underline{0100}\\110+0100=1010\end{cases}$
$36=2^2\cdot(2^3+1)$	$(36)_2=100100$	$\begin{cases}100100^2=10100\underline{010000}\\10100+010000=100100\end{cases}$
$136=2^3\cdot(2^4+1)$	$(136)_2=10001000$	$\begin{cases}10001000^2=1001000\underline{01000000}\\1001000+01000000=10001000\end{cases}$
$528=2^4\cdot(2^5+1)$	$(528)_2=1000010000$	$\begin{cases}1000010000^2=100010000\underline{0100000000}\\100010000+0100000000=1000010000\end{cases}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

(五) 分和累乘再現數（幽靈雷劈數）神奇的置換循環排列特性【11】

> 性質四：
> 所有的分和累乘再現數（幽靈雷劈數）所對應的正整數 k 皆具有置換循環排列的特性，即 k 的循環排列將其平方後，平方所得到的數字分兩半之和仍會是原始數 k 之循環排列數之一；有時，此過程需再做適當次數才能得到上述之結果。

具有142857的一個置換循環排列	
$\begin{cases} 1/7=0.\overline{142857} \\ 142857=(10^6-1)/7 \end{cases}$	$\begin{cases} 142857^2=\underline{20408}\underline{\underline{122449}} \\ \underline{20408}+\underline{\underline{122449}}=\boxed{142857} \end{cases}$
$\begin{cases} 2/7=0.\overline{285714} \\ 285714=2(10^6-1)/7 \end{cases}$	$\begin{cases} 285714^2=\underline{81632}\underline{\underline{489796}} \\ \underline{81632}+\underline{\underline{489796}}=\boxed{571428} \end{cases}$
$\begin{cases} 3/7=0.\overline{428571} \\ 428571=3(10^6-1)/7 \end{cases}$	$\begin{cases} 428571^2=\underline{183673}\underline{\underline{102041}} \\ \underline{183673}+\underline{\underline{102041}}=\boxed{285714} \end{cases}$
$\begin{cases} 4/7=0.\overline{571428} \\ 571428=4(10^6-1)/7 \end{cases}$	$\begin{cases} 571428^2=\underline{326529959184} \\ 326529+959184=1285713\rightarrow 000001+285713=\boxed{285714} \end{cases}$
$\begin{cases} 5/7=0.\overline{714285} \\ 714285=5(10^6-1)/7 \end{cases}$	$\begin{cases} 714285^2=\underline{510203}\underline{\underline{061225}} \\ \underline{510203}+\underline{\underline{061225}}=\boxed{571428} \end{cases}$
$\begin{cases} 6/7=0.\overline{857142} \\ 857142=6(10^6-1)/7 \end{cases}$	$\begin{cases} 857142^2=\underline{734692408164} \\ 408164+734692=1142856\rightarrow 000001+142856=\boxed{142857} \end{cases}$

七、結論及未來研究方向「分和累乘再現數產生的方法及其性質探討之推廣與應用」

(一) 「分和累乘再現數（幽靈雷劈數）」表：14位以內的分和累乘再現數表列

一個正整數k^2稱為分和累乘再現數（幽靈雷劈數）時，需滿足下列性質之一【4】：

(1)當k^2為一個$2n$位數時，把前n位數當作一個數加上這個數的後n位數，它們之和的平方正好等於k^2。

(2)當k^2為一個$2n+1$位數時，把前n位數當作一個數加上這個數的後$n+1$位數，它們之和的平方正好等於k^2。

(3)對於奇數位的整數，偏前（或偏後）的拆解成兩個數，求其和後再平方正好等於原數，仍稱它為像幽靈一般地"回家"的「分和累乘再現數（幽靈雷劈數）」。

i	$\left\langle S=k^2 \middle| k(n)\right\rangle$	k	q	r
1	**8**-1	**9**	**8**	1
2	**10**-0	**10**	**10**	0
3	**20**-25	**45**	**20**	25
4	**30**-25	**55**	**30**	25
5	**98**-01	**99**	**98**	01
6	**100**-00	**100**	**100**	00
7	**88**-209	**297**	**88**	209
8	**494**-209	**703**	**494**	209
9	**998**-001	**999**	**998**	001
10	**1000**-000	**1000**	**1000**	000
11	**2450**-2500	**4950**	**2450**	2500
12	**2550**-2500	**5050**	**2550**	2500
13	**744**-1984	**2728**	**744**	1984
14	**5288**-1984	**7272**	**5288**	1984
15	**494**-1729	**2223**	**494**	1729
16	**6048**-1729	**7777**	**6048**	1729
17	**9998**-0001	**9999**	**9998**	0001
18	**10000**-0000	**10000**	**10000**	0000
19	**4938**-17284	**22222**	**4938**	17284
20	**60494**-17284	**77778**	**60494**	17284
21	**3008**-14336	**17344**	**3008**	14336
22	**68320**-14336	**82656**	**68320**	14336
23	**238**-04641	**4879**	**238**	04641
24	**90480**-04641	**95121**	**90480**	04641
25	**99998**-00001	**99999**	**99998**	00001
26	**100000**-00000	**100000**	**100000**	00000
27	**249500**-250000	**499500**	**249500**	250000
28	**250500**-250000	**500500**	**250500**	250000
29	**217930**-248900	**466830**	**217930**	248900
30	**284270**-248900	**533170**	**284270**	248900
31	**213018**-248521	**461539**	**213018**	248521
32	**289940**-248521	**538461**	**289940**	248521
33	**152344**-237969	**390313**	**152344**	237969
34	**371718**-237969	**609687**	**371718**	237969
35	**127194**-229449	**356643**	**127194**	229449
36	**413908**-229449	**643357**	**413908**	229449

37	**123448-**227904	**351352**	**123448**	227904
38	**420744-**227904	**648648**	**420744**	227904
39	**108878-**221089	**329967**	**108878**	221089
40	**448944-**221089	**670033**	**448944**	221089
41	**101558-**217124	**318682**	**101558**	217124
42	**464194-**217124	**681318**	**464194**	217124
43	**43470-**165025	**208495**	**43470**	165025
44	**626480-**165025	**791505**	**626480**	165025
45	**35010-**152100	**187110**	**35010**	152100
46	**660790-**152100	**812890**	**660790**	152100
47	**33058-**148761	**181819**	**33058**	148761
48	**669420-**148761	**818181**	**669420**	148761
49	**21948-**126201	**148149**	**21948**	126201
50	**725650-**126201	**851851**	**725650**	126201
51	**20408-**122449	**142857**	**20408**	122449
52	**734694-**122449	**857143**	**734694**	122449
53	**1518-**037444	**38962**	**1518**	037444
54	**923594-**037444	**961038**	**923594**	037444
55	**28-**005264	**5292**	**28**	005264
56	**989444-**005264	**994708**	**989444**	005264
57	**999998-**000001	**999999**	**999998**	000001
58	**1000000-**000000	**1000000**	**1000000**	000000
59	**2428460-**2499481	**4927941**	**2428460**	2499481
60	**2572578-**2499481	**5072059**	**2572578**	2499481
61	**1975308-**2469136	**4444444**	**1975308**	2469136
62	**3086420-**2469136	**5555556**	**3086420**	2469136
63	**39390-**0588225	**627615**	**39390**	0588225
64	**8784160-**0588225	**9372385**	**8784160**	0588225
65	**9999998-**0000001	**9999999**	**9999998**	0000001
66	**10000000-**0000000	**10000000**	**10000000**	0000000
The Extended GCD（幽靈雷劈數） http://www.hostsrv.com/webmaa/app1/MSP/webm1010/extended_gcd				

(二) 分和累乘再現數（幽靈雷劈數）的迴響【12】：雷霆數，創新創意且首次整合的新結果，提出了十進位的雷霆數與10的乘冪再加1之質因數分解的關聯性，即「定理三（定理一之推廣）」，建立與10的乘冪再加1的單一除數有一對一且為映成的對應關係。

(1)雷霆數所對應的整數k與(10^n+1)的單一除數有一對一且為映成的對應關係。

(2)雷霆數所對應的整數k是互補成對出現的，意即和為10^n的兩數能找到其所對應整數k（一正一負）的配對，且所對應的整數k之自然密度為零。

(三) 「分和累乘再現數（雷劈數）的迴響」：20位以內的「雷霆數」表（●：表$q<r$）

n	$\langle T=k^2 \vert k(n)\rangle$	$k=\vert q-r\vert$		q	r
1	1	●	**1**	**0**	1
1	**12-**1		**11**	**12**	1
2	1	●	**1**	**0**	1
2	**102-**01		**101**	**102**	01

3	1	●	**1**	**0**	1
3	**1002-**001		**1001**	**1002**	001
3	**6-**084	●	**78**	**6**	084
3	**1162-**084		**1078**	**1162**	084
3	**82-**369	●	**287**	**82**	369
3	**1656-**369		**1287**	**1656**	369
3	**132-**496	●	**364**	**132**	496
3	**1860-**496		**1364**	**1860**	496
4	1	●	**1**	**0**	1
4	**10002-**0001		**10001**	**10002**	0001
4	**120-**1216	●	**1096**	**120**	1216
4	**12312-**1216		**11096**	**12312**	1216
5	1	●	**1**	**0**	1
5	**100002-**00001		**100001**	**100002**	00001
5	**3306-**21489	●	**18183**	**3306**	21489
5	**139672-**21489		**118183**	**139672**	21489
6	1	●	**1**	**0**	1
6	**1000002-**000001		**1000001**	**1000002**	000001
6	**113322-**449956	●	**336634**	**113322**	449956
6	**1786590-**449956		**1336634**	**1786590**	449956
7	1	●	**1**	**0**	1
7	**10000002-**0000001		**10000001**	**10000002**	0000001
7	**743802-**3471076	●	**2727274**	**743802**	3471076
7	**16198350-**3471076		**12727274**	**16198350**	3471076
8	1	●	**1**	**0**	1
8	**100000002-**00000001		**100000001**	**100000002**	00000001
8	**5536332-**29065744	●	**23529412**	**5536332**	29065744
8	**152595156-**29065744		**123529412**	**152595156**	29065744
9	**1**	●	**1**	**0**	1
9	**1000000002-**000000001		**1000000001**	**1000000002**	000000001
9	**366292-**019505049	●	**19138757**	**366292**	019505049
9	**1038643806-**019505049		**1019138757**	**1038643806**	019505049
9	**674650-**026648676	●	**25974026**	**674650**	026648676
9	**1052622702-**026648676		**1025974026**	**1052622702**	026648676
9	**9553960-**107298321	●	**97744361**	**9553960**	107298321
9	**1205042682-**107298321		**1097744361**	**1205042682**	107298321
9	**14611762-**135490884	●	**120879122**	**14611762**	135490884
9	**1256370006-**135490884		**1120879122**	**1256370006**	135490884
9	**19605006-**159622884	●	**140017878**	**19605006**	159622884
9	**1299640762-**159622884		**1140017878**	**1299640762**	159622884
9	**27553312-**193545216	●	**165991904**	**27553312**	193545216
9	**1359537120-**193545216		**1165991904**	**1359537120**	193545216
9	**56530882-**294293121	●	**237762239**	**56530882**	294293121
9	**1532055360-**294293121		**1237762239**	**1532055360**	294293121
9	**83263152-**371816704	●	**288553552**	**83263152**	371816704
9	**1660370256-**371816704		**1288553552**	**1660370256**	371816704
9	**94674556-**402366864	●	**307692308**	**94674556**	402366864
9	**1710059172-**402366864		**1307692308**	**1710059172**	402366864

9	**111333222**-444999556	●	**333666334**	**111333222**	444999556
9	**1778665890**-444999556		**1333666334**	**1778665890**	444999556
9	**164378892**-569815561	●	**405436669**	**164378892**	569815561
9	**1975252230**-569815561		**1405436669**	**1975252230**	569815561
9	**183673470**-612244900	●	**428571430**	**183673470**	612244900
9	**2040816330**-612244900		**1428571430**	**2040816330**	612244900
9	**200444410**-648154596	●	**447710186**	**200444410**	648154596
9	**2095864782**-648154596		**1447710186**	**2095864782**	648154596
9	**206611570**-661157025	●	**454545455**	**206611570**	661157025
9	**2115702480**-661157025		**1454545455**	**2115702480**	661157025
9	**224376732**-698060944	●	**473684212**	**224376732**	698060944
9	**2171745156**-698060944		**1473684212**	**2171745156**	698060944
10	**1**	●	**1**	**0**	1
10	**10000000002**-0000000001		**10000000001**	**10000000002**	0000000001
10	**19408740**-0459962256	●	**440553516**	**19408740**	0459962256
10	**10900515772**-0459962256		**10440553516**	**10900515772**	0459962256
10	**237050520**-1776695025	●	**1539644505**	**237050520**	1776695025
10	**13316339530**-1776695025		**11539644505**	**13316339530**	1776695025
10	**392118420**-2372316441	●	**1980198021**	**392118420**	2372316441
10	**14352514462**-2372316441		**11980198021**	**14352514462**	2372316441
The Extended GCD http://www.hostsrv.com/webmaa/app1/MSP/webm1010/extended_gcd					

(四) 本文中更證明了一個分和累乘再現數 $\left\langle S=k^2 \middle| k(n)\right\rangle$ 中所對應的正整數 k 不是模 9 的同餘類[0]，就是同餘類[1]。

(五) 任一對模 9 與 k^2 同餘的正整數 k，本文有明確的步驟可以找出滿足

$$S=k^2=(q+r)^2=q\cdot 10^n+r$$

的任意整數 q、r 及 n，所採用的方法則是用電腦代數軟體套件 Mathcad。

(六) 將介於 1 與 10^{20} 之間的所有的分和累乘再現數【5】與雷霆數所對應的正整數 k $(1\le k<10^{10})$ 加以表列；此外，分和累乘再現數與雷霆數的一些相關性質【3】也有深入的探討說明與推廣。

(七) 改進與證明【2】的結果：十進位的分和累乘再現數所對應的正整數 k 與 (10^n-1) 的單一除數之間是可以建立一個一對一且為映成的對應關係。創新創意且是首次整合的新結果，提出十進位的雷霆數與 10 的乘冪再加 1 之質因數分解的關聯性，建立與 (10^n+1) 的單一除數有一對一且為映成的對應關係。

(八) 從 (10^n-1) 的質因數分解中得到分和累乘再現數及其所對應的正整數 k（定理一的完全性），且任何二進位的偶完全數的平方恰好正是分和累乘再現數，且其所對應的正整數值必定為成對互補出現的。

(九) 表中列出的數字：142857，此數字有許多特別神奇的特性（以循環小數玩遊戲）；把它重新排列【4】：$428571^2=183673\cdot 10^6+102041$，其和 $183673+102041=285714$，又是 142857 的一個排列。一個概念：如果任一個 142857 的循環排列將其平方後，

其數字分兩半之和仍會是其六個循環排列數之一；有時，此過程需做二次才能得到上述結果，例如：$857142^2 = 734692408164$，因此$408164+734692=1142856$，再一次$000001+142856=142857$。事實上，所有的分和累乘再現數（幽靈雷劈數）所對應的正整數k皆是具有此置換循環特性。本文中更進一步提到，所有的分和累乘再現數（幽靈雷劈數）所對應的正整數k皆可觀察到上述類似的性質，也就是平方後數字分兩半之和仍是原數之排列之一。可對上述列表中之數做實驗【11】，即可發現其他有類似此性質之分和累乘再現數（幽靈雷劈數）所對應的正整數k。能完整証明此神奇的特性嗎？

(十) 「分和累乘再現數（幽靈雷劈數）」所對應的正整數k之自然密度為零

分和累乘再現數（幽靈雷劈數）$\left\langle S = k^2 \middle| k(n) \right\rangle$在自然數中的分佈十分稀少，它們在大數中密度更小。因為它們的密度是按「指數」規律減少的。設小於N的雷劈數個數為n個，則有

$$\frac{\log(n)}{\log(\mathrm{N})} < 0.175 \text{ 。}$$

$\log(\mathrm{N})$	2	3	4	5	6	7
n	1	2	5	7	9	11
$\frac{\log(n)}{\log(\mathrm{N})}$	0.000	0.100	0.175	0.169	0.159	0.149

$\log(\mathrm{N})$	8	9	10	11	12	13	14
n	18	21	26	32	57	59	65
$\frac{\log(n)}{\log(\mathrm{N})}$	0.157	0.147	0.141	0.137	0.146	0.136	0.129

分和累乘再現數（幽靈雷劈數）密度規律是由14位自然數以內的全部分和累乘再現數表（幽靈雷劈數表）實際統計而得，而長度在14位以內全部共66個的分和累乘再現數表是我們用計算機找出來的。從這張已知的分和累乘再現數表（幽靈雷劈數表）可見，分和累乘再現數（幽靈雷劈數）可以是奇數，也可以是偶數，但總是成對出現的，即對於一個相同的r值，總是有兩個對稱之q_1、q_2組成成對互補的分和累乘再現數$(q_1 \cdot 10^n + r)$和$(q_2 \cdot 10^n + r)$。注意：對於任意的n，$2n$位的數$10^n \cdot (10^n - 2) + 1$和$(2n+1)$位的數$10^{2n}$可叫作「平凡分和累乘再現數（平凡雷劈數）」，但不成為一對，而是分別與1和0成對，即$r=1$時，有$q_1 = 1$，$q_2 = (10^n - 2)$構成一對；對於$r=0$時，有$q_1 = 0$，$q_2 = 10^n$構成一對。

分和累乘再現數（幽靈雷劈數）的迴響：雷霆數所對應的整數k與$10^n + 1$的單一除數有一對一且為映成的對應關係；所對應的整數k是互補成對出現的，即和為10^n的兩數能找到其所對應整數k（一正一負）的配對，且所對應的整數k之自然密度為零。

八、參考資料及其他

【1】J. Brillhart, D. H. Lehmer, J. Selfridge, B. Tuckerman, S. Wagstaff, "*Factorizations of* $b^n \pm 1$, $b = 2,3,5,6,7,10,11,12$ *up to high powers*." 2nd ed., Contemporary Mathematics, v. 22, American Mathematical Society, Providence, RI, 1988.
【2】M. Charosh, *Some Applications of Casting Out* $999\ldots's$, Journal of Recreational Mathematics **14**, pp. 111-118, 1981-1982.
【3】Douglas E. Iannucci, *The Kaprekar Numbers*, Journal of Integer Sequences, Vol. **3**, No. 00.1.2, 2000.
http://www.math.uwaterloo.ca/JIS/VOL3/iann2a.html.
【4】D. R. Kaprekar, *On Kaprekar Numbers*, Journal of Recreational Mathematics **13**, pp. 81-82, 1980-1981.
【5】Sloane, N. J. A. Sequences A006886/M4625 in "*The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*."
http://www.research.att.com/~njas/sequences/.
【6】D. Wells, *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Numbers*. Middlesex, England: Penguin Books, p. 73, 1986.
【7】C. G. Black, Some properties of the Kaprekar numbers and a means of generation, ScienceAsia：Journal of the Science Society of Thailand, Vol. 27, No. 2, pp.133-136, 2001.
【8】台中市立惠文高中第一屆數理資優班專題研究作品及成果彙編（III），台中市立惠文高級中學編印，2005 年 2 月。
【9】紀佩文，陳彥鈞，可表為兩個平方數和的一種特定型式的數及其性質推廣研究 Generalization of Some Special Forms of Numbers Expressible as the Sum of Two Squares~「Concatenating Squares」，二〇〇四年台灣國際科展數學科大會佳作，國立台灣科學教育館，2003 年 2 月。
【10】洪宗良，與特殊型質數之倒數關聯的兩平方總和的整數分解（On the Decomposition of a VR Number Associated with Reciprocals of Primes of Primes of Particular Forms），二〇〇四年第三屆旺宏科學獎 SA3-119 成果報告書（第三屆旺宏科學獎銀牌獎），財團法人旺宏教育基金會，2004 年 11 月。
【11】邱鈺茜，以循環小數玩遊戲，二〇〇五年惠文高中科學專題研究計劃摘要，台中市立惠文高級中學編印，2005 年 5 月。
【12】邱鈺茜，洪宗良，分和累乘再現數（幽靈雷劈數）的迴響：雷霆數，二〇〇五年惠文高中科學專題研究成果專刊，台中市立惠文高級中學編印，2005 年 9 月。

九、後記

由於「分和累乘再現數（幽靈雷劈數）」與「雷霆數」太稀少，又像素數那樣沒有確定的分布規律，要用人工發現一個「分和累乘再現數（幽靈雷劈數）」或「雷霆數」是很困難的，特別是大的數值，即使用計算機去逐個去查找，也要很多時間。因為一個n位數可以在$(n-1)$個不同的位置劈開，所以要試驗n次才能確定它是不是「分和累乘再現數（幽靈雷劈數）」或「雷霆數」。這樣，要找出所有長度是n位的「分和累乘再現數（幽靈雷劈數）」或是n位的「雷霆數」，就要試驗$(n-1)\cdot[10^{(n+1)}-10^{n}]=9(n-1)\cdot 10^{n}$次，所以我們必須分析「分和累乘再現數（幽靈雷劈數）」與「雷霆數」的性質，從中找出並利用其規律性。

「分和累乘再現數（幽靈雷劈數）」與「雷霆數」有著許多神奇的特性，我們在最主要的關鍵都做了充分討論與推廣，提出許多自然、有意義的造法，更提出其與$(10^{n}\mp 1)$的質因數分解與同餘關係之下的種種關聯，以及與二進位的偶完全數的關聯，研究主題更延伸許多精采的見解與新觀點，同時也將創意發揮的淋漓盡致，深信此研究結果必定頗具價值。

P. Choudhury, The Tale of a Neglected Mathematician, February-March’05.
His Works and Beyond, Everyman’s Science VOL. XXXIX NO. 6, pp.361-370, 2005.