第六屆旺宏科學獎

成果報告書

參賽編號：SA6-320

作品名稱：鬼謎藏—抽鬼牌勝率之探討

姓名：連庭輝

關鍵字：_機率_、_遞迴數列_、_數學歸納法_

作品名稱

鬼謎藏

摘要

我們這次的作品是探討一個撲克牌遊戲－抽鬼牌，其規則如下：一副撲克牌五十二張，外加兩張鬼牌，共五十四張，隨機發牌給二人各二十七張，發完牌後手中的牌同樣點數的兩張必須要丟出，之後兩人輪流抽對方的牌，且抽完牌後一旦手中有同點數的牌就必須丟出；玩到最後，一方手中沒有牌的人爲贏家、另一方手中剩下兩張鬼牌的人爲輸家。我們的目標是求出拿到各種不同牌型時，贏的機率是多少，最重要的是：找到這個撲克牌遊戲之贏的機率的函數。在求的過程中，我們一開始先畫牌組的樹狀圖並計算贏的機率，觀察機率的值，試圖找出其規律；後來由樹狀圖發現了牌組和牌組之間的遞迴關係，於是我們開始想辦法解遞迴數列，其難度甚高，讓我們苦惱了好一陣子，很高興能堅持到最後，完成這份作品。

壹、研究動機

玩過抽鬼牌嗎？在偶然的機會之下，我們瀏覽學校的網頁，發現學長姐之前做的科展，科展內容是有關平常時我們常玩的撲克牌遊戲－抽鬼牌。這引發了我們的興趣，原本就對數學遊戲有濃厚興趣的我們，發現到他們所做的只有一張鬼牌而已，可是我們玩的抽鬼牌不是必須要有兩張鬼牌嗎？經過我們兩人討論，也找老師商量後，決定來嚐試做兩張鬼牌的科展。

貳、研究目的

看不同的持牌情形贏的機率會是多少，看哪種情形贏的機率是最大的，哪種情形贏的機率會是最小的，最重要的是：求出遞迴數列的一般解。

參、研究設備及器材

硬體：家用式電腦

軟體：Windows XP 家用版、Microsoft Office Excel

紙筆若干，撲克牌

肆、研究過程或方法

我們假設

1. 甲乙雙方玩抽鬼牌，每次一開始的抽牌均由甲抽乙，而計算甲贏的機率，目標爲算出先抽牌者贏的機率，而後抽牌者乙贏的機率即爲 P(甲輸) $=1-$ P(甲贏)。
2. 畫樹狀圖時鬼牌以 J 表示。

在老師跟我們講解機率的知識之後，對於抽鬼牌這個遊戲，我們先畫出一些牌組的樹狀圖來計算其機率，並觀察他們之間有沒有什麼規律可循。然而，我們歸納出甲持牌的情形有三大類，每一大類均有十三個牌組，爲了方便，我們定義以下的符號分別代表那三大類所代表的情形：

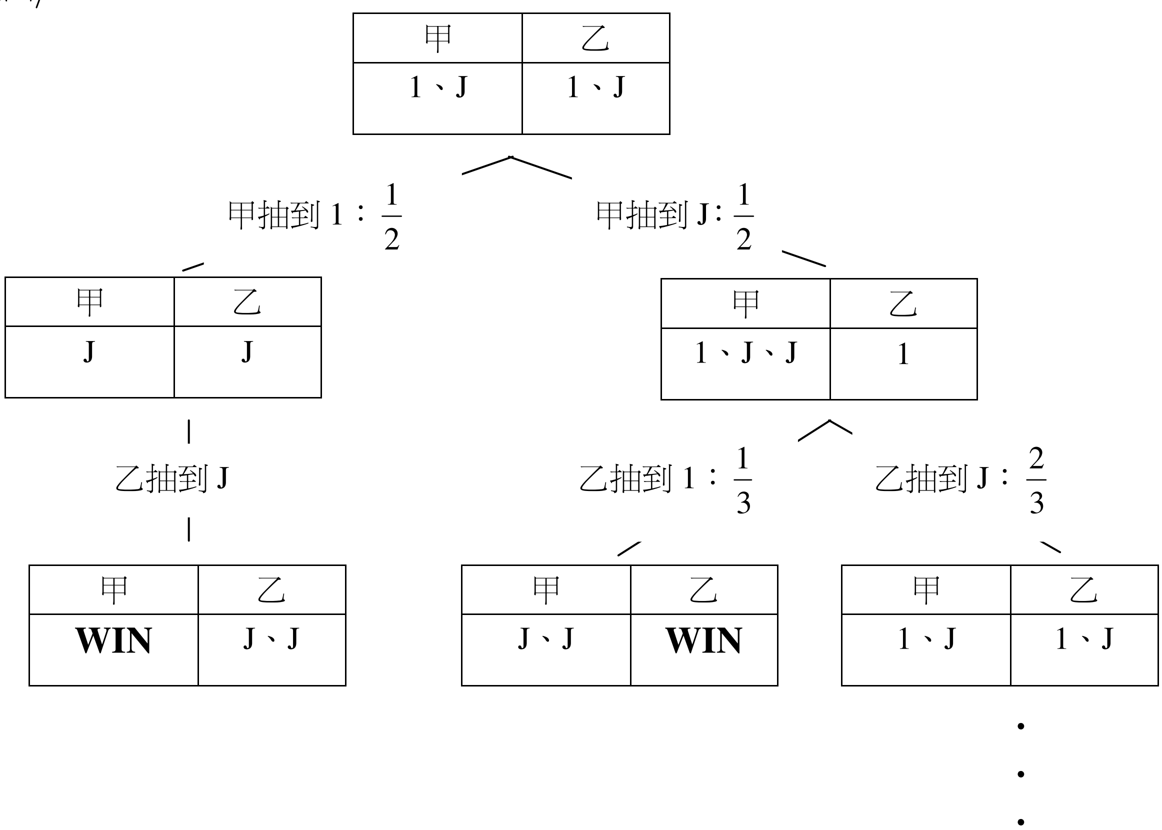
i. P_k：當甲乙雙方各有一張鬼牌，且甲乙雙方的牌數摒除鬼牌後各爲 k 張（即每人有 $k+1$ 張牌，其中包含一張鬼牌）時，甲贏的機率。其中 k 爲 1 到 13 的正整數。

ii. Q_k：當甲沒有鬼牌，乙有兩張鬼牌，且甲乙雙方的牌數摒除鬼牌後各爲 k 張（即甲有 k 張牌其中沒有鬼牌，乙有 $k+2$ 張牌其中有兩張鬼牌）時，甲贏的機率。其中 k 爲 1 到 13 的正整數。

iii. R_k：當甲有兩張鬼牌，乙沒有鬼牌，且甲乙雙方的牌數摒除鬼牌後各爲 k 張（即甲有 $k+2$ 張牌其中有兩張鬼牌，乙有 k 張牌其中沒有鬼牌）時，甲贏的機率。其中 k 爲 1 到 13 的正整數。

以下爲我們做的樹狀圖：

$\langle P_1$的樹狀圖$\rangle$



由上圖得知甲贏的機率 $P_1=\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\cdot 0+\frac{2}{3}P_1\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}P_1$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}P_1=\frac{1}{2},\quad P_1=\frac{3}{4}$$

$\langle Q_1$的樹狀圖$\rangle$

甲	乙
1	1、J、J

甲抽到 1：$\frac{1}{3}$

甲	乙
WIN	J、J

甲抽到 J：$\frac{2}{3}$

甲	乙
1、J	1、J

⋮

由上圖得知甲贏的機率 $Q_1=\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{2}{3}\left(1-P_1\right)$ $\qquad P_1=\frac{3}{4}$代入

$$=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

$\langle R_1$的樹狀圖$\rangle$

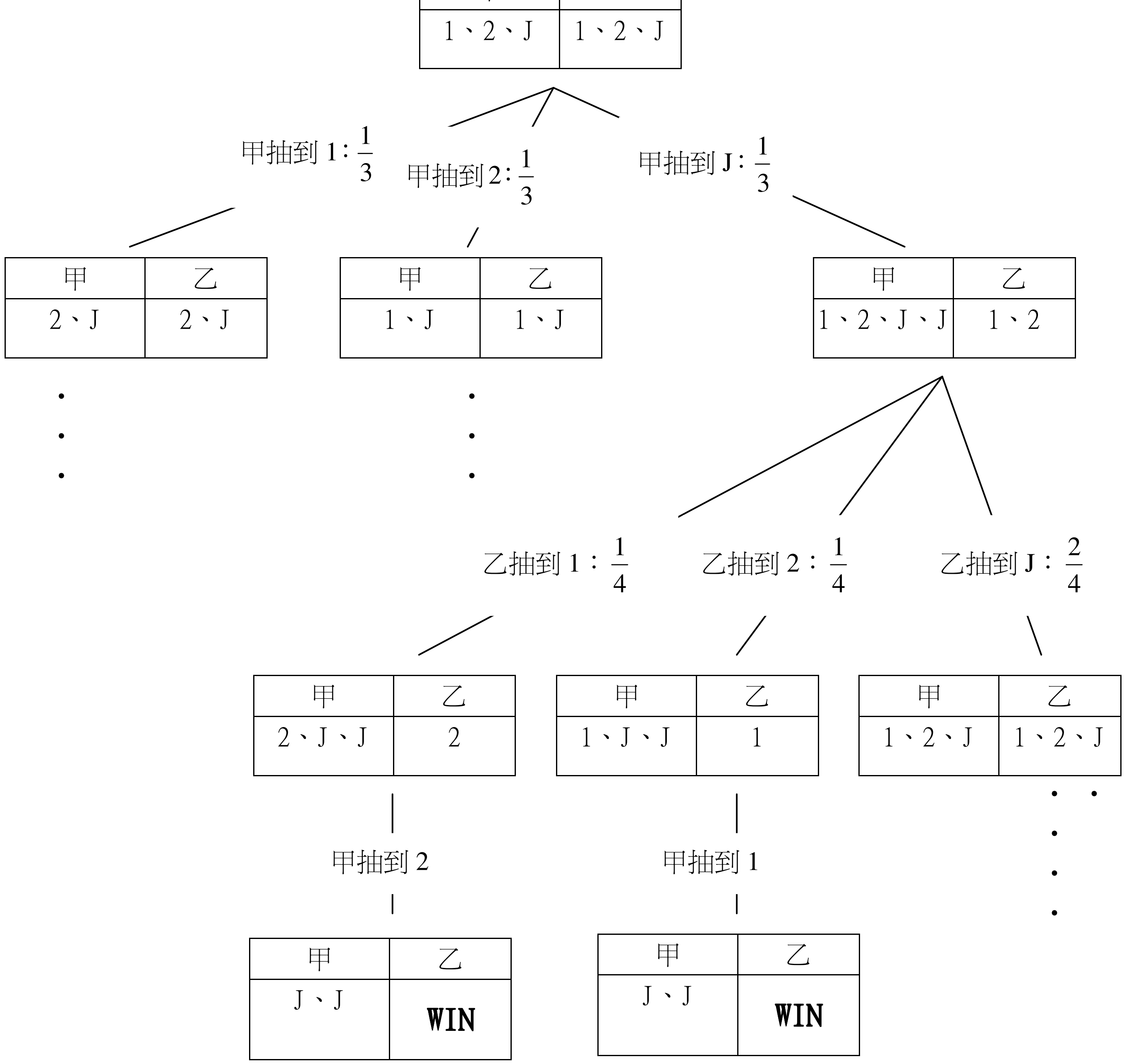
甲	乙
1、J、J	1

甲抽到 1

甲	乙
J、J	**WIN**

由上圖得知甲贏的機率 $R_1=0$

〈P_2的樹狀圖〉



由上圖可知甲贏的機率

$$P_2=\frac{2}{3}\left(1-P_1\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\cdot 0+\frac{1}{4}\cdot 0+\frac{2}{4}\cdot P_2\right)=\frac{2}{3}\left(1-\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}P_2=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}P_2$$

$$\frac{5}{6}P_2=\frac{1}{6},\quad P_2=\frac{1}{5}$$

〈Q_2的樹狀圖〉

甲	乙
1、2	1、2、J、J

甲抽到 1：$\frac{1}{4}$

甲	乙
2	2、J、J

乙抽到 2

甲	乙
WIN	J、J

甲抽到 2：$\frac{1}{4}$

甲	乙
1	1、J、J

乙抽到 1

甲	乙
WIN	J、J

甲抽到 J：$\frac{1}{2}$

甲	乙
1、2、J	1、2、J

⋮

由上圖得知甲贏的機率$Q_2=\frac{1}{4}\cdot 1+\frac{1}{4}\cdot 1+\frac{1}{2}\left(1-P_2\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$

〈R_2的樹狀圖〉

甲	乙
1、2、J、J	1、2

甲抽到 1：$\frac{1}{2}$

甲	乙
2、J、J	2

⋮

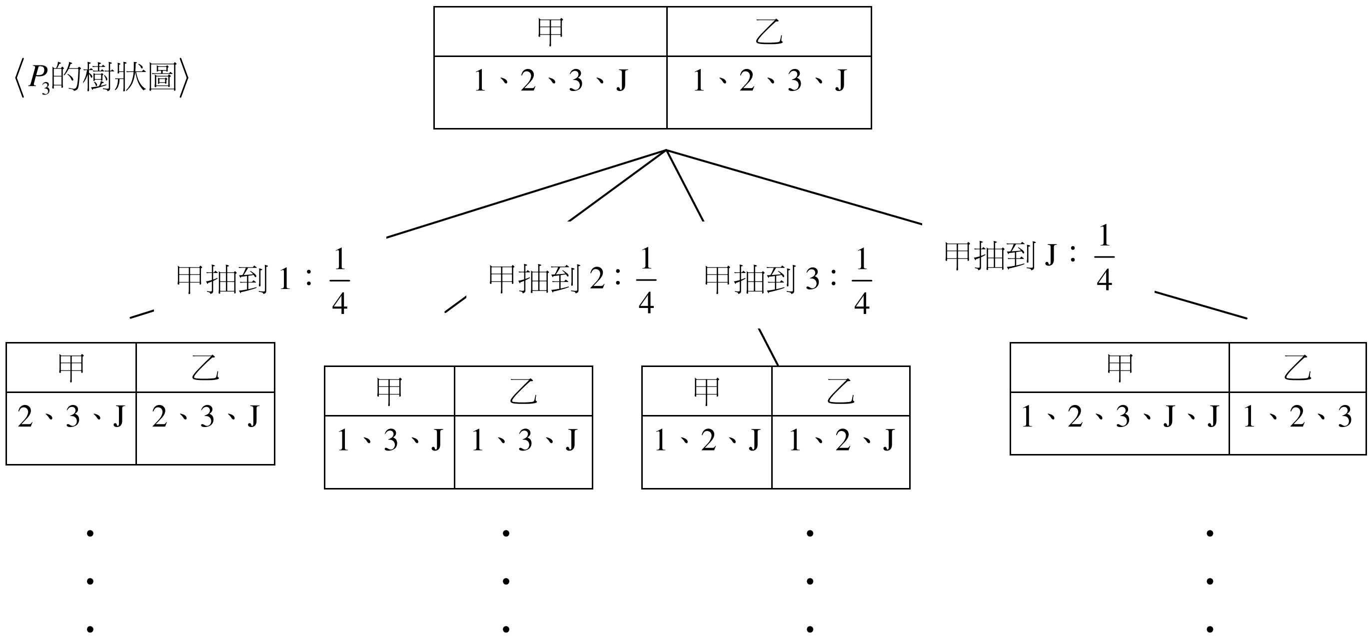
甲抽到 2：$\frac{1}{2}$

甲	乙
1、J、J	1

⋮

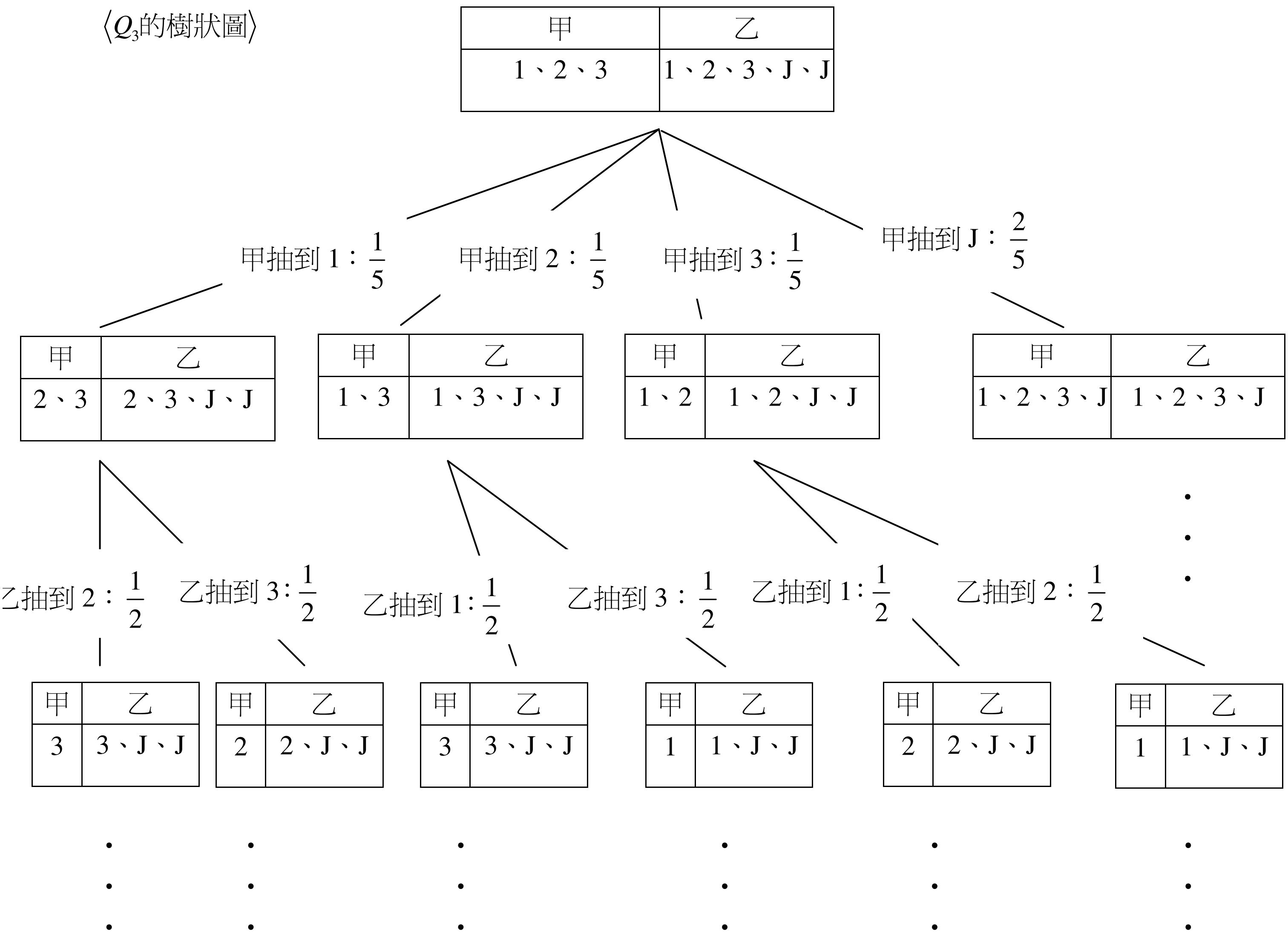
由上圖得知甲贏的機率$R_2=\frac{1}{2}\left(1-Q_1\right)+\frac{1}{2}\left(1-Q_1\right)=1-Q_1=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

〈P_3的樹狀圖〉



由上圖得知甲贏的機率 $P_3=\frac{1}{4}(1-P_2)+\frac{1}{4}(1-P_2)+\frac{1}{4}(1-P_2)+\frac{1}{4}(1-Q_3)=\frac{3}{4}(1-P_2)+\frac{1}{4}(1-Q_3)$

〈Q_3的樹狀圖〉



由上圖得知甲贏的機率

$$Q_3=\frac{1}{5}Q_1+\frac{1}{5}Q_1+\frac{1}{5}Q_1+\frac{2}{5}\left(1-P_3\right)=\frac{3}{5}Q_1+\frac{2}{5}\left(1-P_3\right)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}Q_3=\frac{3}{5}Q_1+\frac{2}{5}\left(1-P_3\right)\\P_3=\frac{3}{4}\left(1-P_2\right)+\frac{1}{4}\left(1-Q_3\right)\end{cases}$$

$Q_1=\frac{3}{4}$， $P_2=\frac{1}{5}$ 代入後解聯立方程式得到

$Q_3=\frac{1}{4}$， $P_3=\frac{3}{4}$

$\langle R_3$的樹狀圖$\rangle$

甲	乙
1、2、3、J、J	1、2、3

甲抽到 1： $\frac{1}{3}$

甲	乙
2、3、J、J	2、3

⋮

甲抽到 2： $\frac{1}{3}$

甲	乙
1、3、J、J	1、3

⋮

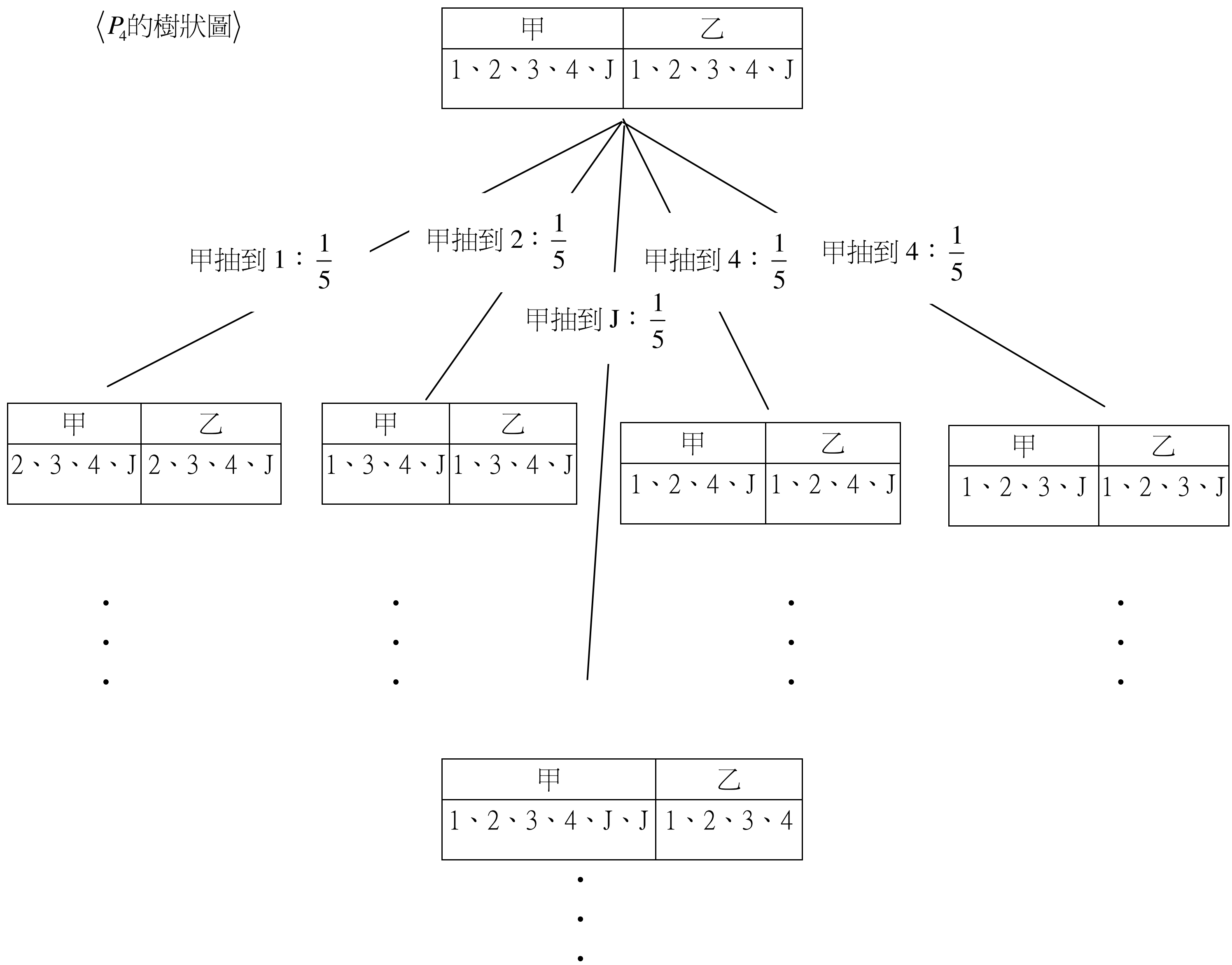
甲抽到 3： $\frac{1}{3}$

甲	乙
1、2、J、J	1、2

⋮

由上圖得知甲贏的機率 $R_3=\frac{1}{3}\left(1-Q_2\right)+\frac{1}{3}\left(1-Q_2\right)+\frac{1}{3}\left(1-Q_2\right)=1-Q_2=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$

〈P_4的樹狀圖〉



由上圖得知甲贏的機率

$$P_4=\frac{1}{5}\left(1-P_3\right)+\frac{1}{5}\left(1-P_3\right)+\frac{1}{5}\left(1-P_3\right)+\frac{1}{5}\left(1-P_3\right)+\frac{1}{5}(1-Q_4)=\frac{4}{5}\left(1-P_3\right)+\frac{1}{5}\left(1-Q_4\right)$$

〈Q_4的樹狀圖〉

甲	乙
1、2、3、4	1、2、3、4、J、J

甲抽到 1 或 2 或 3 或 4：$\frac{4}{6}$

由於這四種情形(抽到 1、抽到 2、抽到 3、抽到 4)皆相似，所以一起討論，不失一般性，以抽到 1 作代表。

甲	乙
2、3、4	2、3、4、J、J

乙抽到 2：$\frac{1}{3}$

甲	乙
3、4	3、4、J、J

⋮

乙抽到 3：$\frac{1}{3}$

甲	乙
2、4	2、4、J、J

⋮

乙抽到 4：$\frac{1}{3}$

甲	乙
2、3	2、3、J、J

⋮

甲抽到 J：$\frac{2}{6}$

甲	乙
1、2、3、4、J	1、2、3、4、J

⋮

由上圖得知甲贏的機率

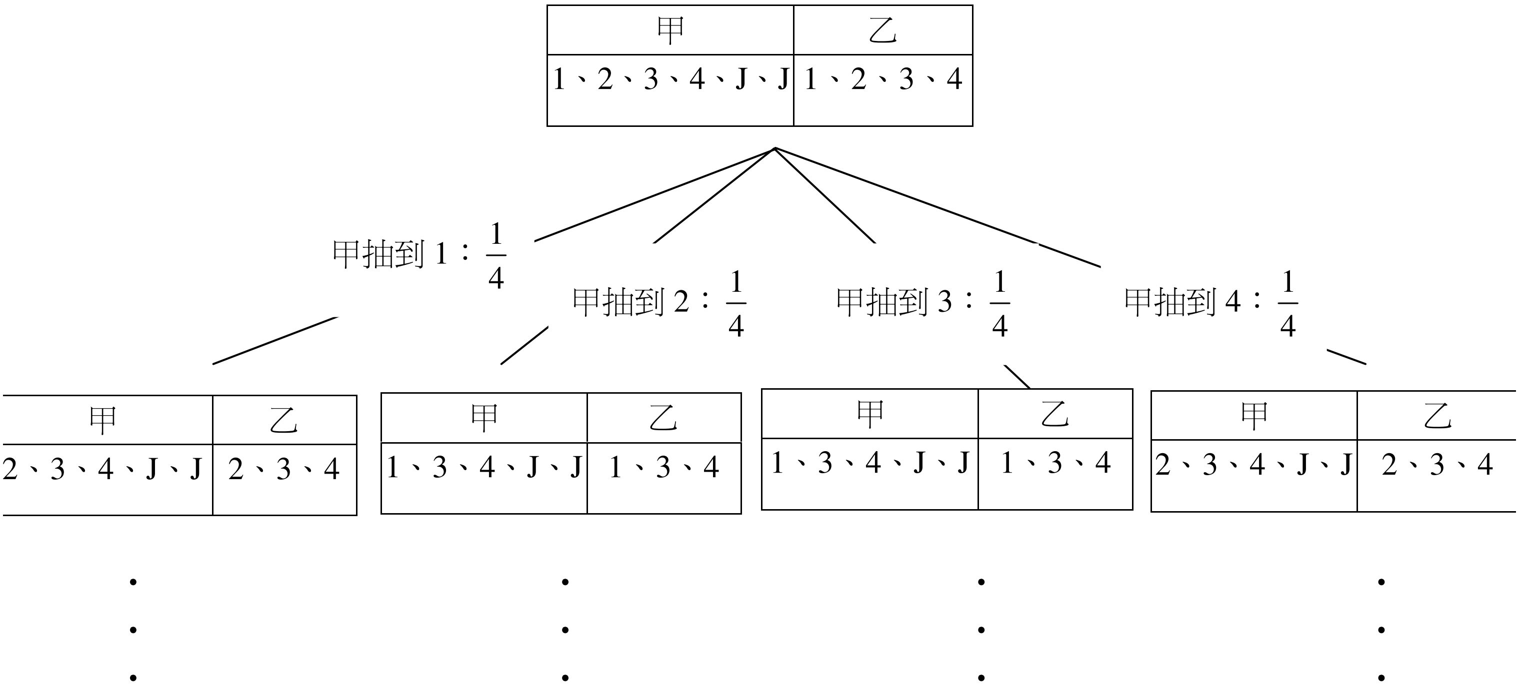
$$Q_4=\frac{4}{6}Q_2+\frac{2}{6}\left(1-P_4\right)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}Q_4=\dfrac{4}{6}Q_2+\dfrac{2}{6}\left(1-P_4\right)\\ P_4=\dfrac{4}{5}\left(1-P_3\right)+\dfrac{1}{5}\left(1-Q_4\right)\end{cases}$$

$Q_2=\frac{3}{4}$, $P_3=\frac{3}{4}$ 代入後解聯立方程式得到

$$Q_4=\frac{53}{70},\ P_4=\frac{8}{35}$$

〈R_4的樹狀圖〉



由上圖得知甲贏的機率 $R_4=\frac{1}{4}(1-Q_3)+\frac{1}{4}(1-Q_3)+\frac{1}{4}(1-Q_3)+\frac{1}{4}(1-Q_3)=1-Q_3=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

在做了這麼多的樹狀圖後，得到

$P_1=\frac{3}{4}$ ，$Q_1=\frac{1}{2}$ ，$R_1=0$

$P_2=\frac{1}{5}=\frac{2}{3}(1-P_1)+\frac{1}{3}(1-Q_2)$ ，$Q_2=\frac{3}{4}$ ，$R_2=\frac{1}{2}=1-Q_1$

$P_3=\frac{3}{4}=\frac{3}{4}(1-P_2)+\frac{1}{4}(1-Q_3)$ ，$Q_3=\frac{1}{4}=\frac{3}{5}Q_1+\frac{2}{5}(1-P_3)$ ，$R_3=\frac{1}{4}=1-Q_2$

$P_4=\frac{8}{35}=\frac{4}{5}(1-P_3)+\frac{1}{5}(1-Q_4)$ ，$Q_4=\frac{53}{70}=\frac{4}{6}Q_2+\frac{2}{6}(1-P_4)$ ，$R_4=\frac{3}{4}=1-Q_3$ $\cdots$

觀察式子與式子之間的關係，觀察樹狀圖，我們發現了以下三式：

第一式：$R_n=1-Q_{n-1}\quad \forall n\ge 2$

第二式：$Q_n=\frac{n}{n+2}Q_{n-2}+\frac{2}{n+2}(1-P_n)\cdots\cdots\cdots\cdots(*)\quad \forall n\ge 3$

第三式：$P_n=\frac{n}{n+1}(1-P_{n-1})+\frac{1}{n+1}(1-Q_n)\cdots\cdots\cdots\cdots(**)\quad \forall n\ge 2$

(有(*)記號的式子代表接下來的內容會用到，所以給予一個代號)

以下為我們對以上三式的證明：

The proof of $R_n=1-Q_{n-1}\quad \forall n\ge 2$

甲	乙
1、2、3、…、n、J、J	1、2、3、…、n

……

共n條

甲抽

抽到 1 的機率：$\frac{1}{n}$

抽到 n 的機率：$\frac{1}{n}$

甲	乙
2、3、…、n、J、J	2、3、…、n

甲	乙
1、2、3、…、$n-1$、J、J	1、2、3、…、$n-1$

⋮　　　⋮

乙抽

由上圖可知$R_n=\frac{1}{n}\left(1-Q_{n-1}\right)+\cdots+\frac{1}{n}\left(1-Q_{n-1}\right)$　　（共 n 個）

$=1-Q_{n-1}\quad\forall n\geq 2$

The proof of $Q_n=\frac{n}{n+2}Q_{n-2}+\frac{2}{n+2}\left(1-P_n\right)\quad\forall n\geq 3$

甲	乙
1、2、3、…、n	1、2、3、…、n、J、J

甲抽到 1、2、3、…、n 的機率：$\frac{n}{n+2}$

抽到 J 的機率：$\frac{2}{n+2}$

由於這 n 種情形(抽到 1、抽到 2、抽到 3、…、抽到 n)皆相似，所以一起討論，不失一般性，以抽到 1 作代表。

甲	乙
2、3、…、n	2、3、…、n、J、J

甲	乙
1、2、3、…、n、J	1、2、3、…、n、J

⋮　　　⋮

由上圖可知

$$Q_n=\frac{n}{n+2}(1-\underbrace{R_{n-1})+\frac{2}{n+2}(1-P_n)=\frac{n}{n+2}(1-(1-Q_{n-2}}_{\text{由第一式得知}}))+\frac{2}{n+2}(1-P_n)=\frac{n}{n+2}Q_{n-2}+\frac{2}{n+2}(1-P_n)\quad \forall n\ge$$

The proof of $P_n=\frac{n}{n+1}(1-P_{n-1})+\frac{1}{n+1}(1-Q_n)$

甲	乙
1、2、3、…、n、J	1、2、3、…、n、J

甲抽到 1、2、3、…、n 的機率：$\frac{n}{n+1}$

由於這 n 種情形(抽到 1、抽到 2、抽到 3、…、抽到 n)皆相似，所以一起討論，不失一般性，以抽到 1 作代表。

甲	乙
2、3、…、n、J	2、3、…、n、J

•
•
•

抽到 J 的機率：$\frac{1}{n+1}$

甲	乙
1、2、3、…、n、J、J	1、2、3、…、n

•
•
•

由上圖可知

$$P_n=\frac{n}{n+1}(1-P_{n-1})+\frac{1}{n+1}(1-Q_n)\qquad \forall n\ge 2$$

驗證了那三式的正確性之後，然而，我們的最終目標是找出 P_n、Q_n、R_n 的一般解，所以我們討論第二式與第三式，將第二式與第三式聯立，目標是將兩式化簡成一遞迴式，再從遞迴式出發，找其一般解。

$$Q_n=\frac{n}{n+2}Q_{n-2}+\frac{2}{n+2}(1-P_n)\cdots\cdots\cdots\cdots(*)\qquad \forall n\ge 3$$

$$P_n=\frac{n}{n+1}(1-P_{n-1})+\frac{1}{n+1}(1-Q_n)\cdots\cdots\cdots\cdots(**)\qquad \forall n\ge 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Q_n = \dfrac{n}{n+2}Q_{n-2} + \dfrac{2}{n+2}\left(1-P_n\right)\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ P_n = \dfrac{n}{n+1}\left(1-P_{n-1}\right) + \dfrac{1}{n+1}\left(1-Q_n\right)\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases} \quad \forall n \geq 3$$

將(1)代入(2)

$$\Rightarrow P_n = \frac{n}{n+1}\left(1-P_{n-1}\right) + \frac{1}{n+1}\left(1-\left(\frac{n}{n+2}Q_{n-2} + \frac{2}{n+2}\left(1-P_n\right)\right)\right)$$

$$= \frac{n}{n+1} - \frac{n}{n+1}P_{n-1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n+2}Q_{n-2} + \frac{2}{n+2}\left(1-P_n\right)\right)$$

$$= 1 - \frac{n}{n+1}P_{n-1} - \frac{n}{(n+1)(n+2)}Q_{n-2} - \frac{2}{(n+1)(n+2)}\left(1-P_n\right)$$

$$= \frac{n^2+3n}{(n+1)(n+2)} - \frac{n}{n+1}P_{n-1} - \frac{n}{(n+1)(n+2)}Q_{n-2} + \frac{2}{(n+1)(n+2)}P_n$$

移項整理得到

$$\frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}P_n = \frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)} - \frac{n}{n+1}P_{n-1} - \frac{n}{(n+1)(n+2)}Q_{n-2}\cdots\cdots\cdots\cdots(***) \qquad \forall n \geq 3$$

而由(**)： $P_n = \dfrac{n}{n+1}\left(1-P_{n-1}\right) + \dfrac{1}{n+1}\left(1-Q_n\right)$ 　　等號兩邊同乘以$(n+1)$

$$\Rightarrow (n+1)P_n = n\left(1-P_{n-1}\right) + \left(1-Q_n\right)$$

移項整理得到$Q_n = -(n+1)P_n - nP_{n-1} + n + 1 \qquad \forall n \geq 2$

$$\Rightarrow Q_{n-2} = -\left((n-2)+1\right)P_{n-2} - (n-2)P_{(n-2)-1} + (n-2) + 1$$

$$= -(n-1)P_{n-2} - (n-2)P_{n-3} + n - 1 \qquad \forall n \geq 4$$

代入(***)

$$\Rightarrow \frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}P_n = \frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)} - \frac{n}{n+1}P_{n-1} - \frac{n}{(n+1)(n+2)}\left(-(n-1)P_{n-2} - (n-2)P_{n-3} + n - 1\right)$$

$$= \frac{n(n+3) - n(n-1)}{(n+1)(n+2)} - \frac{n}{n+1}P_{n-1} + \frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)}P_{n-2} + \frac{n(n-2)}{(n+1)(n+2)}P_{n-3}$$

$$= \frac{4n}{(n+1)(n+2)} - \frac{n}{n+1}P_{n-1} + \frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)}P_{n-2} + \frac{n(n-2)}{(n+1)(n+2)}P_{n-3} \qquad \forall n \geq 4$$

等號兩邊同乘以$\dfrac{(n+1)(n+2)}{n}$

$$\Rightarrow (n+3)P_n = 4-(n+2)P_{n-1}+(n-1)P_{n-2}+(n-2)P_{n-3} \qquad \forall n \geq 4$$

剛開始面對以上的遞迴式我們實在不知如何是好，後來我們決定用 Microsoft Excel 跑以上的遞迴式，觀察數據有沒有規律。

得到：

k	P_k
1	0.750000000000000
2	0.200000000000000
3	0.750000000000000
4	0.228571428571429
5	0.750000000000000
6	0.238095238095238
7	0.750000000000000
8	0.242424242424242
9	0.750000000000000
10	0.244755244755245
11	0.750000000000000
12	0.246153846153846
13	0.750000000000000
14	0.247058823529412
15	0.750000000000000
•	•
•	•
•	•
2283	0.750000000000000
2284	0.249999856481167
2285	0.750000000000000
2286	0.249999856731965
2287	0.750000000000000
2288	0.249999856982105
2289	0.750000000000000
2290	0.249999857231591
2291	0.750000000000000

(以上的值為小數點以下第 15 位四捨五入)

當然，實際上玩抽鬼牌的話k最大是13，我們只是讓程式一直跑下去直到$k=2291$

由上表發現只要k是奇數，P_k都是0.75=$\frac{3}{4}$

所以我們大膽地假設，將奇數項以$\frac{3}{4}$代入

得到$(k+3)P_k-(k-1)P_{k-2}-1=0 \qquad k\geq 4,\ k$爲偶數

設$k=2a$

$\Rightarrow (2a+3)P_{2a}-(2a-1)P_{2a-2}-1=0 \quad , \qquad a\geq 2,\ a\in \mathrm{N}$

$\Rightarrow \left(2a+3\right)P_{2a}=\left(2a-1\right)P_{2a-2}+1$

設上式爲$(2a+3)(P_{2a}-\lambda)=(2a-1)(P_{2a-2}-\lambda) \qquad \lambda\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow (2a+3)P_{2a}=\left(2a-1\right)P_{2a-2}+4\lambda$

$\Rightarrow \qquad \lambda=\frac{1}{4} \qquad$ 代回

$\Rightarrow (2a+3)(P_{2a}-\frac{1}{4})=(2a-1)(P_{2a-2}-\frac{1}{4})$

$a=2$代入 $\qquad 7\,\cancel{(P_4-\frac{1}{4})}=3(P_2-\frac{1}{4})$

$a=3$代入 $\qquad 9\,\cancel{(P_6-\frac{1}{4})}=5\,\cancel{(P_4-\frac{1}{4})}$

.　　　　　　.

.　　　　　　.

.　　　　　　.

$a=n$代入 $\quad \times)\ (2n+3)(P_{2n}-\frac{1}{4})=(2n-1)\,\cancel{(P_{2n-2}-\frac{1}{4})}$

$$\prod_{i=2}^{n}(2i+3)(P_{2i}-\frac{1}{4})=\prod_{i=0}^{n-2}(2i+3)(P_{2i+2}-\frac{1}{4})$$

$$\Rightarrow (2n+1)(2n+3)(P_{2n}-\frac{1}{4})=3\cdot 5(P_2-\frac{1}{4})$$

已知$P_2=\frac{1}{5}$，代入

$$\Rightarrow \left(2n+1\right)\left(2n+3\right)\left(P_{2n}-\frac{1}{4}\right)=3\cdot 5\cdot\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{4}\right)=\frac{-15}{20}=\frac{-3}{4}$$

$$\Rightarrow \qquad P_{2n}-\frac{1}{4} = \frac{-3}{4(2n+1)(2n+3)}$$

$$\Rightarrow \qquad P_{2n} = \frac{1}{4}-\frac{3}{4(2n+1)(2n+3)} = \frac{(2n+1)(2n+3)-3}{4(2n+1)(2n+3)} = \frac{4n^2+8n}{4(2n+1)(2n+3)}$$

$$= \frac{2n(2n+4)}{4(2n+1)(2n+3)}$$

$\Rightarrow P_k = \dfrac{k(k+4)}{4(k+1)(k+3)}$ k為偶數

於是乎我們得到了

$$P_k = \begin{cases} \dfrac{3}{4} & k\text{為奇數} \\ \dfrac{k(k+4)}{4(k+1)(k+3)} & k\text{為偶數} \end{cases}$$

現在我們用數學歸納法來證明我們的推論是對的。

Proof ：

1．當 $k=1$時，$P_1=\dfrac{3}{4}$

當 $k=2$時，$P_2=\dfrac{2\cdot 6}{4\cdot 3\cdot 5}=\dfrac{1}{5}$

當 $k=3$時，$P_3=\dfrac{3}{4}$

與之前用樹狀圖做出來的結果一樣，成立。

2．設 $k=1$、2、3、$\cdots$、m $(\text{其中} m\ge 3)$時，皆成立

即 $P_k = \begin{cases} \dfrac{3}{4} & k\text{為奇數} \\ \dfrac{k(k+4)}{4(k+1)(k+3)} & k\text{為偶數} \end{cases}$ $\forall k=1$、2、3、$\cdots$、m $(m\ge 3)$

當 $k=m+1$時，由之前的推導：

$$(n+3)P_n+(n+2)P_{n-1}=(n-1)P_{n-2}+(n-2)P_{n-3}+4 \qquad \forall n\ge 4$$

$n=m+1$代入

$$\Rightarrow (m+4)P_{m+1}+(m+3)P_m = mP_{m-1}+(m-1)P_{m-2}+4\cdots\cdots(******) \qquad \forall m\ge 3$$

（1） 當 $m+1$為奇數時

由 2.的假設，將

$P_m=\dfrac{m(m+4)}{4(m+1)(m+3)}$ ， $P_{m-1}=\dfrac{3}{4}$ ， $P_{m-2}=\dfrac{(m-2)(m+2)}{4(m-1)(m+1)}$ 代入(******)

$$\Rightarrow (m+4)P_{m+1}+(m+3)\cdot\frac{m(m+4)}{4(m+1)(m+3)}=m\cdot\frac{3}{4}+(m-1)\cdot\frac{(m-2)(m+2)}{4(m-1)(m+1)}+4$$

$$\Rightarrow (m+4)P_{m+1}+\frac{m(m+4)}{4(m+1)}=\frac{3m}{4}+\frac{(m-2)(m+2)}{4(m+1)}+4$$

$$\Rightarrow (m+4)P_{m+1}=-\frac{m(m+4)}{4(m+1)}+\frac{3m}{4}+\frac{(m-2)(m+2)}{4(m+1)}+4$$

$$=\frac{-m(m+4)+3m(m+1)+(m-2)(m+2)+16(m+1)}{4(m+1)}$$

$$=\frac{3m^2+15m+12}{4(m+1)}=\frac{3(m+4)(m+1)}{4(m+1)}=\frac{3(m+4)}{4}$$

$$\Rightarrow \qquad P_{m+1}=\frac{3}{4}$$

（2） 當 $m+1$ 爲偶數時

由 2.的假設，將

$P_m=\dfrac{3}{4}$ ， $P_{m-1}=\dfrac{(m-1)(m+3)}{4m(m+2)}$ ， $P_{m-2}=\dfrac{3}{4}$ 代入(******)

$$\Rightarrow (m+4)P_{m+1}+(m+3)\cdot\frac{3}{4}=m\cdot\frac{(m-1)(m+3)}{4m(m+2)}+(m-1)\cdot\frac{3}{4}+4$$

$$\Rightarrow (m+4)P_{m+1}+\frac{3(m+3)}{4}=\frac{(m-1)(m+3)}{4(m+2)}+\frac{3(m-1)}{4}+4$$

$$\Rightarrow (m+4)P_{m+1}=-\frac{3(m+3)}{4}+\frac{(m-1)(m+3)}{4(m+2)}+\frac{3(m-1)}{4}+4$$

$$=\frac{-3(m+3)(m+2)+(m-1)(m+3)+3(m-1)(m+2)+16(m+2)}{4(m+2)}$$

$$=\frac{m^2+6m+5}{4(m+2)}=\frac{(m+1)(m+5)}{4(m+2)}$$

$$\Rightarrow P_{m+1}=\frac{(m+1)(m+5)}{4(m+2)(m+4)}=\frac{(m+1)((m+1)+4)}{4((m+1)+1)((m+1)+3)}$$

由（1），（2）

$$\Rightarrow P_{m+1}=\begin{cases}\dfrac{3}{4} & 當 m+1 爲奇數時\\ \dfrac{(m+1)((m+1)+4)}{4((m+1)+1)((m+1)+3)} & 當 m+1 爲偶數時\end{cases}$$

由數學歸納法得知，$\forall k\in\mathbb{N}\quad P_k=\begin{cases}\dfrac{3}{4} & k 爲奇數\\ \dfrac{k(k+4)}{4(k+1)(k+3)} & k 爲偶數\end{cases}$

解出 $P_k=\begin{cases}\dfrac{3}{4} & k 爲奇數\\ \dfrac{k(k+4)}{4(k+1)(k+3)} & k 爲偶數\end{cases}$ 後，我們試了許久，試圖將兩項合併，但是沒結果，爲了找出一般解，我們的目光回到遞迴式 $(n+3)P_n=4-(n+2)P_{n-1}+(n-1)P_{n-2}+(n-2)P_{n-3}$，試圖去化簡該式。

$(n+3)P_n=4-(n+2)P_{n-1}+(n-1)P_{n-2}+(n-2)P_{n-3}$ 移項

$\Rightarrow (n+3)P_n+(n+2)P_{n-1}=(n-1)P_{n-2}+(n-2)P_{n-3}+4$

由於 P_n 與 P_{n-1} 的係數差 1， P_{n-2} 與 P_{n-3} 的係數也剛好差 1，於是上式可以寫成

$(n+3)(P_n+P_{n-1})=(n-2)(P_{n-2}+P_{n-3})+(P_{n-1}+P_{n-2})+4$

令 $S_n=P_n+P_{n-1}\qquad n\geq 2$

$\Rightarrow (n+3)S_n=(n-2)S_{n-2}+S_{n-1}+4\qquad \forall n\geq 4$

在試了無數種方法後，我們發現將遞迴式 $(n+3)S_n=(n-2)S_{n-2}+S_{n-1}+4$ ，n 從最小值 4 開始代，代到一個未知數，得到一個新的遞迴式，再從新的遞迴式做重複的事情，沒想到可以代回化簡，以下爲我們的過程：

$(n+3)S_n=(n-2)S_{n-2}+S_{n-1}+4\qquad \forall n\geq 4$

$\Rightarrow 3S_n+nS_n=(n-2)S_{n-2}+S_{n-1}+4$

$n=4$代入 $\quad 3S_4 + \cancel{4S_4} = 2S_2 + S_3 + 4$

$n=5$代入 $\quad 3S_5 + \cancel{5S_5} = 3S_3 + S_4 + 4$

$n=6$代入 $\quad 3S_6 + \cancel{6S_6} = \cancel{4S_4} + S_5 + 4$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

$n=k-2$代入 $\quad 3S_{k-2} + \cancel{(k-2)S_{k-2}} = \cancel{(k-4)S_{k-4}} + S_{k-3} + 4$

$n=k-1$代入 $\quad 3S_{k-1} + (k-1)S_{k-1} = \cancel{(k-3)S_{k-3}} + S_{k-2} + 4$

$n=k$代入＋) $\quad 3S_k + kS_k = \cancel{(k-2)S_{k-2}} + S_{k-1} + 4$

$$3(S_4+S_5+S_6+\cdots+S_k)+(k-1)S_{k-1}+kS_k = 2S_2+3S_3+(S_3+S_4+\cdots+S_{k-1})+4(k-3)$$

$$\Rightarrow 3(\mathrm{S}_4+S_5+\cdots+S_{k-1})+3S_k+(k-1)S_{k-1}+kS_k = 2S_2+4S_3+(S_4+\cdots+S_{k-1})+4(k-3)$$

$$\Rightarrow 2(\mathrm{S}_4+S_5+\cdots+S_{k-1})+3S_k+(k-1)S_{k-1}+kS_k = 2S_2+4S_3+4(k-3)\cdots\cdots\cdots\cdots(****)$$

$\forall k \ge 5$

$2(\mathrm{S}_4+S_5+\cdots+S_{k-1})+3S_k+(k-1)S_{k-1}+kS_k = 2S_2+4S_3+4(k-3) \qquad k \ge 5$

$k=5$代入 $\quad 2S_4 + 3S_5 + 4S_4 + 5S_5 = 2S_2 + 4S_3 + 4\times 2$

$k=6$代入 $\quad 2(S_4+S_5) + 3S_6 + 5S_5 + 6S_6 = 2S_2 + 4S_3 + 4\times 3$

$k=7$代入 $\quad 2(S_4+S_5+S_6) + 3S_7 + 6S_6 + 7S_7 = 2S_2 + 4S_3 + 4\times 4$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

$k=m$代入 ＋) $\quad 2(S_4+S_5+S_6+\cdots+S_{m-1})+3S_m+(m-1)S_{m-1}+mS_m = 2S_2+4S_3+4(m-3)$

$$2\left((m-4)S_4+(m-5)S_5+\cdots+1\cdot S_{m-1}\right)+3(S_5+S_6+\cdots+S_m)+4S_4+2\left(5S_5+6S_6+\cdots+(m-1)S_{m-1}\right)+$$
$$mS_m = 2(m-4)S_2+4(m-4)S_3+4\left(2+3+\cdots+(m-3)\right)$$

$$\Rightarrow 2\left((m-4)S_4+(m-5)S_5+\cdots+1\cdot S_{m-1}\right)+3(S_5+S_6+\cdots+S_m)-4S_4+2\left(4S_4+5S_5+6S_6+\cdots+(m-1)S_{m-1}\right)$$
$$mS_m = 2(m-4)S_2+4(m-4)S_3+4\left(2+3+\cdots+(m-3)\right)$$

$$\Rightarrow 2m\left(S_4+S_5+\cdots+S_{m-1}\right)+3\left(S_5+S_6+\cdots+S_m\right)-4S_4+mS_m=2\left(m-4\right)S_2+4\left(m-4\right)S_3+4\cdot\frac{\left(m-1\right)\left(m-4\right)}{2}$$

$$\Rightarrow \left(2m+3\right)\left(S_4+S_5+\cdots+S_{m-1}\right)-7S_4+\left(m+3\right)S_m=2\left(m-4\right)S_2+4\left(m-4\right)S_3+2\left(m-1\right)\left(m-4\right)$$

$$\Rightarrow S_4+S_5+\cdots+S_{m-1}=\frac{1}{2m+3}\left[2\left(m-4\right)S_2+4\left(m-4\right)S_3+7S_4-\left(m+3\right)S_m+2\left(m-1\right)\left(m-4\right)\right]\quad \forall m\ge 5$$

將未知數m換成k

$$\Rightarrow S_4+S_5+\cdots+S_{k-1}=\frac{1}{2k+3}\left[2\left(k-4\right)S_2+4\left(k-4\right)S_3+7S_4-\left(k+3\right)S_k+2\left(k-1\right)\left(k-4\right)\right]\quad \forall k\ge 5$$

代回$(****)$

$$\Rightarrow \frac{2}{2k+3}\left[2\left(k-4\right)S_2+4\left(k-4\right)S_3+7S_4-\left(k+3\right)S_k+2\left(k-1\right)\left(k-4\right)\right]+3S_k+\left(k-1\right)S_{k-1}+kS_k=2S_2+4S_3+4\left(k-3\right)$$

$$\Rightarrow \frac{2k^2+7k+3}{2k+3}S_k+\left(k-1\right)S_{k-1}=\frac{22}{2k+3}S_2+\frac{44}{2k+3}S_3-\frac{14}{2k+3}S_4-\frac{4\left(k-1\right)\left(k-4\right)}{2k+3}+4\left(k-3\right)$$

等號兩邊同乘以$\left(2k+3\right)$

$$\Rightarrow \left(2k+1\right)\left(k+3\right)S_k+\left(k-1\right)\left(2k+3\right)S_{k-1}=22S_2+44S_3-14S_4-4\left(k-1\right)\left(k-4\right)+4\left(k-3\right)\left(2k+3\right)$$

$$\Rightarrow \left(2k+1\right)\left(k+3\right)S_k+\left(k-1\right)\left(2k+3\right)S_{k-1}=22S_2+44S_3-14S_4+4k^2+8k-52$$

$S_2=P_2+P_1=\frac{1}{5}+\frac{3}{4}=\frac{19}{20},\quad S_3=P_3+P_2=\frac{3}{4}+\frac{1}{5}=\frac{19}{20},\quad S_4=P_4+P_3=\frac{8}{35}+\frac{3}{4}=\frac{137}{140}$代入

$$\begin{aligned}\Rightarrow \left(2k+1\right)\left(k+3\right)S_k+\left(k-1\right)\left(2k+3\right)S_{k-1}&=22\cdot\frac{19}{20}+44\cdot\frac{19}{20}-14\cdot\frac{137}{140}+4k^2+8k-52\\&=4k^2+8k-3\end{aligned}$$

$$\Rightarrow S_k+\frac{\left(k-1\right)\left(2k+3\right)}{\left(2k+1\right)\left(k+3\right)}S_{k-1}=\frac{4k^2+8k-3}{\left(2k+1\right)\left(k+3\right)}\qquad \forall k\ge 3$$

將k改成n

$$\Rightarrow S_n+\frac{\left(n-1\right)\left(2n+3\right)}{\left(2n+1\right)\left(n+3\right)}S_{n-1}=\frac{4n^2+8n-3}{\left(2n+1\right)\left(n+3\right)}\qquad \forall n\ge 3$$

後來我們去找老師，老師後來給我們看一些文章，文章是來自他大學時的筆記[1]與一本書名爲離散與組合數學[2]，內容是如何將上式化簡的方法，我們聽他講解，愈聽愈覺得神奇，

於是我們將其想法用在解 $S_n+\dfrac{(n-1)(2n+3)}{(2n+1)(n+3)}S_{n-1}=\dfrac{4n^2+8n-3}{(2n+1)(n+3)}$ 上：

以下的定理出自筆記[1]

> 定理一、解非齊次非常係數遞迴式 $a_n+r_{n-1}a_{n-1}=f(n)$ 時，等號兩邊必須同乘 w_n，其中
>
> $w_n=\dfrac{\alpha}{\prod\limits_{ii=1}^{n-1}r_i}$ 其中分母要控制不得爲0，且 α 是不爲0的任一實數，
>
> 於是得到 $w_na_n+w_nr_{n-1}a_{n-1}=w_nf(n)$
>
> $$\Rightarrow \frac{\alpha}{\prod\limits_{ii=1}^{n-1}r_i}\cdot a_n+\frac{\alpha}{\prod\limits_{ii=1}^{n-1}r_i}\cdot r_{n-1}a_{n-1}=w_nf(n)=g(n)$$
>
> $$\Rightarrow \frac{\alpha}{\prod\limits_{ii=1}^{n-1}r_i}\cdot a_n+\frac{\alpha}{\prod\limits_{ii=1}^{n-2}r_i}\cdot a_{n-1}=g(n)$$
>
> $$\Rightarrow w_na_n+w_{n-1}a_{n-1}=g(n)$$
>
> 設 $I_n=w_na_n$
>
> $\Rightarrow I_n+I_{n-1}=g(n)$　　解 I_n，再回頭解 a_n

取 $W_n=\dfrac{24}{5\prod\limits_{i=1}^{n-1}r_i}$，其中 $\mathrm{r}_{i-1}=\dfrac{(i-1)(2i+3)}{(2i+1)(i+3)}$

$$\Rightarrow W_n=\frac{24}{5}\left(\frac{\cancel{5}\cdot 5}{1\cdot\cancel{7}}\times\frac{\cancel{6}\cdot\cancel{7}}{2\cdot\cancel{9}}\times\frac{\cancel{7}\cdot\cancel{9}}{3\cdot\cancel{11}}\times\frac{\cancel{8}\cdot\cancel{11}}{4\cdot\cancel{13}}\times\frac{\cancel{9}\cdot\cancel{13}}{\cancel{5}\cdot\cancel{15}}\times\frac{\cancel{10}\cdot\cancel{15}}{\cancel{6}\cdot\cancel{17}}\times\frac{\cancel{11}\cdot\cancel{17}}{\cancel{7}\cdot\cancel{19}}\cdots\times\frac{(n+3)\cancel{(2n+1)}}{\cancel{(n-1)}(2n+3)}\right)$$

$$=\frac{24}{5}\cdot\frac{5n(n+1)(n+2)(n+3)}{24(2n+3)}=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{2n+3}$$

將 $S_n+\dfrac{(n-1)(2n+3)}{(n+3)(2n+1)}S_{n-1}=\dfrac{4n^2+8n-3}{(n+3)(2n+1)}$ 兩邊同乘 W_n

$$\Rightarrow \frac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{2n+3}S_n+\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{2n+1}S_{n-1}=\frac{4n^2+8n-3}{(n+3)(2n+1)}\cdot\frac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{2n+3}$$

$$=\frac{(4n^2+8n-3)(n+2)(n+1)n}{(2n+1)(2n+3)}$$

設$I_n=\dfrac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{2n+3}S_n$

$\Rightarrow I_n+I_{n\text{-}1}=\dfrac{(4n^2+8n-3)(n+2)(n+1)n}{(2n+1)(2n+3)}$

接下來的定理出自書[2]

未定係數法(method of undetermined coefficient)：
解非齊次遞迴式時，先找一組解 $a_n^{(p)}$，此解稱爲特殊解(particular solution)，再找相關齊次關係的一般解 $a_n^{(h)}$，則 $a_n=\alpha a_n^{(h)}+a_n^{(p)}\quad \alpha\in\mathbb{R}$
再代入初始值解α ，a_n 即爲所求。

我們利用以上的定理來求 P_n 的一般解：

將$4n^2+8n-3$寫成$(2n+1)(2n+3)-6$

$$\Rightarrow I_n+I_{n\text{-}1}=\frac{(4n^2+8n-3)(n+2)(n+1)n}{(2n+1)(2n+3)}=n(n+1)(n+2)-\frac{6n(n+1)(n+2)}{(2n+1)(2n+3)}\cdots\cdots(2)$$

而$\dfrac{6n(n+1)(n+2)}{(2n+1)(2n+3)}=\dfrac{6n^3+18n^2+12n}{4n^2+8n+3}=\dfrac{3}{2}n+\dfrac{3}{2}-\dfrac{9}{2}\left(\dfrac{n+1}{(2n+1)(2n+3)}\right)$

設$\dfrac{n+1}{(2n+1)(2n+3)}=\dfrac{a}{2n+1}+\dfrac{b}{2n+3}\qquad a,\ b\in\mathbb{R}$

$$\Rightarrow \frac{n+1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{2(a+b)n+(3a+b)}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$\begin{cases}a+b=\dfrac{1}{2}\\ 3a+b=1\end{cases}\quad\Rightarrow (a,\ b)=\left(\frac{1}{4},\ \frac{1}{4}\right)$$

代回

$$\Rightarrow \frac{6n(n+1)(n+2)}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{3}{2}n+\frac{3}{2}-\frac{9}{2}\left(\frac{1}{4(2n+1)}+\frac{1}{4(2n+3)}\right)$$

$$=\frac{3}{2}n+\frac{3}{2}-\frac{9}{8}\left(\frac{1}{(2n+1)}+\frac{1}{(2n+3)}\right)$$

代回(2)

$$\Rightarrow I_n+I_{n\text{-}1}=n(n+1)(n+2)-\left[\frac{3}{2}n+\frac{3}{2}-\frac{9}{8}\left(\frac{1}{(2n+1)}+\frac{1}{(2n+3)}\right)\right]$$

$$=n^3+3n^2+\frac{1}{2}n-\frac{3}{2}+\frac{9}{8}\left(\frac{1}{(2n+1)}+\frac{1}{(2n+3)}\right)$$

設I_n的特殊解是$an^3+bn^2+cn+d+\dfrac{9}{8(2n+3)}$

$$\Rightarrow I_n + I_{n-1} = \left(an^3 + bn^2 + cn + d + \frac{9}{8(2n+3)} \right) +$$

$$\left(a(n-1)^3 + b(n-1)^2 + c(n-1) + d + \frac{9}{8(2n+1)} \right)$$

$$= 2an^3 + (2b-3a)n^2 + (3a-2b+2c)n + (-a+b-c+d) + \frac{9}{8(2n+3)} + \frac{9}{8(2n+1)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a = 1 \\ 2b - 3a = 3 \\ 3a - 2b + 2c = \frac{1}{2} \\ -a + b - c + d = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$(a,\ b,\ c,\ d) = \left(\frac{1}{2},\ \frac{9}{4},\ \frac{7}{4},\ -\frac{3}{4} \right)$$

I_n的特殊解是$\frac{1}{2}n^3 + \frac{9}{4}n^2 + \frac{7}{4}n - \frac{3}{4} + \frac{9}{8(2n+3)}$

而相關齊次關係：$I_n + I_{n-1} = 0$的一般解爲$\left(-1\right)^n$

$$\Rightarrow I_n = \alpha(-1)^n + \frac{1}{2}n^3 + \frac{9}{4}n^2 + \frac{7}{4}n - \frac{3}{4} + \frac{9}{8(2n+3)}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

已知$I_n = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{2n+3} S_n$

$$I_2 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{7} S_2 = \frac{120}{7} \cdot \frac{19}{20} = \frac{114}{7}$$

代回

$$\Rightarrow \alpha + 4 + 9 + \frac{7}{2} - \frac{3}{4} + \frac{9}{8 \cdot 7} = \frac{114}{7}$$

$$\Rightarrow \qquad \alpha = \frac{3}{8}$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{3}{8}(-1)^n + \frac{1}{2}n^3 + \frac{9}{4}n^2 + \frac{7}{4}n - \frac{3}{2} + \frac{9}{8(2n+3)}$$

$$= \frac{3}{8}(-1)^n + \frac{8n^4 + 48n^3 + 82n^2 + 30n - 9}{8(2n+3)}$$

而$I_n = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{2n+3} S_n$

即$S_n = \frac{2n+3}{(n+3)(n+2)(n+1)n} I_n = \frac{3(2n+3)}{8n(n+1)(n+2)(n+3)}(-1)^n + \frac{8n^4 + 48n^3 + 82n^2 + 30n - 9}{8n(n+1)(n+2)(n+3)}$

$$= \frac{3(2n+3)}{8n(n+1)(n+2)(n+3)}(-1)^n + \frac{1}{8}\left(8 - \frac{6n^2 + 18n + 9}{n(n+1)(n+2)(n+3)} \right)$$

由於$S_n = P_n + P_{n-1}$，

我們設法將$\dfrac{3(2n+3)}{8n(n+1)(n+2)(n+3)}(-1)^n$寫成

$$\frac{3}{8}\left(\frac{an+b}{(n+1)(n+2)\left(n+3\right)}(-1)^n+\frac{a(n-1)+b}{n(n+1)(n+2)}(-1)^{n-1}\right)\quad a,\ b\in\mathbb{R}$$

將$8-\dfrac{6n^2+18n+9}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$寫成

$$\left(4-\frac{cn+d}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right)+\left(4-\frac{c(n-1)+d}{n(n+1)(n+2)}\right)\quad c,\ d\in\mathbb{R}$$

（1）$$\frac{3(2n+3)}{8n(n+1)(n+2)(n+3)}(-1)^n=\frac{3}{8}\left(\frac{an+b}{(n+1)(n+2)(\mathrm{n}+3)}(-1)^n+\frac{a(n-1)+b}{n(n+1)(n+2)}(-1)^{n-1}\right)$$

$$=\frac{3}{8}\left(\frac{an+b}{(n+1)(n+2)(n+3)}(-1)^n+\frac{-a(n-1)-b}{n(n+1)(n+2)}(-1)^n\right)$$

通分

$$=\frac{3}{8}\left(\frac{(an+b)n-(a(n-1)+b)(n+3)}{n(n+1)(n+2)(n+3)}\right)$$

$$=\frac{3\left(-2an+(3a-3b)\right)}{8n(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$\Rightarrow a=-1,\ b=-2$

（2）

$$8-\frac{6n^2+18n+9}{n(n+1)(n+2)(n+3)}=\left(4-\frac{cn+d}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right)+\left(4-\frac{c(n-1)+d}{n(n+1)(n+2)}\right)$$

通分

$$=8-\frac{(cn+d)n+(c(n-1)+d)(n+3)}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$=8-\frac{2cn^2+(2c+2d)n+3(-c+d)}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$\Rightarrow c=3,\ d=6$

由(1)，(2)得知P_n的特殊解爲

$$\frac{3(-n-2)}{8(n+1)(n+2)(n+3)}(-1)^n+\frac{1}{8}\left(4-\frac{3n+6}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right)$$

$$=\frac{3}{8(n+1)(n+3)}(-1)^{n+1}+\frac{1}{2}-\frac{3}{8(n+1)(n+3)}$$

而相關齊次關係：$P_n+P_{n-1}=0$的一般解爲$\left(-1\right)^n$

$$\Rightarrow P_n=\alpha(-1)^n+\frac{3}{8(n+1)(n+3)}(-1)^{n+1}+\frac{1}{2}-\frac{3}{8(n+1)(n+3)}\qquad \alpha\in\mathbb{R}$$

已知$P_1=\dfrac{3}{4}$，代入

$\Rightarrow \dfrac{3}{4}=-\alpha+\dfrac{1}{2}$，$\alpha=-\dfrac{1}{4}$

代回

$$\Rightarrow P_n=-\frac{1}{4}(-1)^n+\frac{1}{2}+\frac{3}{8(n+1)(n+3)}\left((-1)^{n+1}-1\right)$$

得到一個如此漂亮的一般解後，我們用數學歸納法來再一次驗證我們的結果

$$P_n=-\frac{1}{4}(-1)^n+\frac{1}{2}+\frac{3}{8(n+1)(n+3)}\left((-1)^{n+1}-1\right)$$

Proof:

3. 當$n=1$時，$P_1=\dfrac{-1}{4}\cdot(-1)+\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{8\cdot 2\cdot 4}\left((-1)^2-1\right)=\dfrac{3}{4}$

   當$n=2$時，$P_2=\dfrac{-1}{4}\cdot(-1)^2+\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{8\cdot 3\cdot 5}\left((-1)^3-1\right)=\dfrac{1}{5}$

   當$n=3$時，$P_3=\dfrac{-1}{4}\cdot(-1)^3+\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{8\cdot 4\cdot 6}\left((-1)^4-1\right)=\dfrac{3}{4}$

   其值與之前用樹狀圖做出來的結果一樣，成立。

4. 設$n=1$、2、3、4、⋯、k $(k\geq 3)$時皆成立，即

$$P_n=-\frac{1}{4}(-1)^n+\frac{1}{2}+\frac{3}{8(n+1)(n+3)}\left((-1)^{n+1}-1\right)\quad \forall n=1,2,3,\cdots,k\,(k\geq 3)$$

當$n=k+1$時，

　由之前推出的公式：

$$P_n=\frac{n}{n+1}\left(1-P_{n-1}\right)+\frac{1}{n+1}\left(1-Q_n\right)\cdots\cdots\cdots\cdots(**)\qquad \forall n\geq 2$$

$$Q_n=\frac{n}{n+2}Q_{n-2}+\frac{2}{n+2}\left(1-P_n\right)\cdots\cdots\cdots\cdots(*)\qquad \forall n\geq 3$$

將(*)帶入(**)

$$\Rightarrow P_n=\frac{n}{n+1}\left(1-P_{n-1}\right)+\frac{1}{n+1}\left(\frac{2}{n+2}P_n-\frac{n}{n+2}Q_{n-2}+\frac{n}{n+2}\right)\qquad \forall n\geq 3$$

$n=k+1$代入

$$\Rightarrow P_{k+1}=\frac{k+1}{k+2}\left(1-P_k\right)+\frac{1}{k+2}\left(\frac{2}{k+3}P_{k+1}-\frac{k+1}{k+3}Q_{k-1}+\frac{k+1}{k+3}\right)$$

由2.的假設，將$P_k=-\dfrac{1}{4}(-1)^k+\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{8(k+1)(k+3)}\left((-1)^{k+1}-1\right)$代入

$$\Rightarrow P_{k+1}=\frac{k+1}{k+2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}(-1)^k-\frac{3}{8(k+1)(k+3)}\left((-1)^{k+1}-1\right)\right)+\frac{1}{k+2}\left(\frac{2}{k+3}P_{k+1}-\frac{k+1}{k+3}Q_{k-1}+\frac{k+1}{k+3}\right)$$

$$=\left(\frac{k+1}{2(k+2)}+\frac{k+1}{(k+2)(k+3)}+\frac{3}{8(k+2)(k+3)}\right)-\left(\frac{k+1}{4(k+2)}+\frac{3}{8(k+2)(k+3)}\right)(-1)^{k+1}+$$

$$\frac{2}{(k+2)(k+3)}P_{k+1}-\frac{k+1}{(k+2)(k+3)}Q_{k-1}$$

$$=\frac{4(k+1)(k+3)+8(k+1)+3}{8(k+1)(k+3)}-\frac{2(k+1)(k+3)+3}{8(k+2)(k+3)}(-1)^{k+1}+\frac{2}{(k+2)(k+3)}P_{k+1}-$$

$$\frac{k+1}{(k+2)(k+3)}Q_{k-1}$$

$$=\frac{4k^2+24k+23}{8(k+1)(k+3)}-\frac{2k^2+8k+9}{8(k+2)(k+3)}(-1)^{k+1}+\frac{2}{(k+2)(k+3)}P_{k+1}-\frac{k+1}{(k+2)(k+3)}Q_{k-1}$$

將$\frac{2}{(k+2)(k+3)}P_{k+1}$移到左式

$$\Rightarrow\frac{(k+1)(k+4)}{(k+2)(k+3)}P_{k+1}=\frac{4k^2+24k+23}{8(k+1)(k+3)}-\frac{2k^2+8k+9}{8(k+2)(k+3)}(-1)^{k+1}-\frac{k+1}{(k+2)(k+3)}Q_{k-1}\cdots\cdots(*****)$$

而由公式(**)：

$$P_n=\frac{n}{n+1}\left(1-P_{n-1}\right)+\frac{1}{n+1}\left(1-Q_n\right)$$

$$\Rightarrow Q_n=-(n+1)P_n-nP_{n-1}+n+1$$

$n=k-1$代入

$$\Rightarrow Q_{k-1}=-kP_{k-1}-(k-1)P_{k-2}+k$$

根據 2.的假設，將$P_{k-1}=-\frac{1}{4}(-1)^{k-1}+\frac{1}{2}+\frac{3}{8k(k+2)}\left((-1)^k-1\right)$

$$P_{k-2}=-\frac{1}{4}(-1)^{k-2}+\frac{1}{2}+\frac{3}{8(k-1)(k+1)}\left((-1)^{k-1}-1\right)$$

代入上式

$$\Rightarrow Q_{k-1}=\frac{k}{4}(-1)^{k-1}-\frac{k}{2}-\frac{3}{8(k+2)}\left((-1)^k-1\right)+\frac{k-1}{4}(-1)^{k-2}-\frac{k-1}{2}-\frac{3}{8(k+1)}\left((-1)^{k-1}-1\right)+k$$

$$=\frac{1}{4}(-1)^{k-1}-k+\frac{1}{2}+\left(\frac{3}{8(k+2)}-\frac{3}{8(k+1)}\right)(-1)^{k-1}+\frac{3}{8(k+2)}+\frac{3}{8(k+1)}+k$$

$$=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{8(k+1)(k+2)}\right)(-1)^{k-1}+\frac{3(2k+3)}{8(k+1)(k+2)}+k$$

$$=\frac{2(k+1)(k+2)-3}{8(k+1)(k+2)}(-1)^{k-1}+\frac{4(k+1)(k+2)+3(2k+3)+8k(k+1)(k+2)}{8(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{2k^2+6k+1}{8(k+1)(k+2)}(-1)^{k-1}+\frac{8k^3+28k^2+34k+17}{8(k+1)(k+2)}$$ 代回(*****)

$$\Rightarrow \frac{(k+1)(k+4)}{(k+2)(k+3)}P_{k+1}=\frac{4k^2+24k+23}{8(k+1)(k+3)}-\frac{2k^2+8k+9}{8(k+2)(k+3)}(-1)^{k+1}-\frac{k+1}{(k+2)(k+3)}\left(\frac{2k^2+6k+1}{8(k+1)(k+2)}(-1)^{k-1}+\frac{8k^3+28k^2+34k+17}{8(k+1)(k+2)}\right)$$

$$=\frac{4k^2+24k+23}{8(k+1)(k+3)}-\frac{2k^2+8k+9}{8(k+2)(k+3)}(-1)^{k+1}-\frac{2k^2+6k+1}{8(k+2)^2(k+3)}(-1)^{k-1}-\frac{8k^3+28k^2+34k+17}{8(k+2)^2(k+3)}$$

等號兩邊同乘以$(k+2)(k+3)$

$$\Rightarrow (k+1)(k+4)P_{k+1}=\frac{(4k^2+24k+23)(k+2)}{8(k+1)}-\frac{2k^2+8k+9}{8}(-1)^{k+1}-\frac{2k^2+6k+1}{8(k+2)}(-1)^{k-1}-\frac{8k^3+28k^2+34k+17}{8(k+2)}$$

$$=\frac{(4k^2+24k+23)(k+2)^2+(8k^3+28k^2+34k+17)(k+1)}{8(k+1)(k+2)}-\frac{(2k^2+8k+9)(k+2)+2k^2+6k+1}{8(k+2)}(-1)^{k+1}$$

$$=\frac{(k+1)^2(4k^2+24k+29)}{8(k+1)(k+2)}-\frac{(k+1)(2k^2+12k+19)}{8(k+2)}(-1^{k+1})$$

等號兩邊同乘以$\frac{1}{(k+1)(k+4)}$

$$\Rightarrow P_{k+1}=\frac{4k^2+24k+29}{8(k+2)(k+4)}-\frac{2k^2+12k+19}{8(k+2)(k+4)}(-1)^{k+1}$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{8(k+2)(k+4)}\right)+\left(\frac{-1}{4}-\frac{3}{8(k+2)(k+4)}\right)(-1)^{k+1}$$

$$=-\frac{1}{4}(-1)^{k+1}+\frac{1}{2}+\frac{3}{8(k+2)(k+4)}\left((-1)^{k+2}-1\right)$$ 得証

由數學歸納法得知，$P_n=-\frac{1}{4}(-1)^n+\frac{1}{2}+\frac{3}{8(n+1)(n+3)}\left((-1)^{n+1}-1\right) \quad \forall n\in\mathbb{N}$

由公式(**)：

$$P_n=\frac{n}{n+1}\left(1-P_{n-1}\right)+\frac{1}{n+1}\left(1-Q_n\right) \qquad \forall n\ge 2$$

$$\Rightarrow Q_n=-\left(n+1\right)P_n-nP_{n-1}+n+1$$

$$P_n=-\frac{1}{4}(-1)^n+\frac{1}{2}+\frac{3}{8(n+1)(n+3)}\left((-1)^{n+1}-1\right)$$

$P_{n-1}=-\frac{1}{4}(-1)^{n-1}+\frac{1}{2}+\frac{3}{8n(n+2)}\left((-1)^n-1\right)$代入

$$\Rightarrow Q_n=-\left(n+1\right)\left(-\frac{1}{4}(-1)^n+\frac{1}{2}+\frac{3}{8(n+1)(n+3)}\left((-1)^{n+1}-1\right)\right)-n\left(-\frac{1}{4}(-1)^{n-1}+\frac{1}{2}+\frac{3}{8n(n+2)}\left((-1)^n-1\right)\right)+n+1$$

$$=-\left(n+1\right)\left(-\frac{1}{4}(-1)^n+\frac{1}{2}+\frac{3}{8(n+1)(n+3)}\left(-(-1)^n-1\right)\right)-n\left(\frac{1}{4}(-1)^n+\frac{1}{2}+\frac{3}{8n(n+2)}\left((-1)^n-1\right)\right)+n+1$$

$$=\frac{1}{4}\left(-1\right)^n-n-\frac{1}{2}+\frac{3}{8\left(n+3\right)}\left(\left(-1\right)^n+1\right)-\frac{3}{8\left(n+2\right)}\left(\left(-1\right)^n-1\right)+n+1$$

$$=\frac{1}{4}\left(-1\right)^n+\frac{1}{2}+\left(\frac{3}{8\left(n+3\right)}-\frac{3}{8\left(n+2\right)}\right)\left(-1\right)^n+\frac{3}{8\left(n+3\right)}+\frac{3}{8\left(n+2\right)}$$

$$=\frac{1}{4}\left(-1\right)^n+\frac{1}{2}-\frac{3}{8\left(n+2\right)\left(n+3\right)}\left(-1\right)^n+\frac{3\left(2n+5\right)}{8\left(n+2\right)\left(n+3\right)} \qquad \forall n\ge 2$$

$$\Rightarrow\begin{cases}Q_1=\frac{1}{2}\\ Q_n=\frac{1}{4}\left(-1\right)^n+\frac{1}{2}-\frac{3}{8\left(n+2\right)\left(n+3\right)}\left(-1\right)^n+\frac{3\left(2n+5\right)}{8\left(n+2\right)\left(n+3\right)} \quad \forall n\ge 2\end{cases}$$

$$\Rightarrow Q_n=\frac{1}{4}\left(-1\right)^n+\frac{1}{2}-\frac{3}{8\left(n+2\right)\left(n+3\right)}\left(-1\right)^n+\frac{3\left(2n+5\right)}{8\left(n+2\right)\left(n+3\right)} \qquad \forall n\in\mathbb{N}$$

而$R_n=1-Q_{n-1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\left(-1\right)^{n-1}+\frac{3}{8\left(n+1\right)\left(n+2\right)}\left(-1\right)^{n-1}-\frac{3\left(2n+3\right)}{8\left(n+1\right)\left(n+2\right)} \qquad \forall n\ge 2$

$$\Rightarrow\begin{cases}R_1=0\\ R_n=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}(-1)^{n-1}+\dfrac{3}{8(n+1)(n+2)}(-1)^{n-1}-\dfrac{3(2n+3)}{8(n+1)(n+2)} & \forall n\ge 2\end{cases}$$

$$\Rightarrow R_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}(-1)^{n-1}+\frac{3}{8(n+1)(n+2)}(-1)^{n-1}-\frac{3(2n+3)}{8(n+1)(n+2)}\quad \forall n\in\mathbb{N}$$

伍、討論

之前在解聯立式$\begin{cases}Q_n=\dfrac{n}{n+2}Q_{n-2}+\dfrac{2}{n+2}(1-P_n)\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\ P_n=\dfrac{n}{n+1}(1-P_{n-1})+\dfrac{1}{n+1}(1-Q_n)\cdots\cdots\cdots\cdots(2)\end{cases}$時，我們將(1)代入(2)，再經由(2)的化簡得到$(n+3)P_n=4-(n+2)P_{n-1}+(n-1)P_{n-2}+(n-2)P_{n-3}$，再經由一連串的化簡：

$$(n+3)S_n=(n-2)S_{n-2}+S_{n-1}+4$$

$$\cdots\cdots\Rightarrow 2(S_4+S_5+\cdots+S_{k-1})+3S_k+(k-1)S_{k-1}+kS_k=2S_2+4S_3+4(k-3)$$

$\cdots\cdots\Rightarrow S_4+S_5+\cdots+S_{k-1}=\dfrac{1}{2k+3}\left[2(k-4)S_2+4(k-4)S_3+7S_4-(k+3)S_k+2(k-1)(k-4)\right]$代回

$\cdots\cdots\Rightarrow S_n+\dfrac{(n-1)(2n+3)}{(2n+1)(n+3)}S_{n-1}=\dfrac{4n^2+8n-3}{(2n+1)(n+3)}$ 而找到一般解

然而，我們一開始如果將(2)代入(1)，再經由(1)的化簡，得到的是：

$$(n+3)Q_n=(n+1)Q_{n-2}-(n+1)Q_{n-1}+(n-1)Q_{n-3}+2$$

$$\Rightarrow (n+3)Q_n+(n+1)Q_{n-1}=(n+1)Q_{n-2}+(n-1)Q_{n-3}+2$$
$$\Rightarrow (n+3)(Q_n+Q_{n-1})=(n-1)(Q_{n-2}+Q_{n-3})+2(Q_{n-1}+Q_{n-2})+2$$

令$S_n=Q_n+Q_{n-1}$

$$\Rightarrow (n+3)S_n=(n-1)S_{n-2}+2S_{n-1}+2\quad \forall n\ge 4$$

再如同之前的化簡得到$(n+3)S_n+nS_{n-1}=3S_2+6S_3+2(n-3)$……也可算出一般解：

$$Q_n=\frac{1}{4}(-1)^n+\frac{1}{2}-\frac{3}{8(n+2)(n+3)}(-1)^n+\frac{3(2n+5)}{8(n+2)(n+3)}$$

陸、研究結果與結論

$$P_n=-\frac{1}{4}(-1)^n+\frac{1}{2}+\frac{3}{8(n+1)(n+3)}\left((-1)^{n+1}-1\right)$$

$$Q_n=\frac{1}{4}\left(-1\right)^n+\frac{1}{2}-\frac{3}{8\left(n+2\right)\left(n+3\right)}\left(-1\right)^n+\frac{3\left(2n+5\right)}{8\left(n+2\right)\left(n+3\right)}$$

$$R_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\left(-1\right)^{n-1}+\frac{3}{8\left(n+1\right)\left(n+2\right)}\left(-1\right)^{n-1}-\frac{3\left(2n+3\right)}{8\left(n+1\right)\left(n+2\right)}$$

$\forall n\in\mathbb{N}$

討論Q_n的遞迴式亦可得到同樣的結論。

柒、參考資料及其他

[1]離散數學筆記　朱亮儒教授

[2]離散與組合數學　　著者 Ralph P. Grimaldi　譯者 劉明郎

遞迴數列　　　　　　凡異出版社

捌、推廣

(1) .當三個人玩抽鬼牌時，求出贏的機率的函數

(2) .將前面抽鬼牌的規則改成同點數的四張才能拿出(原本是同點數的兩張就要拿出)

(3) .將前面抽鬼牌的規則改成顏色相同且點數相同的兩張才要拿出(原本不限顏色就要拿出)