

第六屆旺宏科學獎

成果報告書

參賽編號：SA6-052

作品名稱：巧妙的多面體—多面體鑽模夾具探討

姓名：劉俊賢

關鍵字：正多面體、電腦輔助設計、機械加工

第六屆旺宏科學獎

成品報告書目錄

壹、研究動機.....	P.2
貳、研究目的.....	P.2
參、設備與器材.....	P.3
肆、過程與方法.....	P.4
伍、討論.....	P.20
陸、結果與展望.....	P.23
柒、參考資料.....	P.25
附錄一、正多面體二面角證明	P.26
附錄二、系列成品圖.....	P.29

壹、研究動機

在生活的週遭，有著許許多多的幾何圖形環繞著我們，舉凡細胞的排列、電子晶體的放大圖、知名的建築物等等，都可見幾何的蹤跡。其中建築物的部分，像是台北市立天文科學教育館的立體電影院，那直徑三十五米的鋁錐圓頂建築便令人印象深刻；另外即將在 2008 年在北京舉行的奧運會，其世界首例，藉由氣泡理論建造的多面體鋼架結構建築—國家游泳中心“水立方”，也進入驗收的階段。“水立方”的多面體結構便是令人激賞的發揮，也是促使我製作菱形正多面體，並實際量產的動力。

平時製作的多面體，都是由紙板剪裁並切割後黏貼，但這次製作的菱形正多面體，是朝向藝術品的境界邁進，除了在材質選用木頭柱外，更強烈的要求互相接合的精準度，而如何提昇生產效率更是要討論的部分。

貳、研究目的

- 一、 實體建構軟體模擬出正多邊形的規律，並發現其互相的關係。
- 二、 將菱形正多面體製作完成，並製作其生產所需的夾具，提昇其生產過程的效率。
- 三、 提昇多邊形的美觀性及精密度，並將其定位於益智玩具，又不失其觀賞價值。



圖 1 建築物上的多面體

參、設備及器材

一、 電腦輔助繪圖軟體：

Autodesk AutoCAD 2006

二、 電腦輔助設計軟體：

Autodesk Inventor 10

三、 文書編輯軟體：

Microsoft Word 2003

四、 影像編修軟體：

Adobe Photoshop CS2

五、 電腦六台

六、 高度規 一台

七、 虎鉗 一台

八、 鑽床 一台

九、 銑床 一台

十、 高速鋼鑽頭 5/12 mm各兩支

十一、 面銑刀 $\phi 4''$ 一把

十二、 端銑刀 $\phi 6/\phi 12/\phi 13/\phi 18/\phi 20/\phi 25$ 各一把

十三、 10''細平挫 一把

十四、 量具：

6''游標尺 一把

0-25mm、25-50mm 分厘卡 各一把

正弦桿 一個

角度規 一把

十五、 萬向磁性固定座 一座



肆、過程與方法

一、多面體結構分析

多面體是指四個或四個以上多邊形所圍成的立體，在傳統意義上，它是一個三維的多胞形，而在更新的意義上它是任何維度多胞形的有界或無界推廣。以下分析略分類為柏拉圖多面體、均勻多面體。

(一) 柏拉圖多面體 (regular polyhedron)：柏拉圖多面體即正多面體（為與多面體區分，以下皆稱柏拉圖多面體）

(1) 構成必要條件為：每一面由正多邊形構成、各個頂角相等、各條菱邊都相等。存在的柏拉圖多面體只有五種，即正四面體、正六面體、正八面體、正十二面體以及正二十面體。

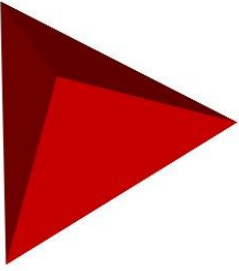
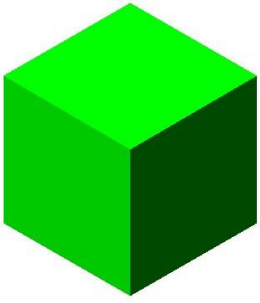
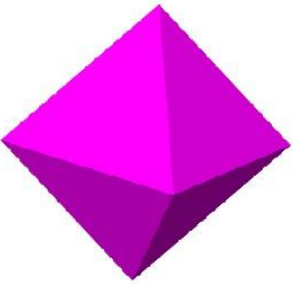

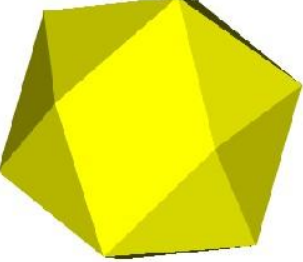
		
正四面體	正六面體	正八面體
		
正十二面體	正二十面體	

表 1 柏拉圖多面體

(2) 特性：

1. 對稱性：若一個圖形經過中心對稱後所得到的圖形仍是該圖本身，則稱這個圖形為對於中心的自相對稱圖形。若一個圖形經過軸對稱後所得到的圖形仍是該圖本身，則這個圖形為對於軸的自相對稱圖形。若一個圖形經過平面對稱後所得到的圖形仍是該圖本身，則這個圖形為對於平面的自相對稱圖形。
2. 對偶性：若兩個多面體的稜數相等，並且一個多面體的頂點數與面數分別等於另一個多面體的面數與頂點數，則稱兩個多面體為對偶多面體。正四面體與自身為對偶多面體；正六面體與正八面體為對偶多面體；正十二面體與正二十面體為對偶多面體。

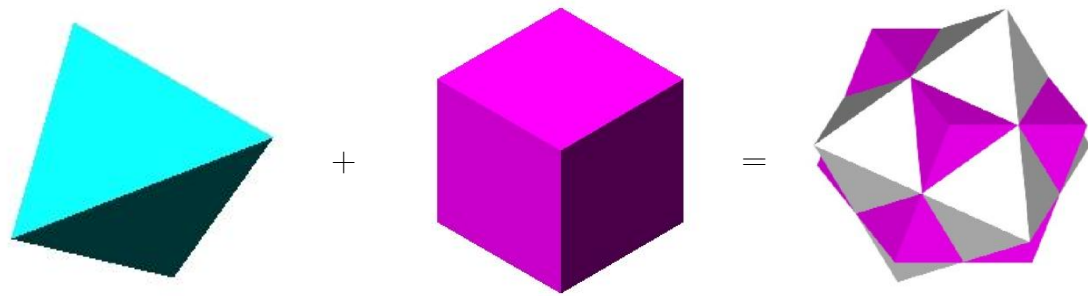
正多面體	面性質	頂點數 (V)	面數 (F)	稜數 (E)	二面角 (θ)
正四面體	正三角形	4	4	6	70.529°
正六面體	正方形	8	6	12	90.000°
正八面體	正三角形	6	8	12	109.470°
正十二面體	正五邊形	20	12	30	116.565°
正二十面體	正三角形	12	20	30	138.189°

表 2 正多面體二面角數據

(二) 複合多面體：兩個或兩個以上的柏拉圖多面體組成，組合後會產生規則狀的多面體。如六面體加八面體可得菱形十二面體、十二面加二十面體可得菱形三十面體。

1. 電腦繪圖：

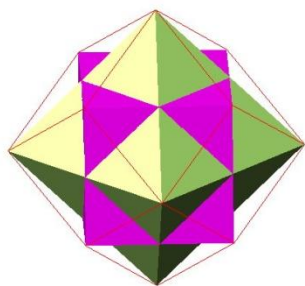
(1) 菱形十二面體



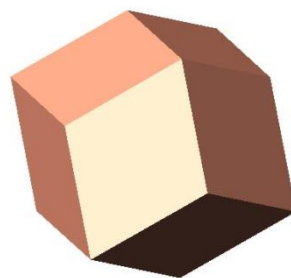
正八面體

正六面體

組合後



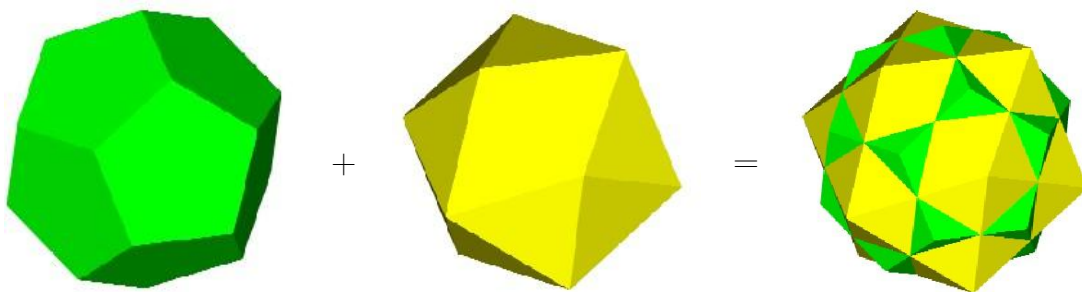
連接頂點



菱形十二面體

表 3 菱形十二面體電腦繪圖

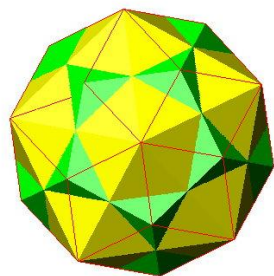
(2) 菱形三十面體



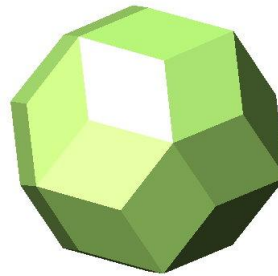
正十二面體

正二十面體

組合後



連接頂點



菱形三十面體

表 4 菱形三十面體電腦繪圖

2.二面角證明

(1) 菱形十二面體二面角：

從等角視圖中連接 ABCDEF，得一正六邊形

∴正六邊形內角=菱形十二面體二面角

∴正多邊形內角公式： $[(n-2) \times 180^\circ] \div n$

∴二面角=120°

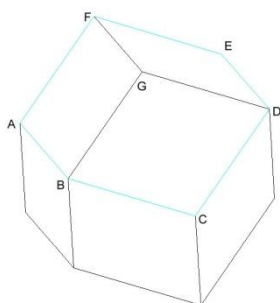


圖 2 菱形十二面體等角視圖

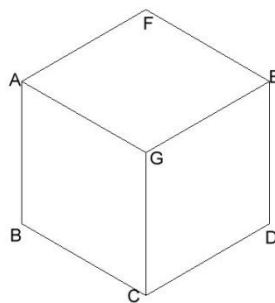


圖 3 正視正六邊形 ABCDEF

(2) 菱形三十面體二面角：

等角視圖中，

連接 ABCDEFGHIJ，得一正十邊形

∴正十邊形內角=菱形三十面體二面角

∴正多邊形內角公式： $[(n-2) \times 180^\circ] \div n$

∴二面角=144°

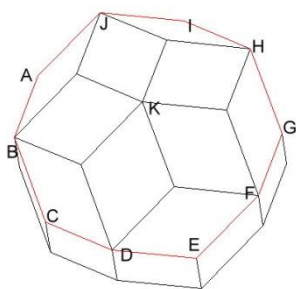


圖 4 菱形三十面體等角視圖

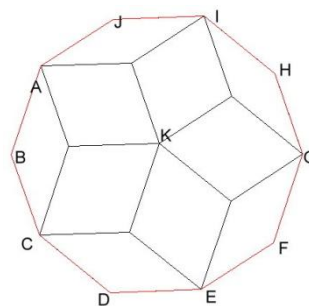


圖 5 正視正十邊形 ABCDEFGHIJ

(三) **準正多面體**，為使用兩種或兩種以上正多邊形為面的凸多面體，亦稱作阿基米德立體。

因為面是由正多邊形組成的，每個相鄰的正多邊形的邊長相等，故半正多面體的邊均有相同長度。像是已廣泛應用到奈米科技的巴克球，為截角多面體中的截角二十面體。

二、電腦輔助機械設計

經過的討論和構想後，我希望將要穿孔的面切削成平面，如此一來在定位置上都會更簡單、迅速。根據觀察菱形十二面體及菱形三十面體後，發現兩種面體的夾具分別由正八面體、正十二面體發展，以下將紀錄用 AutoCAD 模擬的過程。

(一) 菱形十二面體

1. 貼附三角柱：

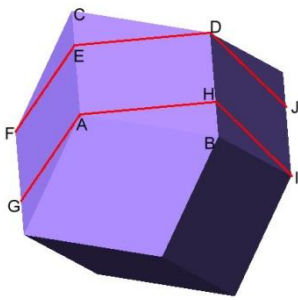


圖 6 設 X、Y 於平面菱形 ABCD 上，連 A 至 \overline{BD} 上的垂直點 H，再連 D 至 \overline{AC} 上垂直點 E。

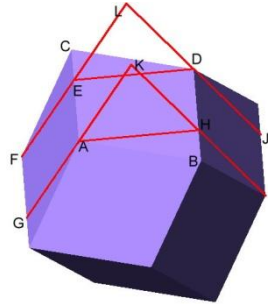


圖 7 連 F、I 至 E、H 和連 A、D 至垂直點 G、J，延伸 \overline{AG} 、 \overline{EF} 、 \overline{HI} 、 \overline{DJ} 至相交，得 $\triangle ABK$ 及 $\triangle DEC$ 。

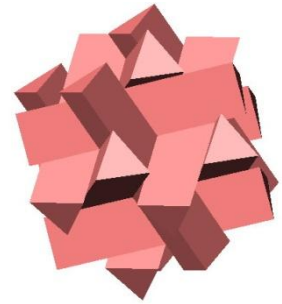


圖 8 擠出 $\triangle ABK$ 及 $\triangle DEC$ 得三角柱陣列，即成。

2. 貼附圓柱：

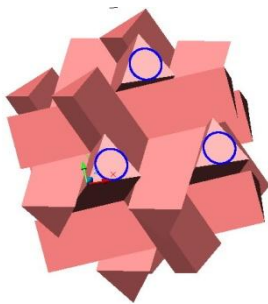


圖 9 在菱形十二面體貼附三角柱完成陣列後，於眾多三角柱中，任選其一，再選與其同平面的其他三角柱，將 X、Y 平面設於三角柱表面，並在上面畫內切圓。

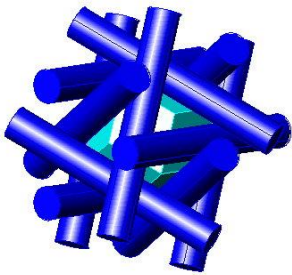


圖 10 擠出圓柱後同步驟 5 陣列，將三角柱刪除。

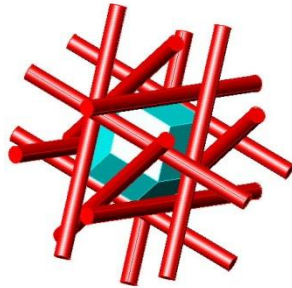


圖 11 同以上步驟製作旋向相反的小圓柱，直徑為大圓柱直徑的一半。

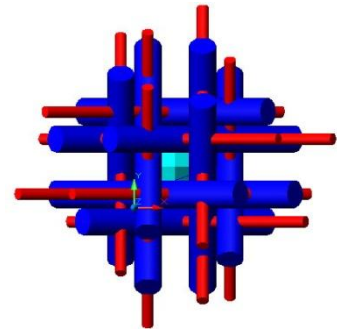


圖 12 成品。

3.貼附正方柱

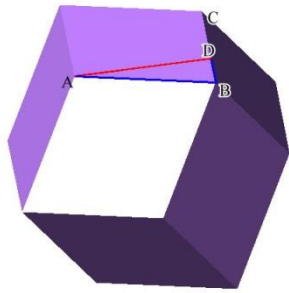


圖 13 連點 A 至 \overline{BC} 上的垂直點 D，得菱形的高。

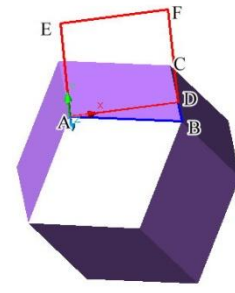


圖 14 以 \overline{AD} 為長，畫一正方形如圖 15，正方形 ADEF。

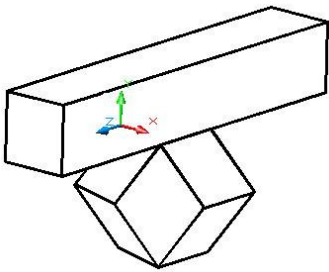


圖 15 擠出正方形 ADEF。

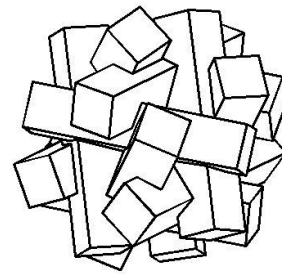


圖 16 陣列正方柱後即可得成品。

4.貼附六角柱

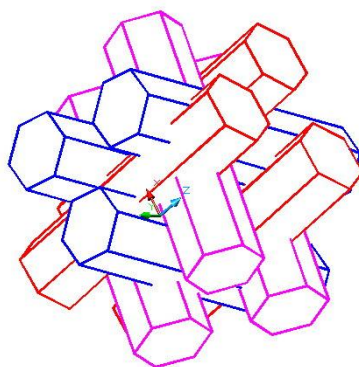


圖 17 六角柱的貼附和矩形柱完全相同

(二)菱形三十面體

1.貼附三角柱：

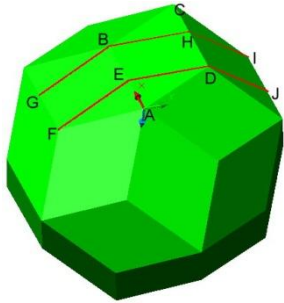


圖 18 設 X.Y 平面於菱形 ABCD 上，連 B 至 \overline{CD} 上的垂直點，再連 D 至 \overline{AB} 上垂直點。

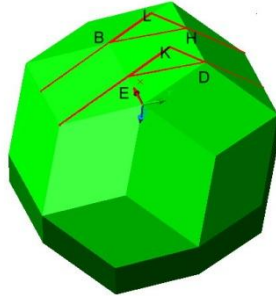


圖 19 連 F、I 至 E、H 和連 B、D 至垂直點 G、J，延伸 \overline{BG} 、 \overline{EF} 、 \overline{CI} 、 \overline{DJ} 至相交，得 $\triangle BHL$ 及 $\triangle DEK$ 。

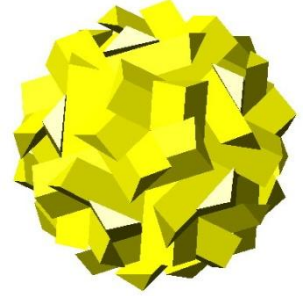


圖 20 擠出 $\triangle BHL$ 及 $\triangle DEK$ 得三角柱陣列，即成。

2.貼附圓柱：

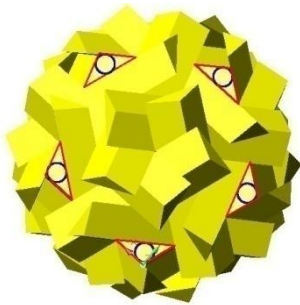


圖 21 在菱形三十面體貼附三角柱完成陣列後，在眾多三角柱中，任選其一，再選與其同平面的其他四個三角柱，設 X.Y 平面於三角柱的等腰三角形上，畫三角柱的內切圓。

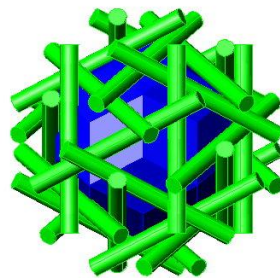


圖 22 擠出圓柱後同步驟 5 陣列，並將三角柱刪除。

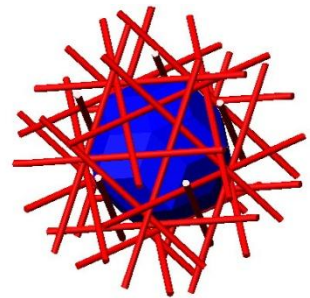


圖 23 同上步驟製作旋向相反的小圓柱，直徑為大圓柱直徑的一半。

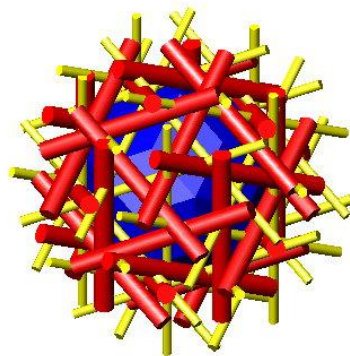


圖 24 成品。

3.貼附正方柱

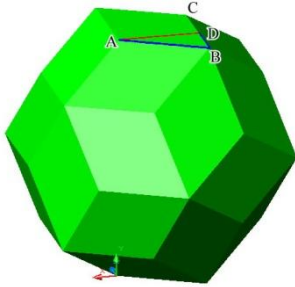


圖 25 連點 A 至 \overline{BC} 上的垂直點 D，得菱形的高。

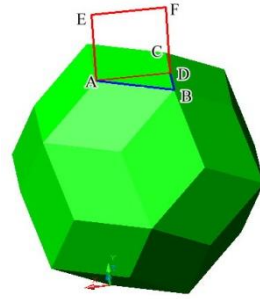


圖 26 以 \overline{AD} 為長，畫一正方形 ADEF。

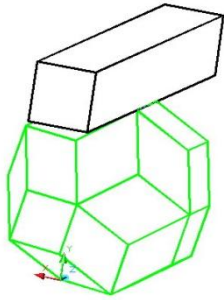


圖 27 擠出正方形 ADEF。



圖 28 陣列正方柱後即可得成品。

4.貼附六角柱

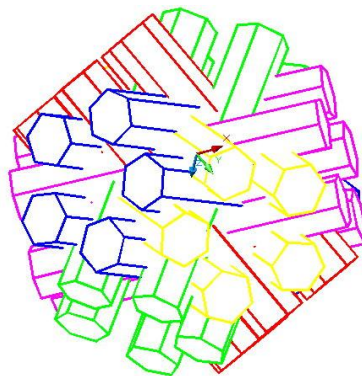


圖 29 六角柱的貼附和矩形柱完全相同

(三)天蠍星

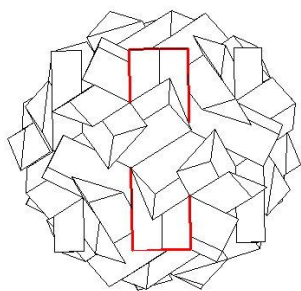


圖 30 打開貼滿三角柱的菱形三十面體

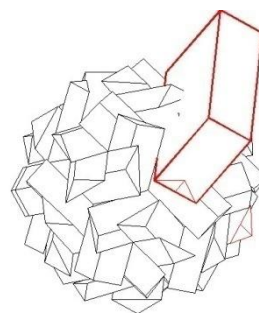


圖 31 任選一三角柱，以其底面之矩形擠出矩形柱

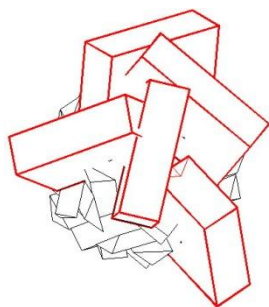


圖 32 陣列該矩形柱

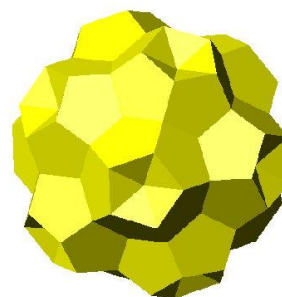


圖 33 陣列結束後與原圖形差集，即得到天蠍星

三、模具設計

在加工菱形三十面體矩形柱的部份，我先用 AutoCAD 繪圖軟體繪製矩形柱的交集凹槽，並討論凹槽處是否有互相平行或哪些角度與長度上的不同差異，接著把加工時所需應用的尺寸標示出就完成了。同樣的方法亦適用於六角柱的貼附，經電腦模擬後，是可行的。

在貼附圓柱的部分，為了避免單根圓柱多次加工鑽孔而產生的累積誤差，我思考了：能不能一次固定全部的大小圓柱，一次加工鑽孔，將整體加工的概念帶入機械設計、機械加工中，如此是最簡單最能從根本解決累計誤差的方法。

從加工的原理來思考，加工面和刀具必須要垂直，並且再加工面對另一端也為一平面，以便於工件的定位、加工。基於這些原因，我用 Auto CAD 分析菱形十二面體和菱型三十面體的結構，並延伸發展出模具。

(一)菱形十二面體貼附三角柱：

從圖形中可以發現，貼附三角柱的菱形十二面體剛好會有四組各有互不平行的三角柱，每一組三角柱由三根互相平行的三角柱組成(圖 35)。而每一根三角柱即是成品中的圓柱和圓孔(順、逆時針)，於是我將每組三根互相平行的三角柱取其端面，連其頂點，成八個大正三角形。沿著這八個大正三角形切割(圖 36)，切割後成爲一正八面體，再和大小圓柱組合切割後即爲菱形十二面體貼附三角柱的模具(圖 37)。

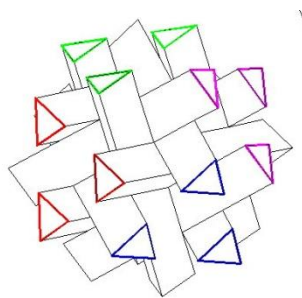


圖 34

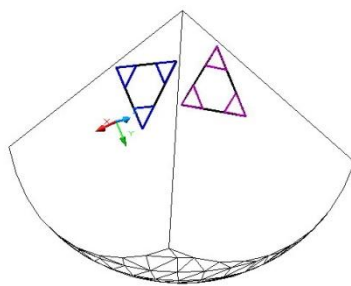


圖 35

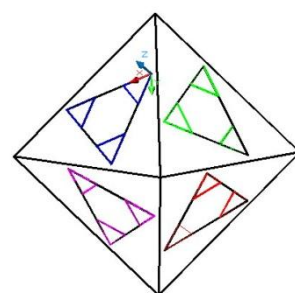


圖 36

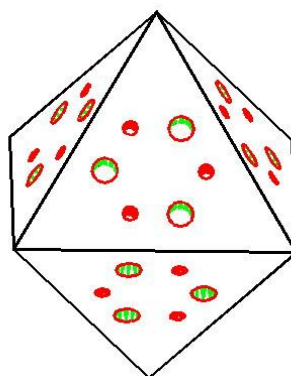


圖 37 菱形十二面體模具—正八面體

(二)菱形三十面體貼附三角柱：

觀察其圖形後，發現菱形三十面體和菱形十二面體有異曲同工之妙。其有六組互不平行的三角柱，每組則有五根互相平行的三角柱(圖 38)。而每一根三角柱即是成品中的圓柱和圓孔(順、逆時針)，於是我將每組三根互相平行的三角柱取其端面，連其頂點，成十二個大正五邊形。沿著這六個大正五邊形切割(圖 39)，切割後成爲一正十二面體(圖 40)，再和大小圓柱組合切割後即爲菱形三十面體貼附三角柱的模具(圖 41)。

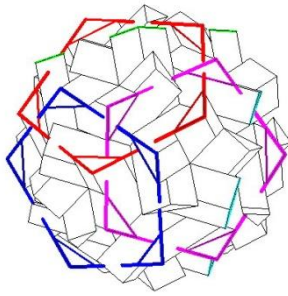


圖 38

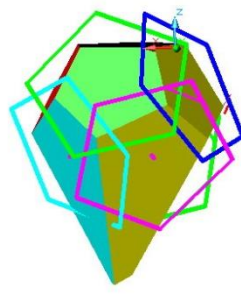


圖 39

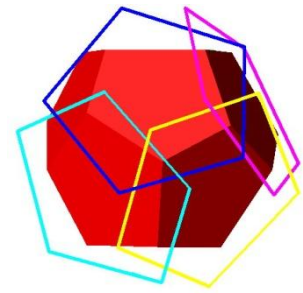


圖 40

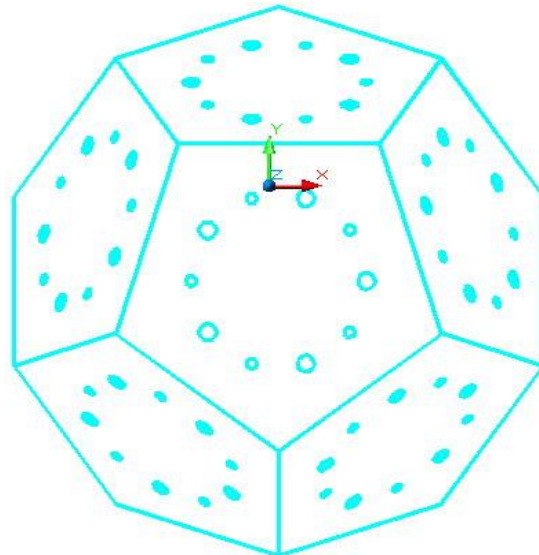


圖 41 菱形三十面體模具—正十二面體

四、實際機械加工

我設計了菱形十二面體外貼三角柱、矩形柱、圓柱、六角柱，還有菱形三十面體外貼三角柱、矩形柱、圓柱、六角柱，及菱型三十面體交集切割後的模型。

在製作菱形十二面體外接三角柱過程中，我用分度頭來固定要加工的物件，並且要確定切削物體與銑刀切割處的平行，測量時要非常準確、精密，任一小點的誤差都可能會影響往後組裝的成敗。在切割菱形十二面體的三角柱時，我一開始使用的材料是圓柱，然後進行兩邊斜角的切割。我從三角柱的長、高、深的計算中發現，用圓柱進行切割可以切成兩個三角柱，但是會過度的浪費一些材料，爲了減少材料的消耗率，我改成用薄片進行三角柱切割，我使用了跟三角柱差不多高的薄片進行切割，但怕饒性不夠，所以設計了一個專門用來固定三角柱的夾具，以節省往後在加工三角柱時所耗費的時間並加快加工程序的速度。

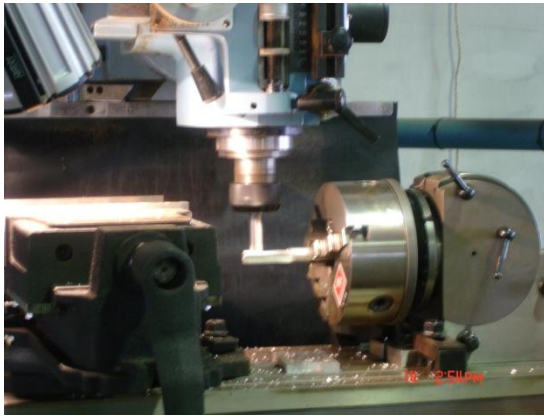


圖 42

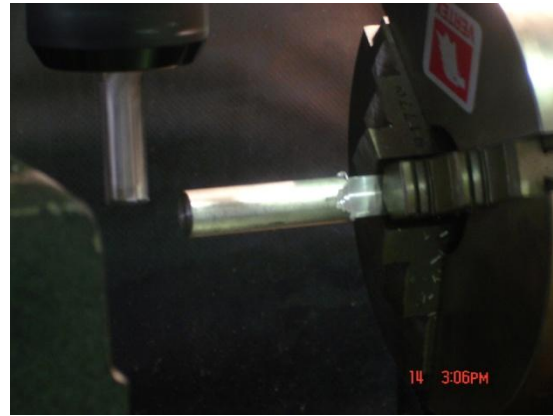


圖 43

夾具的製作過程中，如圖示：



圖 44 正弦桿：先將所需使用的角度用正弦桿擺好，接著將壓克力板放在調整好角度的正弦桿



圖 45 角度規：用銑刀切割後為角度規



圖 46 V 型枕：將角度規作為底座，在將另一個壓克力板放在與角度規的平行斜面上用虎鉗固定，再進行銑割，夾具 V 型枕完成

我使用 36° 的 V 型枕製作 108° 的菱形三十面體三角柱，並拿出之前用圓盤鋸(圖 40)切割好的長、寬、高的木材板厚，放在 V 型枕裡的 V 型凹槽，在切割之前必須檢驗中心位置的偏移，觀察銑刀是否能準確切割，並注意銑刀與虎鉗的距離不可太近。在切割三角柱時我分成幾個步驟，一開始先將所有木材板塊的其中一面都粗銑過一遍，再來就開始切割我所要的三角柱角度，之後就是將全部的三角柱都再一次的精密切割。過程中必須注意到在切割途中是否會有崩壞的可能。在每一次的切割完畢，或更換木板時，要特別清理虎鉗底座、V 型枕裡的 V 型凹槽，因為每一細小木屑或其他灰塵都可能會帶有 $0.1\sim 0.2\text{mm}$ 之間的小誤差，這可能會影響到後面切割完的結果。

切割完後進行組裝，以一個菱形三十面體的任一面作為基準，然後照著面的方向做接黏，便可完成。



圖 47 圓盤鋸

在加工菱形三十面體正方體柱的部份，我先用 AutoCAD 繪圖軟體繪製正方體柱的交集凹槽，並討論凹槽處是否有互相平行或哪些角度與長度上的不同差異，接著把加工時所需應用的尺寸標示出就完成了。



圖 48 多軸鑽孔攻牙機：在生產貼附圓柱的菱形十二面體及菱形三十面體時，發現我已經利用這兩種多面體貼附三角柱後，有四組三根及六組五根的共面關係，利用這點特性，恰好可以使用多軸鑽床攻牙機輔助，增加生產效率。

五、製作成本估算

在這次研究中，「製作成本」佔了極高的學術、商業價值，實地查訪中發現的傳統做法，也就是一根根木條下去鑽孔，其「製作過程」與「組裝」兩者的效率遠不及我用模具

的做法，首先我估計菱形十二面體貼附圓柱後（市面上已經販售，但因成本過高，產量極少），兩種做法的成本差，在估計菱形三十面體（市面上還未販售）。

(一)成本估計：欲求傳統作法與改良作法的成本比例關係，假設鑽孔來回一次 x 塊錢

菱形十二面體，共 12 根圓柱，成品每根圓柱五個孔，若以傳統做法，無疑地必須鑽 (12 根 \times 5 孔)次 $\times x$ 元 = 60 x 元，而且誤差極大，粗製濫造，成品給人的印象不好，就賣不太出去；但以正八面體模具來做，一次孔鑽到底等於鑽五個洞，總共只需鑽(4 面 \times 3 孔)次 $\times x$ 元 = 12 x 元，後來又發展到使用多軸鑽床，一次鑽一個面，就只需鑽 4 面(次) $\times x$ 元 = 4 x 元，在成本上就比傳統做法少了約 15 倍。

製作菱形三十面體，其複雜度又更甚於菱形十二面體，也因成本高的嚇人，導致市面上還無法供給，但我的模具也給了它驚人的低成本。若依照市面上製作菱形十二面體貼附圓柱的方法製作，菱形三十面體，一根 8 孔，就必須鑽(30 根 \times 8 孔)次 $\times x$ 元 = 240 x 元，因誤差累積的特性，其誤差更高於菱形十二面體；改用正十二面體模具製作，只需鑽(6 面 \times 5 鑽)次 $\times x$ 元 = 30 x 元，再使用多孔鑽床，就只需鑽 6 面(次) $\times x$ 元 = 6 x 元，成本上整整降低了約 40 倍。

(二)工作效率：

從成本估計中可以發現菱形十二面體，傳統做法一次只能鑽一個孔，但使用模具的做法一次可鑽(1 面 \times 3 根 \times 5 孔) = 15 孔，效率是 15 倍。若是菱形三十面體，使用模具一次可鑽(1 面 \times 5 根 \times 8 孔) = 40 孔，效率是 40 倍。

(三)組裝：

傳統方式，鑽完圓柱後老實地把東西組合起來，以菱形十二面體來說，經我反覆練習，嘗試以最快速度組合完畢，費時 18 分 47 秒；但以模具來說，當鑽完孔把細圓柱插入，再將模具一片片拆開，即組合完畢，此方法我也嘗試以最快速組合，費時 2 分 52 秒，組裝

效率快 6 倍。

而菱形 30 面體因太過困難，勉強以 4 人共組的方式組合出來，費時 47 分 41 秒；以模具組合，只需一人費時 6 分 07 秒，組裝效率快了約 7.5 倍，勞力減少四分之一。

六、鑽模夾具修正

能夠有效率的減少工時以及簡化繁雜的工序，全都需要靠對成品的了解後，設計一組適合成品生產的模具，我設計的模具在加工時的輔助性，並不全然是為了大量生產，而是提高其製造精度。因透徹了解成品的結構，分析了多面體的二面角後，發展出了符合精度要求的模具，如下圖：

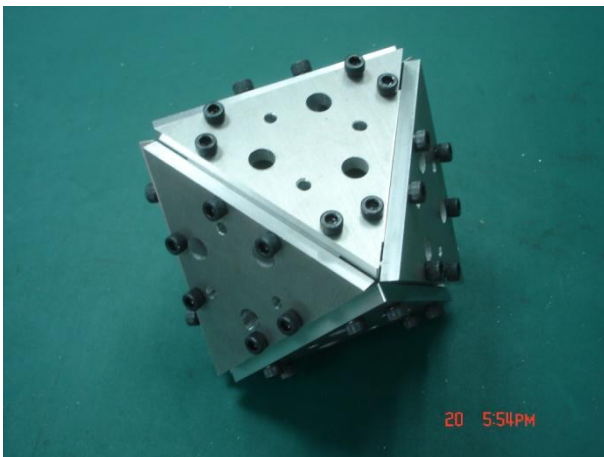


圖 49 菱形十二面體模具(未插入待鑽孔圓棒)

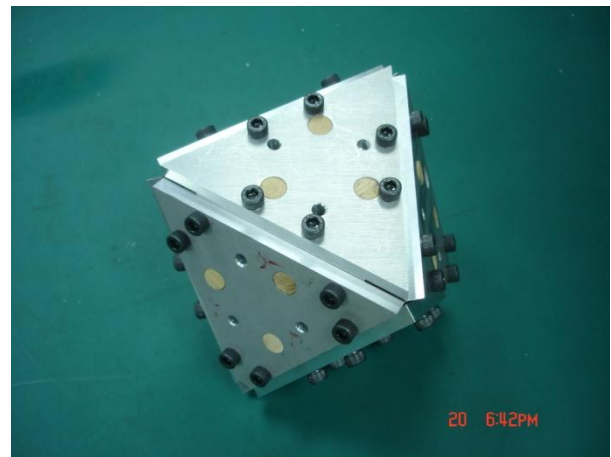


圖 50 菱形十二面體模具(已插入待鑽孔圓棒，即照片中孔)



圖 51 菱形十二面體模具(拆開兩片定位板，查看內部細節)

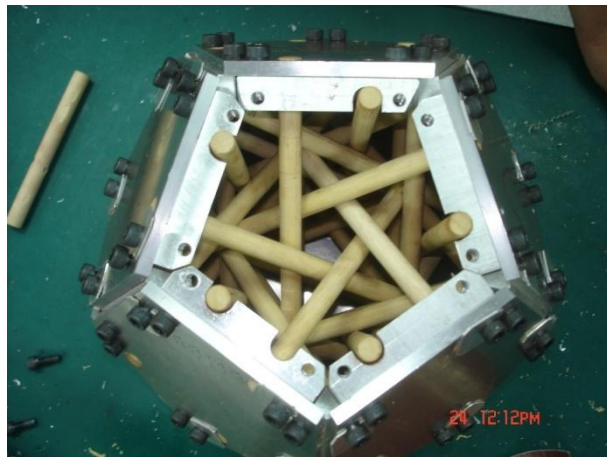


圖 52 菱形三十面體模具(拆開一片定位板，查看內部待鑽圓棒細節)

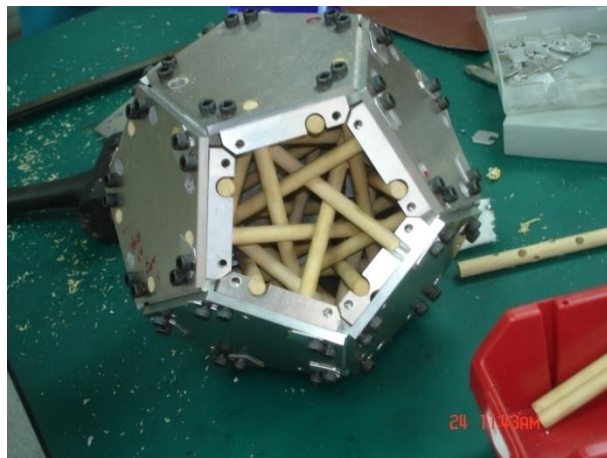


圖 53 菱形三十面體模具(拆開一片定位板，示意圓棒與二面固定棒的關係)

伍、討論

一、 如何藉由觀察立體模型中找出正多面體的二面夾角角度？

先鎖定要尋找的兩個面，將鎖定那兩個面剖面，接著在尋找圖形之間的關係，然後再利用三角函數計算，便可知道二面角度。

二、 在製作紙模型時，要如何考慮黏接在菱形三十面體上面的三角柱的相交角度，以及三角柱內嵌的圓的直徑？

三角柱的相交角度可由二面角得知；而內嵌圓的直徑則是可從三角柱端面作一三點與端面相切的圓。

三、 將菱形十二面體和菱形三十面體外圍貼附的三角柱或圓柱嘗試將其柱長延伸後，是否可以在外圍所產生的空隙再插入一組三角柱或圓柱呢？

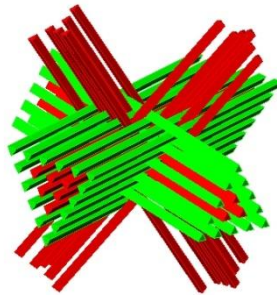


圖 54 菱形十二面體的三角柱延伸，發現其對稱，可以擴張模型。菱形三十面體相接的三角柱，其延伸後沒有完全對稱，故無法用三角柱擴張。把三角柱改成圓柱後，就可以擴大。

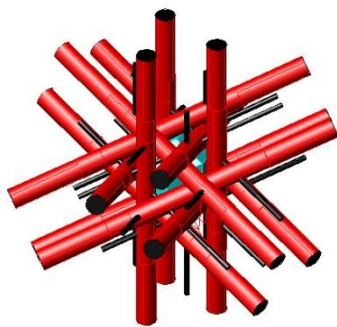


圖 55 菱形三十面體圓柱

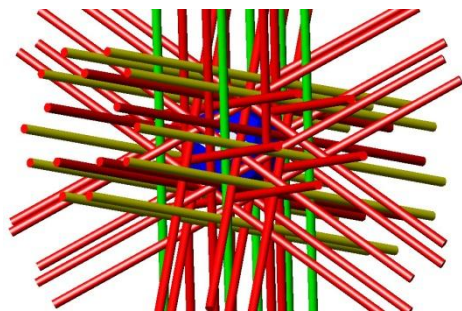


圖 56 菱形三十面體圓柱延伸、圓柱擴增一層

四、 菱形三十面體的大小圓柱，是否恰為順時針與逆時針的關係呢？

是，因為順時針加逆時針的圓柱剛好變成一個可以組裝的益智模型。

五、 討論所要鑽孔的實體的邊或面，並思考如何讓鑽孔的實體再鑽孔的過程中不易脫落，而能準確固定。

設計恰當的夾具。但是經過多次的實際試驗，發現夾具並沒有辦法做到萬全的精準，所以設計了另一款模具作代替

六、 查詢菱形三十面體插滿圓柱後的孔與孔之間的距離與總長，及孔與孔之間是否在中點位置。

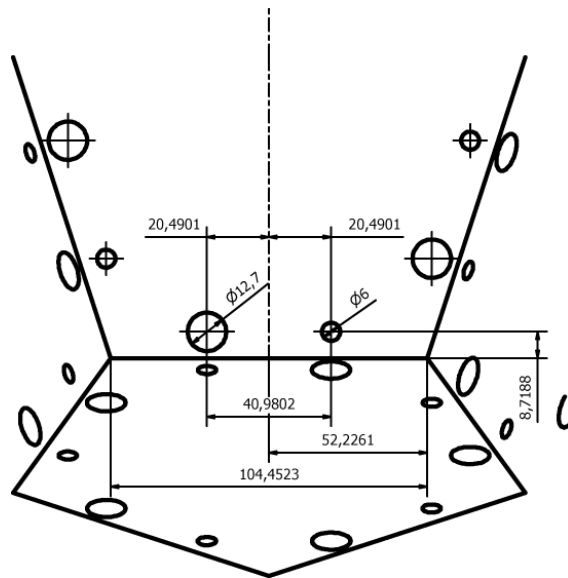


圖 57 經過小數 4 位的測量後，是在中點。

七、 討論切割後的紙雕三角柱的展開面是平行還是梯形，及如何製作。

在繪圖軟體中，把切割後的菱形三十面體的其中一個三角柱取出，發現是個平行的三角柱，接著將三角柱展開，列印出來後進行製作。在製作的過程中必須將三角柱的前端與三角柱的邊長對齊才正確。

八、 如何正確的利用正弦棒，將壓克力板作成 30° 的角度規？

先製作一塊規，塊規高度以三角函數計算出來。

九、 如何將壓克力板放置在角度規上固定，以正確的進行切割。

只要確定定位角度規的正弦桿量度正確，再將角度規及壓克力板夾具以墊片適當的夾持，最重要的是銑削夾具時的方向應該是低轉速逆銑，把握上述原則，即可確定以壓克力板為才的夾具其精準度可信賴。

十、 為何每次切割完成後，都要清理一次虎鉗夾及 V 型枕的部位。

切削過後的碎屑會因靜電而黏在虎鉗、工件上，若不將其清理乾淨，則會影響到切削過後的精度。

十一、 怎麼避免切割到一半時物件崩裂？

測試進刀方向以及進刀的轉速是否適當，經實作發現，木材的紋理會產生程度不一的崩裂，需特別注意其進刀方向。

十二、 如何加工三角柱才不會使木製三角柱有毛邊？

在三角柱後放一塊木板，切削時連後面木板一起，則毛邊會在後面的木板。

十三、 為何製作完一零件時必須先檢查是否正確？

先確定加工後的零件正確後，再大量加工生產，如此以降低風險。

十四、 使用鑽模夾具後，該如何解決鑽頭長度不足的問題？

目前市面上可以找到長達 30 公分的鑽頭，但要如何解決長鑽頭啓動時，引發垂直度不足的問題，目前的解決方式為兩面分開鑽孔。兩面分開鑽孔可以不用擔心會有錯孔的問題，因為模具的精確度可以信賴。

陸、結果與展望

我研究的題目是「巧妙的多面體－多面體鑽模夾具探討」，是以柏拉圖多面體為中心，向外延伸思考，組合正六面體和正八面體的菱形十二面體，以及組合正十二面體和正二十面體的菱形三十面體為架構製作成的益智遊戲及藝術品。

其實在市面上已經可以看見菱形十二面體的產品，不過實際訪查發現，其製作流程毫無效率，成品也不再乎其接合的精密度。所以，針對這些缺點設計出模具，不再是以往那種一根一根鑽孔，而是設法減少鑽孔的次數，帶入整體加工的概念，更進一步的要求精準以及生產速率。製作完菱形十二面體的產品後，再挑戰更複雜的菱形三十面體，一樣使用整體加工的觀念設計出專屬的模具，便輕鬆的完成作品。

在切割貼附三角柱的菱形三十面體後得到的立體中，發現它也是具有多面體規律變化的美感，規律又不像菱形三十面體呆滯，於是嘗試用機械加工將它作出來，由於是從原本三角柱複斜切削，所以製作了專屬的 V 型夾具，成功切削出複斜三角柱後，貼附到菱形三十面體便是第二項藝術成品了。

在這次的研究中，對於機械製造最大的獲益是將整體加工的概念引進機械設計和機械加工中，確實降低單工件多次加工所產生的累積誤差，並且有效的降低工時成本，以便商業發展時得以增加利潤。

條列分析如下：

- 一、將菱形十二面體、菱形三十面體每個面貼附所能之最大三角柱(即不互相干涉)後，可得順、逆時針兩種旋向(即左、右螺旋)。
- 二、組合菱形十二面體、菱形三十面體大小相異的左、右螺旋圓柱後，發現大小圓柱互相牽制、定位。若拆開後再組裝極需要立體觀念思考，即第一項成品，是益智遊戲也為藝術品。
- 三、切割菱形三十面體的三角柱後可得一嶄新、規則狀之立體，即第二項藝術成品。

四、從貼附大小圓柱後的菱形十二面體可發現有四組平行的圓柱，每組有三根圓柱，且三根圓柱的圓為共面。將其切割後可得一正八面體，與大小圓柱插集後可得大小圓孔，即所求的模具。

五、從貼附大小圓柱後的菱形三十面體可發現有六組平行的圓柱，每組有五根圓柱，且五根圓柱的圓為共面。將其切割後可得一正二十面體，與大小圓柱插集後可得大小圓孔，即所求的模具。

六、菱形十二面體及菱形三十面體貼附矩形柱、六角柱成功，為第四、五項藝術成品。



圖 58 菱形三十面體貼附矩形柱成品

柒、參考資料

1. 梁子傑 (民 94)。幾何原本導讀。臺北市：九章。
2. 歐幾里得，藍紀正、朱恩寬譯 (民 81)。幾何原本。臺北市：九章。
3. 李維華、陳永昌 (民 94)。電腦輔助製圖 **AutoCAD2005**。全華科技圖書。
4. 林英明、林昂 (民 95)。機械製造 I。全華科技圖書 (四版)。
5. 林英明、林昂 (民 95)。機械製造 II。全華科技圖書 (四版)。
6. 平斯 (無日期)。柏拉圖的地面。數學傳播 22 卷 4 期。民 87 年 12 月，取自：
http://www.math.sinica.edu.tw/math_media/d224/22413.pdf
7. 國立台灣科學教育館歷屆作品說明書，方圓之間—方體內的正多面體造形設計與加工 (無日期)。台北縣：國立台灣科學教育館。民 95，取自：
<http://www.ntsec.gov.tw/activity/race-1/46/technical/0909/090904.pdf>
8. 多面體 (無日期)。維基百科全書。民 96，取自：
<http://zh.wikipedia.org/w/index.php?title=%E5%A4%9A%E9%9D%A2%E4%BD%93&variant=zh-tw>
9. 多軸式鑽孔攻牙機 (無日期)。成發工業股份有限公司。民 96，取自：
<http://www.chenfwa.com.tw/chinese/05-d6-165.htm>
10. 鑽模與夾具 (無日期)。德霖技術學院機械工程系數位化教材。取自：
<http://www.dlit.edu.tw/dep/academics/Me/elearning/lan/F01.pdf>
11. 自動化夾治具設計 (無日期)。Jimmore International Company.技術文件。取自：
<http://www.jimmore.com.tw/hydraulic/index.htm>
12. *Cube-Octahedron Compound* (2007, October 5). Wolfram Math World, the web's most extensive mathematics resource. from the World Wide Web:
<http://mathworld.wolfram.com/Cube-OctahedronCompound.html>
13. *Puzzles* (n. d.). George W. Hart, from the World Wide Web:
<http://www.georgehart.com/puzzles/index.html>

附錄一、正多面體二面角證明

在製作多面體時，需要親自求證正多面體的多面角，才能發現正多面體各個角度之間的關聯。下面是正四面體、正六面體、正八面體、正二十面體的相關證明：

一、正四面體二面角：

令正四面體邊長為 1 單位，連接 \overline{AE} 、 \overline{DE} ，E 為 \overline{BC} 終點，則 $\overline{AE} = \overline{DE}$

$$\because \overline{AB} = \overline{AC} \quad \therefore \overline{AE} \perp \overline{BC}, \because \overline{AB} = 1, \overline{BE} = 0.5 \quad \therefore \overline{AE} = 1.732$$

連接 \overline{CF} ，F 為 \overline{AD} 中點，則 $\overline{AE} = \overline{DE} = \overline{DF} = 0.5$

$$\because \text{平移 } \overline{CF} \text{ 至 E 點得 } \overline{EG} \quad \therefore \overline{CF} = \overline{EG} \quad \angle EAD = \angle EDA = \cos^{-1} \overline{FC} \div \overline{BC} = 54.735^\circ$$

$\triangle AED$ 中， $\angle AED = 180^\circ - \angle BAD - \angle DAB = 70.529^\circ$

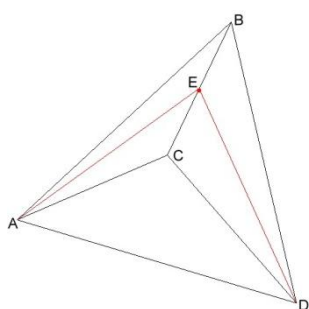


圖 59 正四面體等角

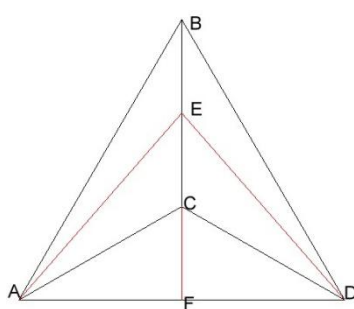


圖 60 正四面體正視

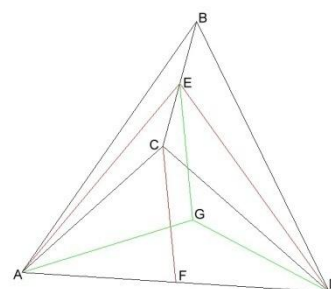


圖 61 正四面體二面角證明

二、正八面體二面角：

令正八面體邊長為 1 單位

連接 \overline{DF} 中 B 至頂點 A、C， $\overline{AB} = \overline{AC}$ ，連接 \overline{AC} 終點 E 至 B， $\overline{AC} \perp \overline{BE}$

$$\triangle ABF \text{ 中，} \because \overline{AF} = 1, \overline{FB} = 0.5 \quad \therefore \overline{AB} = 1.732$$

$$\triangle ABE \text{ 中，} \overline{AE} = 0.5, \overline{AB} = 1.732$$

$$\angle ABE = \angle CBE = \cos^{-1} \overline{EB} / \overline{AB} = 54.735^\circ$$

$$\angle ABC = \angle ABE + \angle CBE = 109.471^\circ$$

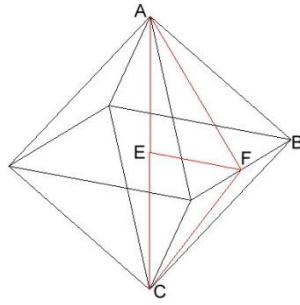


圖 62 正八面體等角

三、正十二面體二面角：

令正十二面體邊長為 1 單位

連接中點 G 至 \overline{AC} 終點 B、 \overline{DF} 終點 E，得 \overline{BG} 、 \overline{EG}

圖 63 中， $\angle CHB=54^\circ$ ， $\angle FCB=36^\circ$ ， $\overline{CB}=\cos 36^\circ=0.809$

$$\overline{AC} = \overline{CD} = \overline{BE} = 2\overline{CB} = 1.618$$

$\angle ICJ=72^\circ$ ， $\angle CIJ=90^\circ$ ，則 $\angle CJI=18^\circ$

$$\overline{BG} = \overline{IJ} = \cos 18^\circ = 0.95$$

$$\angle GOB = \cos^{-1} \overline{BO} / \overline{BG} = 31.71^\circ \quad \angle GOB = \angle GEO$$

$$\angle BGE = 180 - \angle GBO - \angle GEO = 116.565^\circ$$

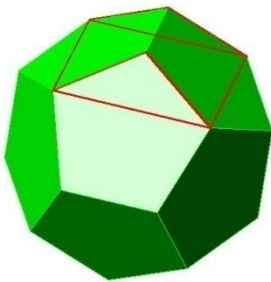


圖 63 正十二面體彩現示意

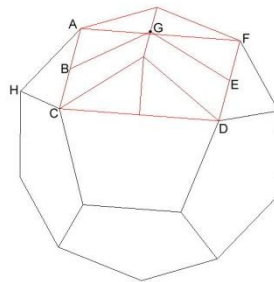


圖 64 正十二面體等角

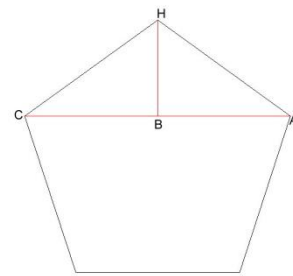


圖 65 連接 \overline{BH} ， $\overline{HB} \perp \overline{CA}$

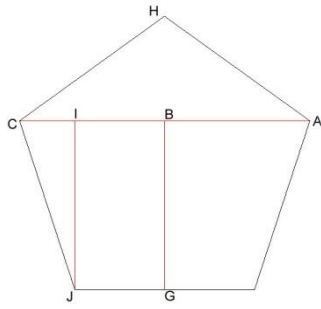


圖 66 Δ 平移 \overline{BG} 得 CIJ

四、正二十面體二面角：

令正二十面體邊長為 1 單位

連 \overline{EG} 中點 F 至 A、D，再連點 A、D，

五邊形 ABCDE 中， $\angle AED=108^\circ$ ， $\angle EAD=36^\circ$

連 \overline{AD} 中點 D 至 E， $\overline{AH} = \overline{DH} = \cos 36^\circ = 0.809$ ΔAEG 中，連 \overline{EG} 中點 F 至 A

$\therefore \overline{AE} = \overline{AG} = 1$ ， $\overline{EF} = 0.5$ $\therefore \overline{AF} = \overline{FD} = 0.866$ ΔAFD 中

$\angle FDA = \cos^{-1} \frac{\overline{HD}}{\overline{FD}} = 20.903^\circ$

$\angle AFD = 180^\circ - \angle AFE - \angle FDA = 138.19^\circ$

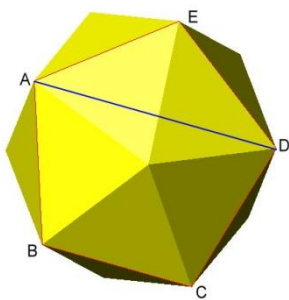


圖 67 正二十面體彩現，連點 A、D

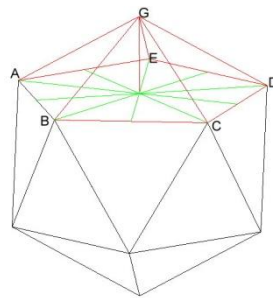


圖 68 正五邊形 ABCDE
 $\overline{AD} \perp \overline{DE}$

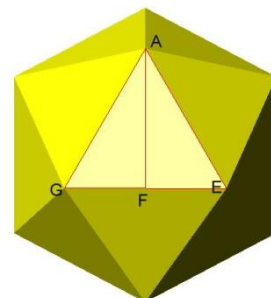


圖 69 正二十面體彩現，連中點 F 至 A

附錄二、系列成品圖

系列成品圖展示了鑽模夾具設計的重點—菱形十二面體與菱形三十面體貼附圓柱的成品，以及貼附三角柱、三角柱延邊緣切割的兩種型態、矩形柱、六角柱等六種成品。巧妙的是這六種成品所呈現的型態不盡相同，但其構成原理是完全相同的。這六種成品的面貌不只如此，只要將貼附面的邊緣縮小，貼齊面的距離拉大，貼附柱體延長，便可以帶來許多不同的變化，增加可看性。另外變形的程度更可以依應用層面變化，如果將型體結構應用在生活中常見的立燈燈罩，其結構便可以經過延伸柱長後，顯得較為鬆散；若是應用在工程結構，或許不需要整個完整的形體應用，可以取部分的連接頂點，在工程應用的層面必定可以廣泛的拓展！

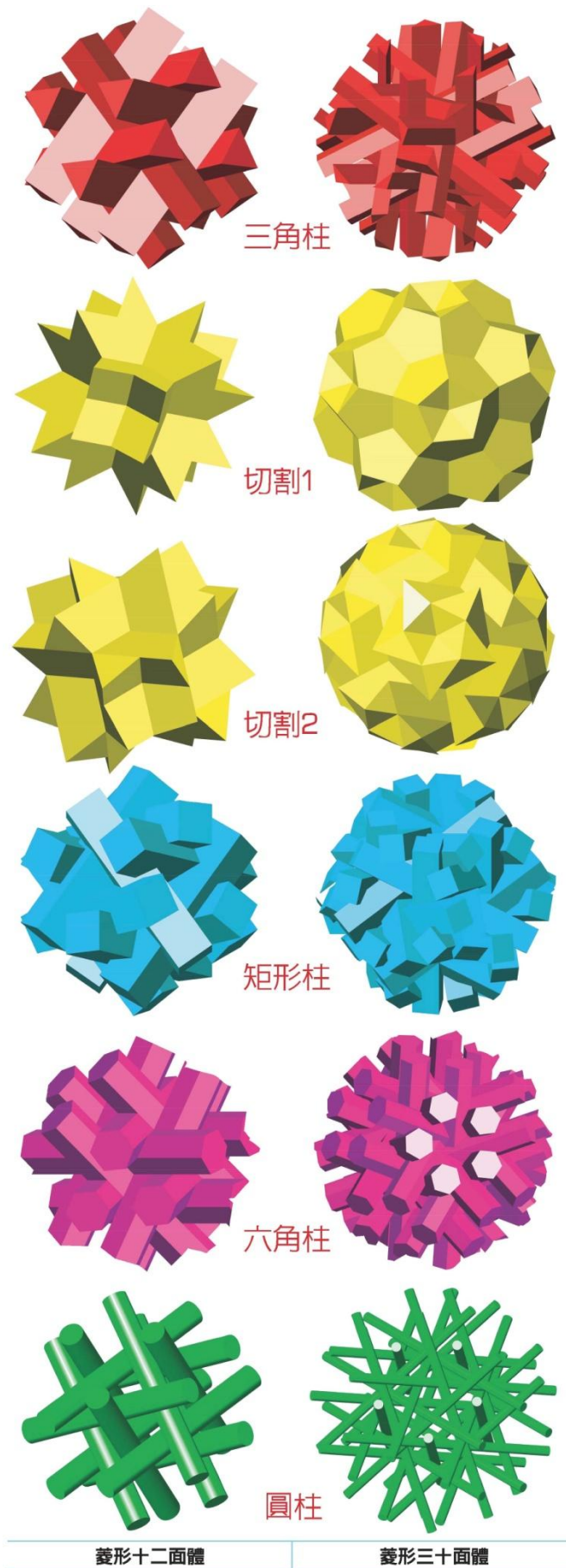


圖 70 系列成品圖