第六屆旺宏科學獎

成果報告書

參賽編號：*SA*6-144

作品名稱：共點圓　共圓點

姓名：陳凱傑

關鍵字：限制圓、限制點、完全四邊形

共點圓、共圓點

一、研究動機：

在一場關於幾何的演講中，我聽到了一個非常有趣的東西。那就是四條兩兩交一點直線(不存在有三線交一點、不存在有平行線組)，所有任三條直線構成的三角形其外接圓相交於一點，於是便繼續觀察五條直線，是否有某種特別的性質。

二、研究目的：

觀察知道在完全四邊形(*Complete Quadrilateral*)中，四個三角形的外接圓會共點 P，我稱其為限制點(*Restricted Point*)。而將其推廣至多條兩兩交一點直線(不存在有三線交一點、不存在有平行線組)。加入新的一條直線，找尋任意完全四邊形的限制點 P，再度形成四個不同的完全四邊形的限制點，而這些點發現其又會共圓，稱其為一限制圓(*Restricted Circle*)。而再加入新的一條直線，找尋所有的限制圓，又發現會共點。本篇報告的目的在探究這種關係，並試圖加以證明。

三、研究過程：

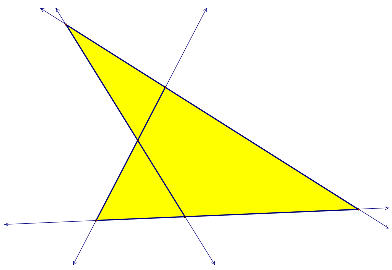
(一) 定義

(1) 符號之意義

$n(G)$為 G 集合的元素個數；$\overline{G}$ 表示為 G 的補集$(S-G)$。

(2) 完全四邊形 *Complete Quadrilateral*

四條相異的兩兩交一點直線，任三線不交於一點、不存在有平行線組，如圖(一)，而由所有相交的六點所決定的便是完全四邊形。



圖(一)

(3) 限制點及限制圓 *Restricted Point* & *Restricted Circle*

直線數用 n 表示，$n\geq 4$。
藉由觀察可以發現在完全四邊形中，任三條直線構成的三角形，有

$C_3^4=4$ 個三角形，其外接圓有共點 P_4，稱此點 P_4 為 n=4 的限制點。

若再加入新的一條直線，不存在有三線交一點、不存在有平行線組的情況，即 n=5，根據上述的說明，任四條直線可決定一個限制點，所以有 $C_4^5=5$ 個限制點，若此 5 個限制點會共圓，稱此圓 C_5 為 n=5 的限制圓。

所以定義：$n\in N$，$n\geq 4$
①當 n 為偶數，若存在有限制圓 C_{n-1}，且 n 個限制圓共一點，則稱此共點為限制點 P_n。
②當 n 為奇數，若存在有限制點 P_{n-1}，且 n 個限制點共一圓，則稱此共圓為限制圓 C_n。

(4) $n\in N$，$n\geq 4$ 時，n 條直線內，小於 n 的直線數的限制點及限制圓

有 n 條直線，將直線編號從 1 至 n，令 S={1,2…n}=$\{a_i|m\neq s, a_m\neq a_s\}$。

若已知所有小於 n 的直線數都有限制點或限制圓。

$n(G)=j$，$j<n$。當一個限制圓 C_j 由 G 的直線決定。$\forall k, i_k\in N, i_k\leq n$，

$\overline{G}=\{a_{i_1},a_{i_2}...a_{i_{n-j}}\}$，稱其為 $C_{-a_{i_1}a_{i_2}...a_{i_{n-j}}}$ ，亦可寫成如：$C_{-a_{i_2}a_{i_1}a_{i_3}...a_{i_{n-j}}}$ 、

$C_{-a_{i_3}a_{i_1}a_{i_2}a_{i_4}...a_{i_{n-j}}}$ …等形式，皆表示不為這些直線組成。

$n(H)=t$，$t<n$，當一個限制點 P_t 由 H 的直線決定，$\forall k, i_k \in N, i_k \le n$ ，

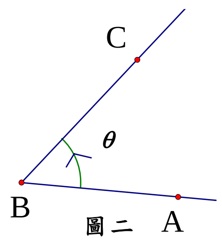
$\overline{H}=\{a_{i_1},a_{i_2}...a_{i_{n-t}}\}$，稱其為 $P_{-a_{i_1}a_{i_2}...a_{i_{n-t}}}$ 。

(5) 編號定義的增廣

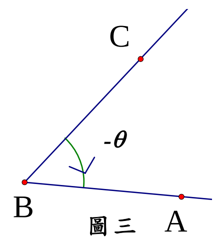
①$j<k$，定義編號 j,k 的直線交點為 P_{jk}。
②將兩條直線的交點 P_{jk} 視為由此兩條線決定的"限制點"。
③將三條直線的三交點外接圓視為由此三條線決定的"限制圓"。

(6) 方向角

由於希望能夠證明圓共點、點共圓的性質，本篇採取的方法是用圓的性質—當兩角相等或互補時即為共圓，而藉由觀察得知，在不同情況時，有時角度是相等，有時角度是互補，而且難以看出這兩種情況是在什麼樣的條件下成立。所以本篇引用了方向角。

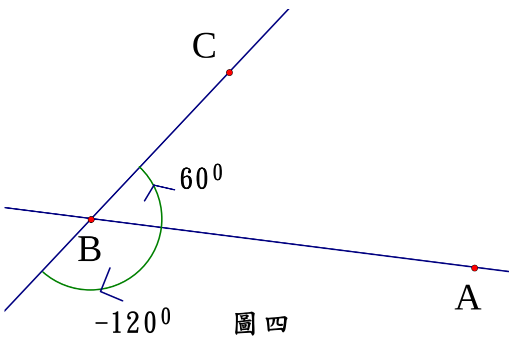


圖二



圖三

定義方向角 $\angle ABC$：
為 BA 轉至 BC 所需的角度，以逆時針方向為正。
如圖(二)、圖(三)所示，
$\angle ABC=\theta>0$ ，則 $\angle CBA=-\theta<0$



圖四

我們要求 $k\in Z$，當 $\theta=\varphi\pm k\pi$，為了證明方便，我們將 θ 和 φ 視為相同。
如圖(四)所示，由直線 BA 轉至直線 BC 所需的角度可以是 60°，也可以是−120°。
我們得到：
60°= −120°+180° 或 60°−180°= −120°。
則把 60°和−120°視為相同。

這個式子的意義在於旋轉的效果，即一條線旋轉 60°和旋轉−120°，最後所在的位置是相同的，旋轉後的線和其他的直線夾角關係只要是原先的直線旋轉相同的方向角，如：−120°、60°、240°…，就能有一樣的夾角關係。

(二) 定理

S={1,2…n}={ $a_i \mid m \neq s, a_m \neq a_s$ }

(1) 定理 1：

$n\geq 2$，所有小於 n 的直線數都有限制點或限制圓 $\Leftrightarrow$ 存在 C_{n-1} 或 P_{n-1}

[證明]

“$\Rightarrow$”顯然成立。

“$\Leftarrow$”直線數為 2 顯然有限制點，直線數為 3 顯然有限制圓。又已知存在 C_{n-1} 或 P_{n-1}，而 C_{n-1} 或 P_{n-1} 存在的充分必要條件之一為 P_{n-2} 或 C_{n-2} 存在。藉由數學歸納法易知 $n\geq 2$，所有小於 n 的直線數都有限制點或限制圓

(2) 定理 2：

$j<n$，有 $G=\{a_{i_1},a_{i_2}...a_{i_j}\},\overline{G}=\{a_{i_{j+1}},a_{i_{j+2}}...a_{i_n}\}$，使 $a_{i_k}=b_k$，

則 $C_{-b_{j+1}b_{j+2}...b_n}$ 其上有 $P_{-b_1b_{j+1}...b_{j+2}b_n}, P_{-b_2b_{j+1}...b_{j+2}b_n} \dots P_{-b_jb_{j+1}...b_{j+2}b_n}$ 等 j 個限制點。

[證明]

由定義(3)，$C_{-b_{j+1}b_{j+2}...b_n}$ 是被以 G 的元素為編號的直線決定。

由定義(3)，$P_{-b_ib_{j+1}...b_{j+2}b_n}$ 是被以 $G/\{b_i\}$的元素為編號的直線決定。

$\forall i\in N$, i=1,2…j

由定義(2),知道定理 2 成立。

進一步，我們可得到定理 2-1：

$j<n$，有 $G=\{a_{i_1},a_{i_2}...a_{i_j}\},\overline{G}=\{a_{i_{j+1}},a_{i_{j+2}}...a_{i_n}\}$，使 $a_{i_k}=b_k$，

則 $P_{-b_{j+1}b_{j+2}...b_n}$ 為 $C_{-b_{j+2}b_{j+3}...b_n}, C_{-b_{j+1}b_{j+3}...b_n} \dots C_{-b_{j+1}b_{j+2}...b_{n-1}}$ 等(n-j)個圓的共點。

[證明]

由定理 2，$C_{-b_{j+2}b_{j+3}...b_n}$ 其上有 $P_{-b_1b_{j+2}...b_n}$ 、$P_{-b_2b_{j+2}...b_n}$ 、… $P_{-b_{j+1}b_{j+2}...b_n}$ 。

同理，$C_{-b_{j+1}b_{j+3}...b_n}$ 上有 $P_{-b_{j+2}b_{j+1}b_{j+3}...b_n}$ ($P_{-b_{j+1}b_{j+2}...b_n}$)… $C_{-b_{j+1}b_{j+2}...b_{n-1}}$ 上有 $P_{-b_{j+1}b_{j+2}...b_n}$ 。

所以 $P_{-b_{j+1}b_{j+2}...b_n}$ 為 $C_{-b_{j+2}b_{j+3}...b_n}, C_{-b_{j+1}b_{j+3}...b_n} \dots C_{-b_{j+1}b_{j+2}...b_{n-1}}$ 等(n-j)個圓的共點。

(3) 定理 3：

$t<n$，有 $H=\{a_{i_1},a_{i_2}\ldots a_{i_t}\},\overline{H}=\{a_{i_{t+1}},a_{i_{t+2}}\ldots a_{i_n}\}$，使 $a_{i_t}=b_t$，

則 $P_{-b_{t+1}b_{t+2}\ldots b_n}$ 其上有 $C_{-b_1b_{t+1}b_{t+2}\ldots b_n},C_{-b_2b_{t+1}b_{t+2}\ldots b_n}\ldots C_{-b_tb_{t+1}b_{t+2}\ldots b_n}$ 等 t 個限制點。

[證明]

由定義(3)，$P_{-b_{t+1}b_{t+2}\ldots b_n}$ 是被以 H 的元素為編號的直線決定。

由定義(3)，$C_{-b_rb_{t+1}b_{t+2}\ldots b_n}$ 是被以 $H/\{b_r\}$的元素為編號的直線決定。

$\forall r\in N$, $r=1,2\ldots t$
由定義(2),知道定理 3 成立。

進一步，我們可得到定理 3-1：

$t<n$，有 $H=\{a_{i_1},a_{i_2}\ldots a_{i_t}\},\overline{H}=\{a_{i_{t+1}},a_{i_{t+2}}\ldots a_{i_n}\}$，使 $a_{i_t}=b_t$，

則 $C_{-b_{t+1}b_{t+2}\ldots b_n}$ 其上有 $P_{-b_{t+2}b_{t+3}\ldots b_n},P_{-b_{t+1}b_{t+3}\ldots b_n}\ldots P_{-b_{t+1}b_{t+2}\ldots b_{n-1}}$ 等(n-t)個限制點。

[證明]

由定理 3，$P_{-b_{t+2}b_{t+3}\ldots b_n}$ 在 $C_{-b_1b_{t+2}b_{t+3}\ldots b_n},C_{-b_2b_{t+2}b_{t+3}\ldots b_n}\ldots C_{-b_{t+1}b_{t+2}b_{t+3}\ldots b_n}$ 上。

同理，$P_{-b_{t+1}b_{t+3}\ldots b_n}$ 在 $C_{-b_{t+2}b_{t+1}b_{t+3}\ldots b_n}$ ($C_{-b_{t+1}b_{t+2}\ldots b_n}$)上…$P_{-b_{t+1}b_{t+2}\ldots b_{n-1}}$ 在 $C_{-b_{t+1}b_{t+2}\ldots b_n}$ 上。

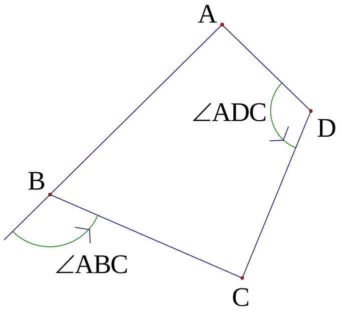
所以 $C_{-b_{t+1}b_{t+2}\ldots b_n}$ 其上有 $P_{-b_{t+2}b_{t+3}\ldots b_n},P_{-b_{t+1}b_{t+3}\ldots b_n}\ldots P_{-b_{t+1}b_{t+2}\ldots b_{n-1}}$ 等(n-t)個限制點。

(4) 定理 4：方向角性質

①方向角相等的涵義：$\angle ABC=\angle ADC \Leftrightarrow A$、$B$、$C$、$D$ 共圓

[證明]

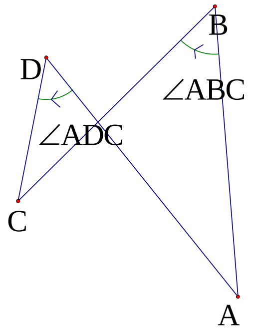
(a) B,D 於 AC 異側



$\angle ABC=\angle ADC \Leftrightarrow$ 互補關係，A、B、C、D 共圓

圖(五)

(b) B,D 於 AC 同側



$\angle ABC=\angle ADC \Leftrightarrow$ 對同弧關係，A、B、C、D 共圓

圖(六)

所以 $\angle ABC=\angle ADC \Leftrightarrow A$、$B$、$C$、$D$ 共圓

②遞移律：$\angle ABC=\angle CDE$，$\angle CDE=\angle FGH \Rightarrow \angle ABC=\angle FGH$

[證明]

Let $\angle CDE=x$

由定義(5)，$\angle ABC=\angle CDE \Rightarrow \angle ABC=x+k\pi\ (k\in Z)$

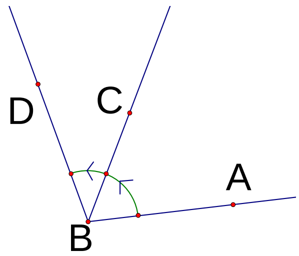
再由定義(5)，$\angle CDE=\angle FGH \Rightarrow \angle FGH=x+t\pi\ (t\in Z)$

則 $\angle ABC=\angle FGH+(k-t)\pi\ ((k-t)\in Z)$，由定義(5)，$\angle ABC=\angle FGH$ 成立。

③($\angle X$，+)：$\angle ABC+\angle CBD=\angle ABD$

[證明]

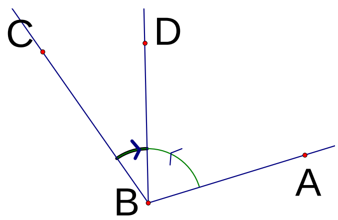
(a) D 點在 $\angle ABC$ 外



$\angle ABC+\angle CBD=\angle ABD$

圖(七)

(b) D 點在 $\angle ABC$ 中



$\angle ABC+\angle CBD=\angle ABC-\angle DBC=\angle ABD$

圖(八)

減法運算視為加法的反運算。

④三角形內的方向角和：ΔABC 中，$\angle ABC+\angle BCA+\angle CAB=0$

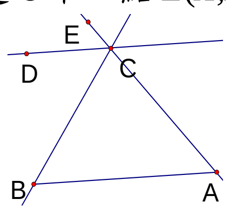
[證明]

如圖(六)，作 $CD//AB$，延長 AC，在 AC 上靠近 C 取一點 E(A,E 異側)。

$\angle ABC+\angle BCA+\angle CAB$

$=\angle DCB+\angle BCA+\angle ECD$

$=\angle ECA$(定理 8)$=0$

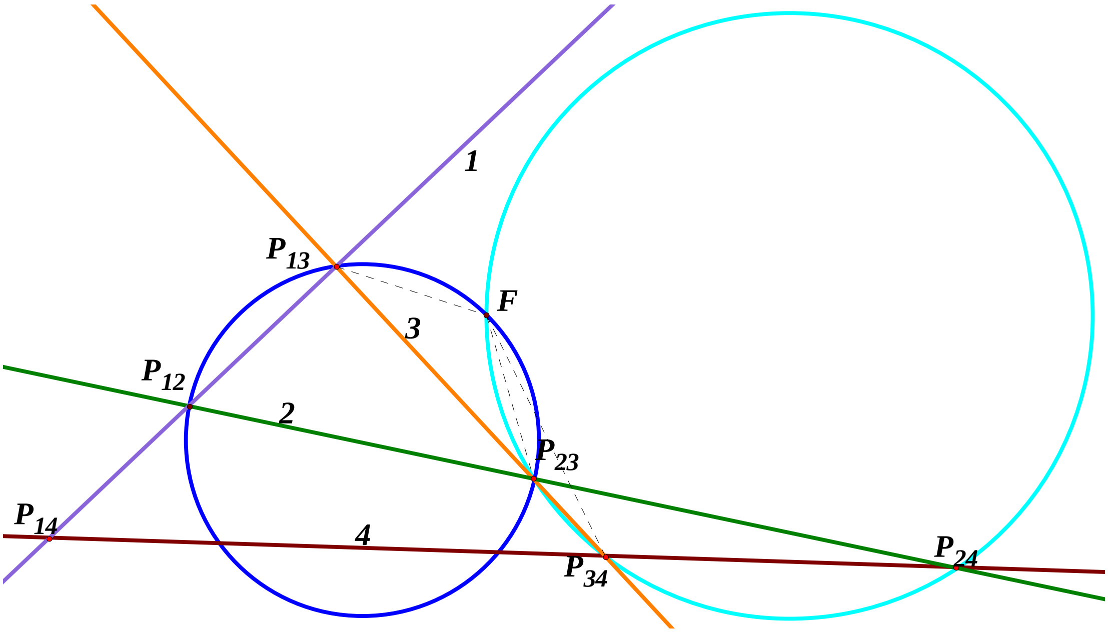


圖(九)

(三) n=4

如圖(十)，令 C_{-1} 與 C_{-4} 的交點除了 P_{23} 外，還有一點 F。

連接 $\overline{FP_{13}}$ 、$\overline{FP_{23}}$ 和 $\overline{FP_{34}}$ 。



圖(十)

[證明]

以下採用了定理 4—方向角性質

由共圓關係，我們有 $\angle P_{24}FP_{23}=\angle P_{24}P_{34}P_{23}$，$\angle P_{23}FP_{12}=\angle P_{23}P_{13}P_{12}$

因此 $\angle P_{24}FP_{12}=\angle P_{24}FP_{23}+\angle P_{23}FP_{12}$

$=\angle P_{24}P_{34}P_{23}+\angle P_{23}P_{13}P_{12}$

$=\angle P_{14}P_{34}P_{13}+\angle P_{34}P_{13}P_{14}$ ($\because P_{12}$-P_{13}-P_{14})

$=-\angle P_{13}P_{14}P_{34}$

$=\angle P_{34}P_{14}P_{12}$

$=\angle P_{24}P_{14}P_{12}$

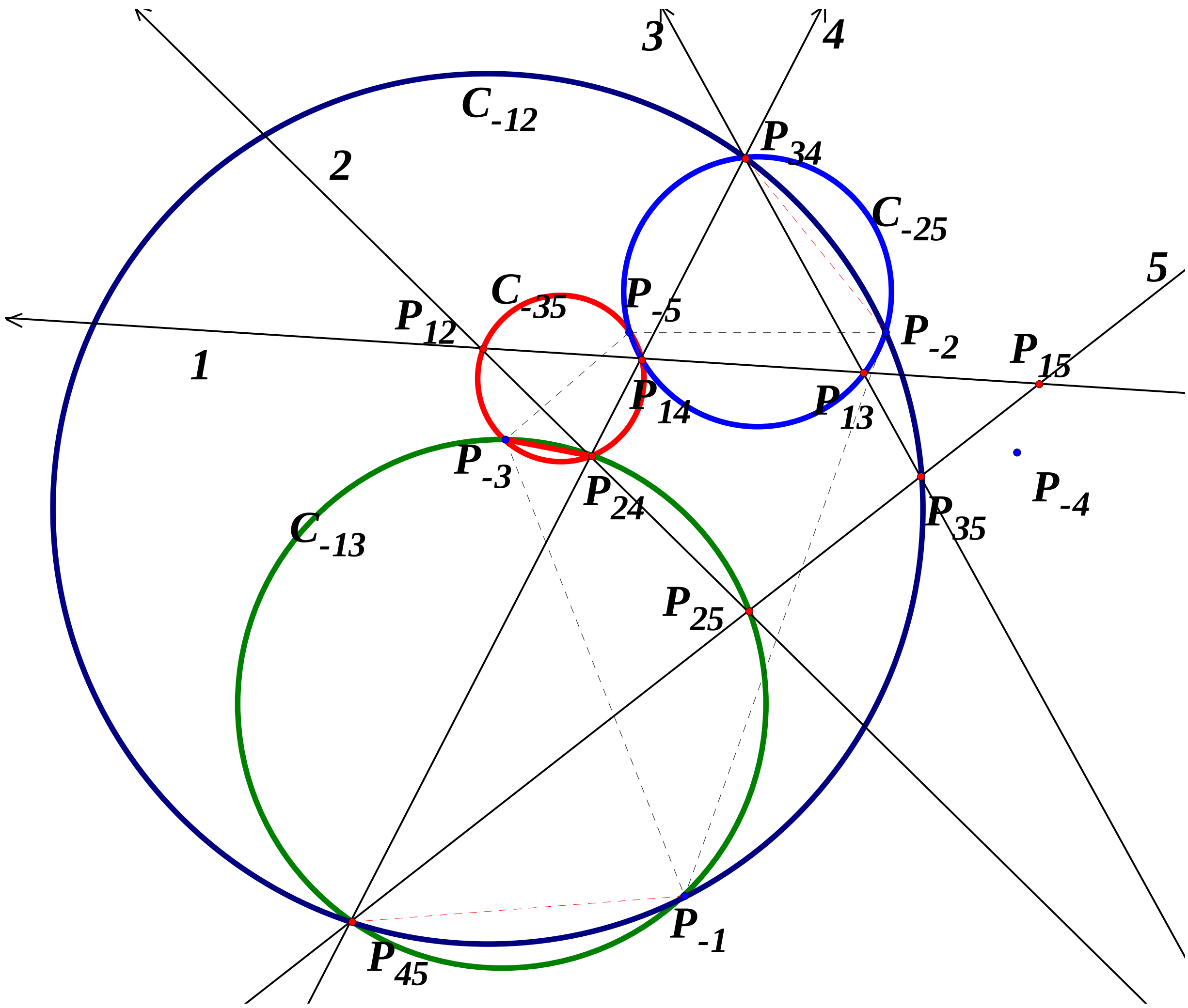
所以 P_{24}、F、P_{12}、P_{14} 共圓，亦即 F 在 $\Delta P_{12}P_{14}P_{24}$ 的外接圓 C_{-3} 上。

同理可證，F 存在 C_{-2} 上。

根據定義(2)(4)，F 即為限制點 P_4。

(四) n=5

如圖(十一)，令 P_{-1}、P_{-2} 與 P_{-3} 的外接圓為 C。連接 $\overline{P_{-2}P_{-5}}$、$\overline{P_{-3}P_{-5}}$、$\overline{P_{-2}P_{-1}}$、$\overline{P_{-3}P_{-1}}$、$\overline{P_{14}P_{-5}}$、$\overline{P_{24}P_{-3}}$、$\overline{P_{34}P_{-2}}$ 和 $\overline{P_{45}P_{-1}}$。作 C_{-12}、C_{-13}、C_{-35}、C_{-25}。



圖(十一)

[證明]

以下採用了定理 4—方向角性質

由共圓關係，我們有 $\angle P_{-3}P_{-1}P_{45}=\angle P_{-3}P_{24}P_{45}=\angle P_{-3}P_{-5}P_{14}$，

$\angle P_{14}P_{-5}P_{-2}=\angle P_{14}P_{34}P_{-2}$ 和 $\angle P_{45}P_{-1}P_{-2}=\angle P_{45}P_{34}P_{-2}$

因此 $\angle P_{-3}P_{-5}P_{-2}=\angle P_{-3}P_{-5}P_{14}+\angle P_{14}P_{-5}P_{-2}$

$=\angle P_{-3}P_{-1}P_{45}+\angle P_{14}P_{34}P_{-2}$

$=\angle P_{-3}P_{-1}P_{45}+\angle P_{45}P_{34}P_{-2}$

$=\angle P_{-3}P_{-1}P_{45}+\angle P_{45}P_{-1}P_{-2}$

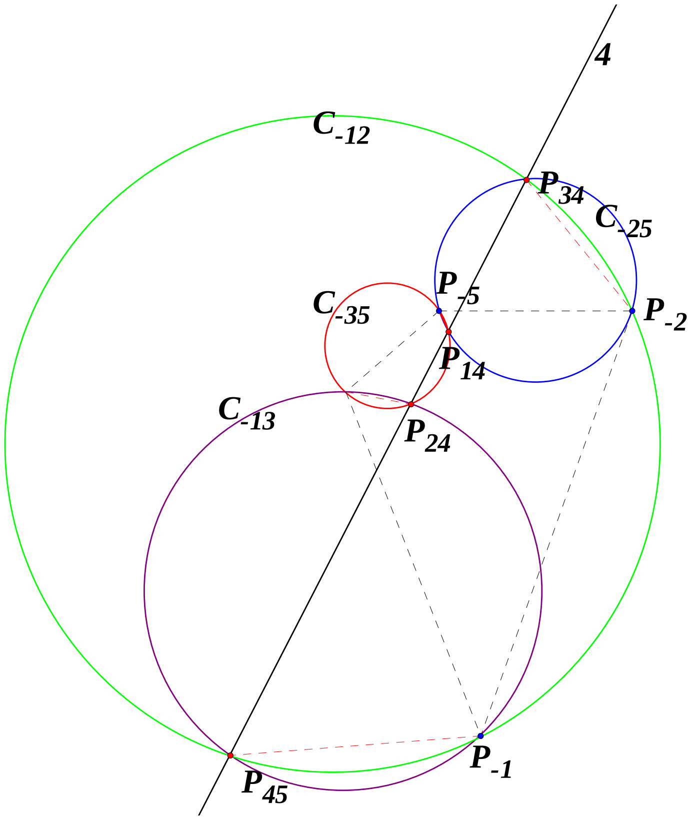
$=\angle P_{-3}P_{-1}P_{45}-\angle P_{-2}P_{-1}P_{45}$

$=\angle P_{-3}P_{-1}P_{-2}$

所以 P_{-3}、P_{-5}、P_{-2}、P_{-1} 共圓，亦即 P_{-5} 在圓 C 上。
同理可證，P_{-4} 也在圓 C 上。

根據定義(2)，圓 C 即為限制圓 C_5。

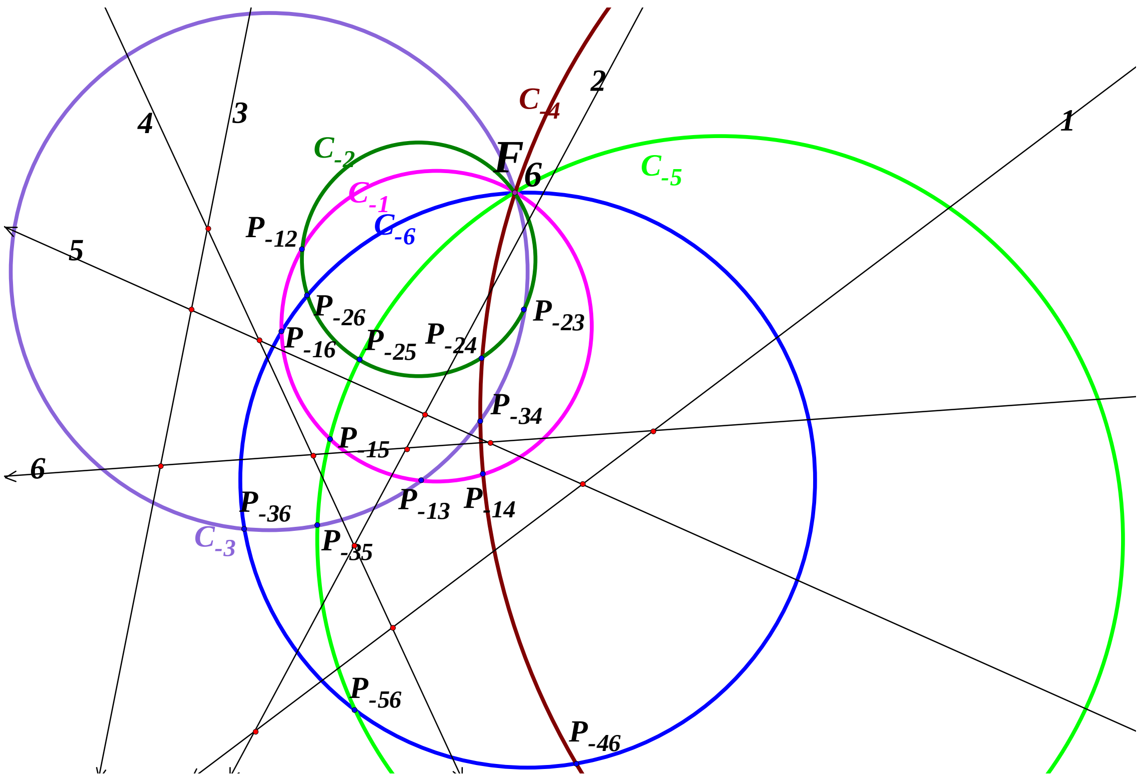
由於證明過程中，將所有直線與點畫出與否對於證明並無太大的影響，所以我們只要畫出跟證明有關的線與圓即可，如圖(十二)。簡圖對於推導一般情形的結果較有用處。



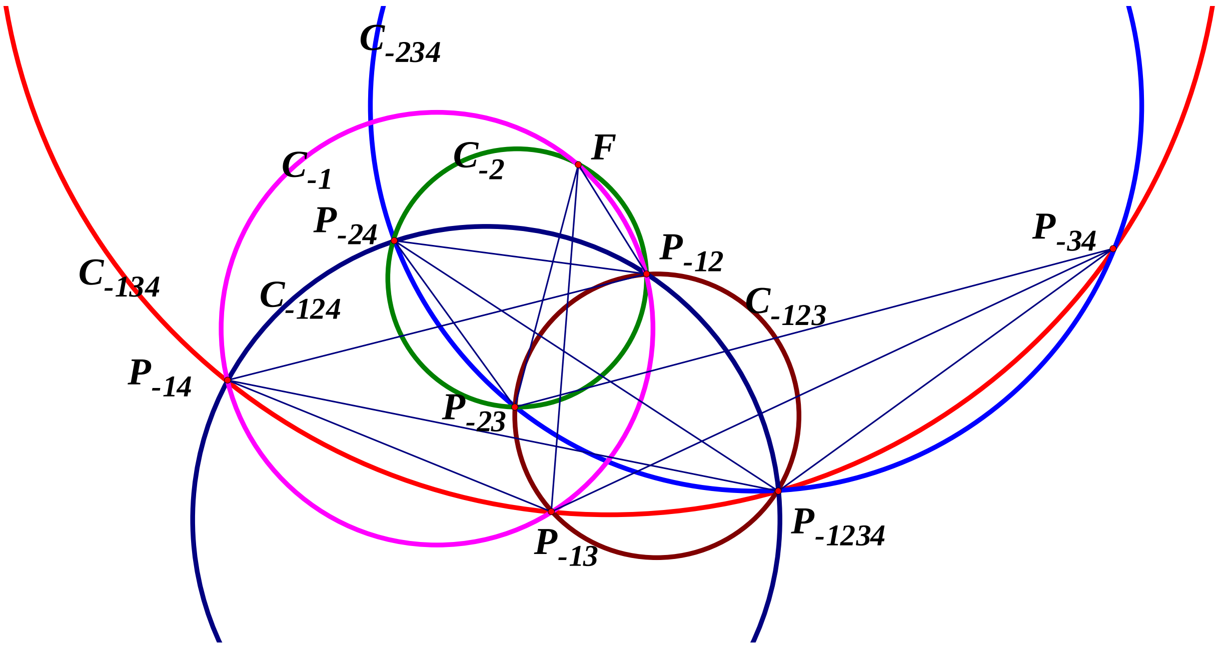
圖(十二)

(五) n=6

如圖(十三)，為求方便，點與圓的命名省略前面的 P 和 C。在圖(十三)上做輔助線來證明過於複雜混亂，所以就用簡圖來作 n=6 之證明。



圖(十三)



圖(十四)

如圖(十四)，先做出 C_{-2}、C_{-1}。由定理 2，P_{-12}、P_{-23} 和 P_{-24} 必在同一圓 C_{-2} 上，同理，P_{-12}、P_{-13} 和 P_{-14} 必在同一圓 C_{-1} 上，做 P_{-1234}，再次用定理 2 知道，P_{-1234} 在 C_{-123}、C_{-124}、C_{-134} 和 C_{-234} 上。所以做 C_{-123}、C_{-124}、C_{-134} 和 C_{-234}，

又由定理 3-1，所以 C_{-123} 上有 P_{-12}、P_{-23}、P_{-13}，其餘同理。令 C_{-2}、C_{-1} 的交點除了 P_{-12} 外，另一交點為 F。

連接 $\overline{FP_{-12}}$、$\overline{FP_{-13}}$、$\overline{FP_{-23}}$、$\overline{P_{-14}P_{-13}}$、$\overline{P_{-14}P_{-1234}}$、$\overline{P_{-14}P_{-12}}$、$\overline{P_{-34}P_{-23}}$、$\overline{P_{-34}P_{-13}}$、$\overline{P_{-34}P_{-1234}}$、$\overline{P_{-24}P_{-23}}$、$\overline{P_{-24}P_{-12}}$ 和 $\overline{P_{-24}P_{-1234}}$。

[證明]

以下採用了定理 4—方向角性質

由共圓關係，我們有 $\angle P_{-23}FP_{-12}=\angle P_{-23}P_{-24}P_{-12}$，$\angle P_{-13}FP_{-12}=\angle P_{-13}P_{-14}P_{-12}$，$\angle P_{-23}P_{-24}P_{-1234}=\angle P_{-23}P_{-34}P_{-1234}$，$\angle P_{-1234}P_{-24}P_{-12}=\angle P_{-1234}P_{-14}P_{-12}$

和 $\angle P_{-13}P_{-14}P_{-1234}=\angle P_{-13}P_{-34}P_{-1234}$

因此 $\angle P_{-23}PP_{-13}=\angle P_{-23}FP_{-12}-\angle P_{-13}FP_{-12}$

$=\angle P_{-23}P_{-24}P_{-12}-\angle P_{-13}P_{-14}P_{-12}$

$=\angle P_{-23}P_{-24}P_{-1234}+\angle P_{-1234}P_{-24}P_{-12}-\angle P_{-13}P_{-14}P_{-1234}-\angle P_{-1234}P_{-14}P_{-12}$

$=\angle P_{-23}P_{-34}P_{-1234}-\angle P_{-13}P_{-34}P_{-1234}$

$=\angle P_{-23}P_{-34}P_{-13}$

所以 P_{-23}、F、P_{-13}、P_{-34} 共圓。

由於 P_{-23}、P_{-34} 和 P_{-13} 在 C_{-3} 上，所以 F 亦在 C_{-3} 上。

同理可證，F 亦在 C_{-4}、C_{-5} 和 C_{-6} 上。

根據定義(2)，F 即為限制點 P_6。

(六) $n=2k$，$k\geqq 3$

$n=2$ 的結果顯然，$n=4$ 的證明已在之前證得。

在關於 $n=6$ 的證明中，我們可以採用簡圖（十四）來證明所有 $n=2k$ 的結果，因為當 $n\geqq 6$ 時，必定能夠在圖形裡找到圖(十四)中所有的點與圓。

[證明]

假設 C_{n-1} 存在，由定理 1，可以知道 $n\geq 2$，所有小於 n 的直線數都存在限制點或限制圓。採用 $n=6$ 的証明，可得到 P_{-23}、F、P_{-13}、P_{-34} 共圓，由於 P_{-23}、P_{-34} 和 P_{-13} 在 C_{-3} 上，所以 F 亦在 C_{-3} 上。同理可證，F 亦在 C_{-4}、C_{-5}…C_{-n} 上。根據定義(2)，F 即為限制點 P_n。

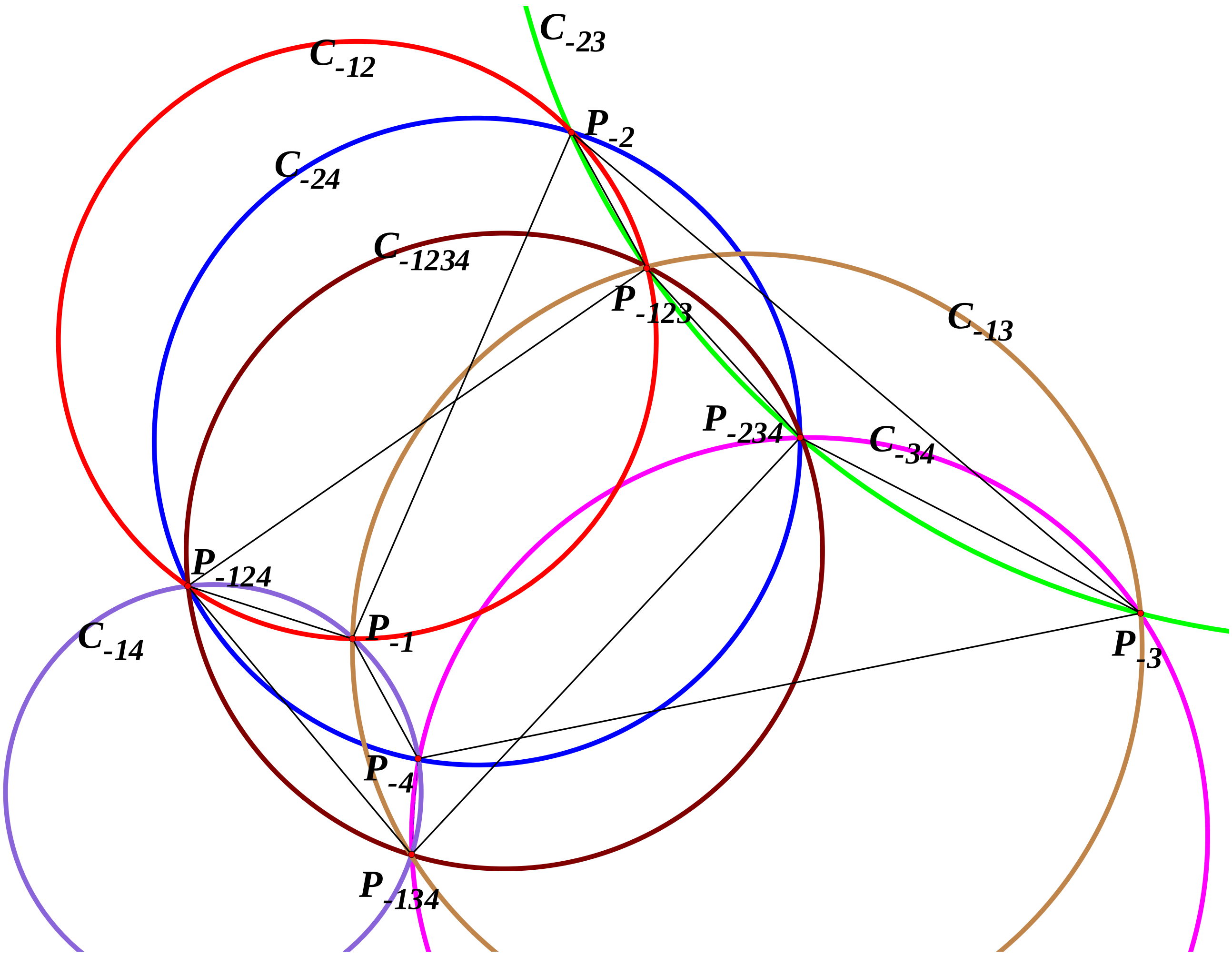
所以當 C_{n-1} 存在時，必存在限制點 P_n。

(七) $n=2k+1$

$n=3$ 的結果顯然，$n=5$ 的證明已在之前證得。而當存在 P_{n-1} 時，藉由定理 1 可以得知 $n\geq 2$，所有小於 n 的直線數都存在限制點或限制圓。

如圖(十五)，作 C_{-12}、C_{-13}、C_{-14}、C_{-23}、C_{-24}、C_{-34}。由定理 3，P_{-1} 是 C_{-12}、C_{-13}、C_{-14} 的共同交點，其餘同理。由定理 2-1，C_{-12}、C_{-13}、C_{-23} 之共同交點為 P_{-123}，其餘同理。再次由定理 3 知道，P_{-123}、P_{-124}、P_{-134}、P_{-234} 會共一圓 C_{-1234}。令 P_{-1}、P_{-2} 與 P_{-3} 的外接圓為 C。

連接 $\overline{P_{-1}P_{-2}}$、$\overline{P_{-1}P_{-4}}$、$\overline{P_{-1}P_{-124}}$、$\overline{P_{-2}P_{-3}}$、$\overline{P_{-2}P_{-123}}$、$\overline{P_{-3}P_{-4}}$、$\overline{P_{-3}P_{-234}}$、$\overline{P_{-4}P_{-124}}$、$\overline{P_{-4}P_{-134}}$、$\overline{P_{-4}P_{-234}}$、$\overline{P_{-234}P_{-134}}$、$\overline{P_{-134}P_{-124}}$、$\overline{P_{-124}P_{-123}}$ 和 $\overline{P_{-123}P_{-234}}$。



圖(十五)

[證明]

有 $\angle P_{-1}P_{-2}P_{-123}=\angle P_{-1}P_{-124}P_{-123}$, $\angle P_{-123}P_{-2}P_{-3}=\angle P_{-123}P_{-234}P_{-3}$,
$\angle P_{-123}P_{-234}P_{-134}=\angle P_{-123}P_{-124}P_{-134}$, $\angle P_{-134}P_{-234}P_{-3}=\angle P_{-134}P_{-4}P_{-3}$,
和 $\angle P_{-1}P_{-124}P_{-134}=\angle P_{-1}P_{-4}P_{-134}$

因此 $\angle P_{-1}P_{-2}P_{-3}=\angle P_{-1}P_{-2}P_{-123}+\angle P_{-123}P_{-2}P_{-3}$
$=\angle P_{-1}P_{-124}P_{-123}+\angle P_{-123}P_{-234}P_{-3}$
$=\angle P_{-1}P_{-124}P_{-123}+\angle P_{-123}P_{-234}P_{-134}+\angle P_{-134}P_{-234}P_{-3}$
$=\angle P_{-1}P_{-124}P_{-123}+\angle P_{-123}P_{-124}P_{-134}+\angle P_{-134}P_{-4}P_{-3}$
$=-\angle P_{-123}P_{-124}P_{-1}+\angle P_{-123}P_{-124}P_{-134}+\angle P_{-134}P_{-4}P_{-3}$
$=\angle P_{-1}P_{-124}P_{-134}+\angle P_{-134}P_{-4}P_{-3}$
$=\angle P_{-1}P_{-4}P_{-134}+\angle P_{-134}P_{-4}P_{-3}$
$=\angle P_{-1}P_{-4}P_{-3}$

所以 P_{-1}、P_{-2}、P_{-3}、P_{-4} 共圓，亦即 P_{-4} 存在 C 上。
同理可證，P_{-5}、P_{-6}、…P_{-n} 存在 C 上。

根據定義(2)，C 即為限制圓 C_n。

(八) $\forall n\in N$

n=2,3,4,5,6 時成立。
$n=2k$，由(六)之結果，當 C_{n-1} 存在時，必存在限制點 P_n。
$n=2k+1$，由(七)之結果，當 P_{n-1} 存在時，必存在限制點 C_n。

藉由數學歸納法，可証明 $\forall n\in N$。

當 n 為偶數，存在有限制點 P_n。
當 n 為奇數，存在有限制圓 C_n。證畢

四、研究結果：

(1) 所有小於 n 的直線數(≥2)都有限制點或限制圓 $\Leftrightarrow$ 存在 C_{n-1} 或 P_{n-1}

(2) 對於任意點 $P_{-b_{t+1}b_{t+2}\ldots b_n}$ ，$S=\{1,2\ldots n\}=\{a_i \mid m \neq s, a_m \neq a_s\}$，令 $t<n$，有

$G=\{a_{i_1},a_{i_2}\ldots a_{i_t}\},\overline{G}=\{a_{i_{t+1}},a_{i_{t+2}}\ldots a_{i_n}\}$,將數列 $<a_{i_k}>$ 定為 $<b_k>$ ，則通過此點的圓有：

$C_{-b_{t+2}b_{t+3}\ldots b_n}, C_{-b_{t+1}b_{t+3}\ldots b_n}\ldots C_{-b_{t+1}b_{t+2}\ldots b_{n-1}}, C_{-b_1b_{t+1}b_{t+2}\ldots b_n}, C_{-b_2b_{t+1}b_{t+2}\ldots b_n}\ldots C_{-b_tb_{t+1}b_{t+2}\ldots b_n}$

(3) 對於任意圓 $C_{-b_{j+1}b_{j+2}\ldots b_n}$ ，$S=\{1,2\ldots n\}=\{a_i \mid m \neq s, a_m \neq a_s\}$，令 $j<n$，有

$G=\{a_{i_1},a_{i_2}\ldots a_{i_j}\},\overline{G}=\{a_{i_{j+1}},a_{i_{j+2}}\ldots a_{i_n}\}$,將數列 $<a_{i_k}>$ 定為 $<b_k>$ ，則在此圓上的點有：

$P_{-b_{j+2}b_{j+3}\ldots b_n}, P_{-b_{j+1}b_{j+3}\ldots b_n}\ldots P_{-b_{j+1}b_{j+2}\ldots b_{n-1}}, P_{-b_1b_{j+1}b_{j+2}\ldots b_n}, P_{-b_2b_{j+1}b_{j+2}\ldots b_n}\ldots P_{-b_jb_{j+1}b_{j+2}\ldots b_n}$

(4) 有 n 條線，任意兩圓 $C_{-b_xb_1b_2\ldots b_m}$ 、$C_{-b_yb_1b_2\ldots b_m}$ 會有交點 $P_{-b_xb_yb_1b_2\ldots b_m}$ 、$P_{-b_1b_2\ldots b_m}$ 。

(5) 有 n 條線，任意兩點 $P_{-b_xb_1b_2\ldots b_m}$ 、$P_{-b_yb_1b_2\ldots b_m}$ 有兩圓 $C_{-b_xb_yb_1b_2\ldots b_m}$ 、$C_{-b_1b_2\ldots b_m}$ 皆通過。

(6) $\forall n \in N$，當 n 為偶數，存在限制點 P_n；當 n 為奇數，存在限制圓 C_n。

五、討論及應用：

(1) 本文未討論平行及共點的部份是未來可發展的方向。

①就以平行而論,可將平行直線組視為交於無窮遠之點,則某直線 L(不與此平行線組平行)交於此平行線組任意兩點，則此兩點與無窮遠之點的外接圓即為 L。($\forall\varepsilon\in R$，半徑>ε，即為圓的退化情況)

②就以共點而論，可將共點直線組的唯一交點視為原本兩兩直線相交的點無窮接近，則此共點線組之外接圓即為此交點。($\forall\varepsilon\in R^+$，半徑<$\varepsilon$)

③困難處：雖然可知道這類的退化情況，也皆能符合上述結論，但有些情況實在是退化過頭(限制點或限制圓無窮遠，難以想像交點或共圓情況)，所以無法判斷，這類情況理應剔除，但卻又須要龐大的討論才能確認以上情況，所以本篇文章不予討論。

(2) 關於退化的情況，亦可用在上述的証明中。例如考慮限制圓 C_5，可發現在簡圖證明中的 L_4，即為在 $2k$+1 的簡圖證明中的 C_{-1234}，即 n=5 的證明只是將 n=2k+1 的 C_{-1234} 退化為 L_4 而已。

(3) 對於每個直線組(n 條直線，無平行線組，無共點線組)而言，只存在唯一的 C_n 或 P_n(雖非一特定限制點或限制圓即對應一個直線組)，所以應該存在某些性質在於這些限制點或限制圓與原直線組的關係，雖然尚未找到確切的關係，但希望這是未來可以努力的方向。

六、參考資料：

1. *Steiner's Theems on the Complete Quadrilateral , Fum Geometricum Volume* 4 (2004) 35-52