第七屆旺宏科學獎

成果報告書

參賽編號：SA7-179

作品名稱：空間中的九點圓與尤拉線

姓名：鄭鉅翰

關鍵字：九點圓、垂心、三角形多面體

空間中的九點圓與尤拉線

摘要：

我們證明了：

一、四面體各面上的九點圓共球面的充要條件是此四面體為「對直四面體」。此球面我們稱為對直四面體的「24 點球面」。

二、24 點球面之球心恰為四面體之重心。

三、八面體各面上的九點圓共球面的充要條件為「具有外接球的對直八面體」，此球面我們稱為八面體的「48 點球面」。

四、有「24 點球面」的四面體及有「48 點球面」的八面體，皆存在空間中的尤拉線，但其比例與二維不同。

五、48 點球面之球心亦位於尤拉線上，且有固定比例關係。

我們也試著將結果推廣到其他由三角形所組成的多面體上。

壹、研究動機：

自從上了高二之後，學到許多關於三維空間上的數學概念。有人說立體是平面的推廣，一維的線，可以拉到二維變成面；二維的面，拉到三維變成體。再加上有一次數學老師在課堂上介紹有趣的定理－九點圓定理，於是我們就很好奇，當平面上三角形的九點圓被放到立體空間中四面體的四個面上時，各面上的四個九點圓是否會共球面？而具有這種球面的四面體又會有怎樣的性質？

貳、研究目的：

一、研究由四面體的四個面上的九點圓是否會共球面的條件。

二、三角形之九點圓的相關性質是否能推廣到上述的四面體。

三、三角形之九點圓的相關性質是否能推廣到其他的多面體。

四、尤拉線在空間中的特性。

参、研究器材：

白紙，電腦，GSP，Cabri 3D，筆（原子筆＋鉛筆＋自動筆），圓規，尺，橡皮擦。

肆、研究過程及方法：

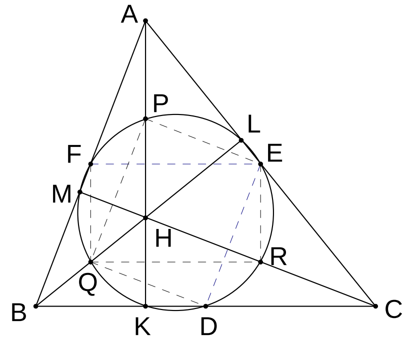
一、九點圓定理及其相關性質

（一）九點圓（又名<u>歐拉（Euler）</u>圓）定理：

對任意三角形 ABC，三角形的三邊的中點 D，E，F，三高的垂足 K，L，M 和頂點到垂心 H 的三條線段中點 P，Q，R，這九點必定共圓。

（二）對任何三角形，九點圓的圓心在歐拉線上，在垂心 H 到外心 O 的線段的中點。

（三）九點圓的半徑是三角形 ABC 外接圓半徑的一半。



圖（一）

證明：

設 H 為 ΔABC 的垂心，D 為 $\overline{BC}$ 的中點，E 為 $\overline{AC}$ 的中點，P 為連結頂點 A 與垂心 H 之線段 $\overline{AH}$ 的中點，Q 為連結頂點 B 與垂心 H 之線段 $\overline{BH}$ 的中點，則

$\overline{DE} // \overline{AB}$ ，$\overline{PQ} // \overline{AB}$ ，$\overline{DE} = \overline{PQ} = \frac{1}{2}\overline{AB}$ ，

所以，$DEPQ$ 為一矩形，D，E，P，Q 四點共圓。如圖（一）。

同理，E，F，Q，R 四點共圓。

又 $\angle PKD = \angle QLE = \angle RMF = 90^{\circ}$ ，K，L，M 三點也在圓上。

則 D，E，F，K，L，M，P，Q，R，這九點共圓。

設 O 為 ΔABC 的外心，G 為重心，由尤拉線的性質知道，H，G，O 三點共線，且

$\overline{HG} = 2\overline{GO}$ ，又 $\overline{AH} // \overline{OD}$ ，

則 $\Delta AHG \sim \Delta DOG$ ，$\overline{AH} = 2\overline{OD}$ 。如圖（二）。

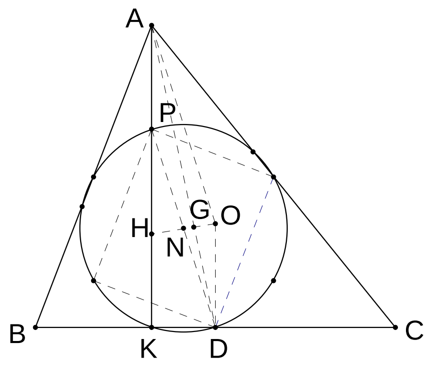
設九點圓圓心 N，$\overline{PH} = \overline{OD}$ ，

$\angle HPN = \angle ODN$ ，則 $\Delta PHN \cong \Delta DON$ ，

N 為 $\overline{OH}$ 的中點。

且 $\overline{PN} = \frac{1}{2}\overline{OA}$ ，

即九點圓的半徑是 ΔABC 外接圓半徑的一半。



圖（二）

二、關於四面體的一些定理

（一）重心定理

1.所謂四面體的中線是一頂點與其對面之重心的連線。

2.四面體的四條中線交於一點（稱為重心）。

3.頂點到重心之長為中線的 $\frac{3}{4}$ 。

（二）外心定理

1.四面體六邊之垂直平分面共點，稱為外心。

2.外心到各頂點的距離相等。

3.外心到各面之垂足為各面的外心。

（三）垂心定理

1.若一四面體的三組對邊兩兩互相垂直，則此四面體稱為「對直四面體」。
例如，通過坐標空間第一卦限的平面，與三個坐標平面形成一四面體。此四面體的三組對邊兩兩互相垂直。

2.四面體四條垂線共點的充要條件為三組對邊兩兩互相垂直（即對直四面體）

3.有垂心時，垂線之垂足就是對面之垂心。（亦即過一頂點之三垂面交於垂線）

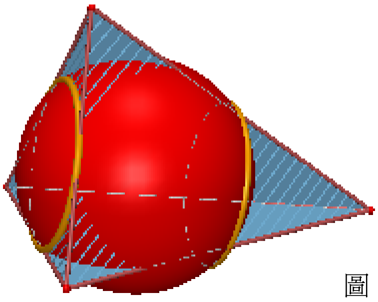
（四）對直四面體的尤拉線

對直四面體的垂心，重心，外心在一直線上。

三、24 點球面

現在，想要將九點圓的性質推廣至三維空間，由三角形變為四面體。如圖（三）。由於四面體的四個面上各有一個九點圓，則當四個九點圓上的點都相異時，總共有 36 個點。但是，假如這四個圓共球面時，因為一直線最多與球面交於二點，所以在稜上九點圓的點（垂足或中點）會重合，由四點重合為最多二點。因此，若這四個九點圓共球面，則此球面最多包含四面體上的 24 個特殊點，即包含 12 個各面垂心至各面頂點之中點，6 個稜邊上的垂足和 6 個稜邊上的中點。

定義一：若四面體各面上的九點圓共球面，我們稱此球面為此四面體的 24 點球面。

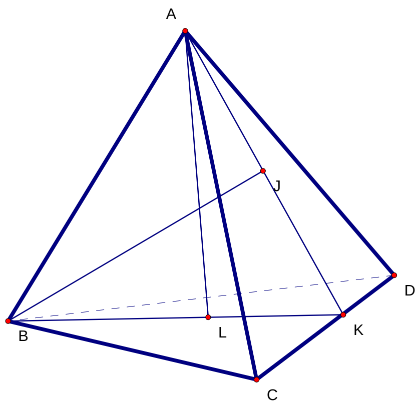


圖（三）

四、24 點球面存在的充要條件

引理一：設四面體 $ABCD$ 為一對直四面體，如圖（四）所示，並令其中二個面 $\triangle BCD$ 和 $\triangle ADC$ 之垂心分別為 J，L，四面體 $ABCD$ 之垂心為 H。則

$\overleftrightarrow{AJ}$ 和 $\overleftrightarrow{BL}$ 交 $\overleftrightarrow{CD}$ 於同一點 K。



圖（四）

證明：

因為對直四面體之垂心 H 為各平面之垂心分別與其對頂點連線的交點，

所以，$\overline{AL}$ 和 $\overline{BJ}$ 交於四面體的垂心 H，

則 $\overline{AL}$ 和 $\overline{BJ}$ 共平面，$\overline{AJ}$ 和 $\overline{BL}$ 共平面，即 A，B，L，J 四點共平面。

因此，$\overleftrightarrow{AJ}$ 和 $\overleftrightarrow{BL}$ 交 $\overline{CD}$ 於一點 K，且 $\overline{BK} \perp \overline{CD}$，$\overline{AK} \perp \overline{CD}$。

引理二：（引理一的逆定理）

設四面體 $ABCD$ 中的二個面 $\triangle BCD$ 和 $\triangle ADC$ 之垂心分別為 J，L，四面體 $ABCD$ 之垂心為 H。若 $\overleftrightarrow{AJ}$ 和 $\overleftrightarrow{BL}$ 交 $\overline{CD}$ 於同一點 K，則此四面體為一對直四面體。

證明：

因爲$\overline{AJ}$交$\overline{BL}$於一點K，所以，A，B，L，J四點共平面。

又$\overline{AK}\perp\overline{CD}$，$\overline{BK}\perp\overline{CD}$，所以平面$ABLJ\perp\overline{CD}$，則$\overline{AB}\perp\overline{CD}$。

同理可得$\overline{AD}\perp\overline{BC}$，$\overline{AC}\perp\overline{BD}$，

即四面體$ABCD$爲一對直四面體。

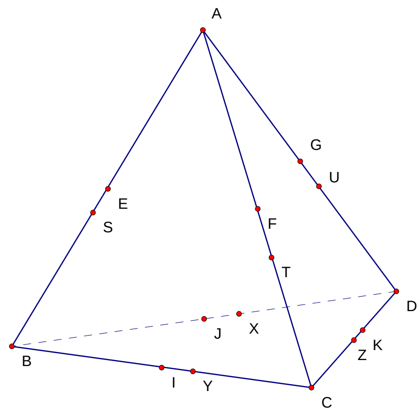
引理三：任一對直四面體皆有24點球面。

證明：

設四面體$ABCD$爲一對直四面體，如圖（五）所示。令四面體各稜邊中點分別爲E，F，G，I，J，K。

由引理一，得知在$\overline{AC}$上$\triangle ABC$的垂足和$\triangle ACD$的垂足共點，稱此爲$\overline{AC}$上的垂足。

同理，可推至其他各稜邊上，令各稜邊垂足分別爲S，T，U，X，Y，Z。



圖（五）

又由九點圓定理，得知過$\triangle ACD$三邊中點F，G，K的圓也過三邊的垂足T，U，Z，

所以，F，T，Z，K，U，G，六點共圓，設此圓爲α。

同理，S，E，F，T，Y，I共圓β；J，X，K，Z，Y，I共圓γ；S，E，G，U，X，J共圓τ。

因爲圓α交圓β於F，T兩點，一定可找到一球面K，使得K同時包含圓α和圓β。同理，必定可找到二球面L和M，使得L和M分別包含圓γ和圓β，圓γ和圓α。

因爲圓α和圓β共球面K，則球面K至少包含F，T，Z，Y四點，且這四點不共平面。

圓β和圓γ共球面L，則球面L也至少包含F，T，Z，Y四點，則球面K＝球面L，即圓α，圓β和圓γ共球面。

同理，球面K＝球面M，即圓α，圓γ和圓τ共球面。

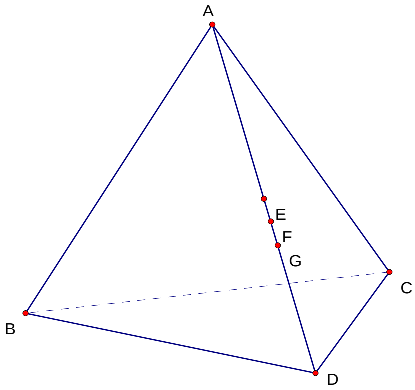
所以，$K=L=M$。

也就是，F，T，Z，K，U，G，S，E，Y，I，J，X，12點共球面，而此球面即爲此四面體之24點球面。

引理四：具有 24 點球面之四面體皆為對直四面體。

證明：

設一四面體 $ABCD$ 具有 24 點球面 K，如圖（六）所示。其中 E 點為稜邊 $\overline{AD}$ 之中點，點 F，G 分別為△ABD 和△ADC 在 $\overline{AD}$ 上之垂足。



圖（六）

該四面體 $ABCD$ 具有 24 點球面 K，

球面 K 過各稜邊之中點和各稜邊之垂足。

所以，球面 K 過 E，F，G 三點。

又一球面最多交一直線於兩點，則 E，F，G 三點中必有兩點重合。

設點 E，F 重合，因為點 E 為 $\overline{AD}$ 中點，F 為△ABD 在 $\overline{AD}$ 上之垂足，

則△ABD 上之九點圓 α 切 $\overline{AD}$ 於點 E。

△ADC 上之九點圓 β 交 $\overline{AD}$ 於 E，G，且 E，G 不是圓 β 之圓心。

又圓 α 和圓 β 皆包含於球面 K，

則球面 K 切直線 $\overline{AD}$ 於一點 E（由圓 α 來看），也交 $\overline{AD}$ 於兩點 E，G（由圓 β 來看），矛盾。故點 E，F 重合不成立。

同理，點 E，G 重合亦不成立。

由上述討論，我們得到點 F，G 重合，也就是△ABD 和△ADC 在 $\overline{AD}$ 上之垂足重合。

同理，其他各稜邊上的垂足都重合。

由引理二，可推得此四面體為對直四面體。

綜合前面的討論，我們得到下面的結果：

定理一：「四面體具有 24 點球面」之充要條件是此「四面體為對直四面體」。

五、24 點球面之球心與對直四面體重心、外心、垂心的關係

有了 24 點球面的結果之後，我們想進一步討論 24 點球面的球心所在的位置，是否如同九點圓一樣，與三角形的垂心和外心共線？或是也具有類似的性質？

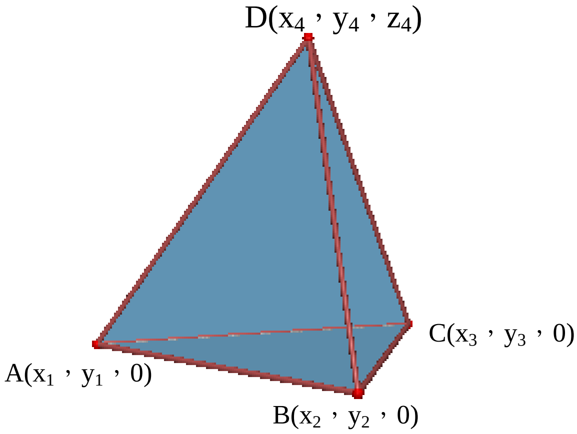
利用 Cabri 3D 進行觀察，我們發現下面的結果：

定理二：一個對直四面體的 24 點球面球心為此對直四面體之重心。

證明：

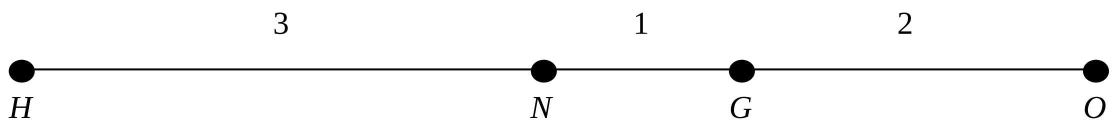
對於空間中任意四面體，不失其一般性，可將其中的三點 A，B，C 移至空間坐標系中的 xy 平面上。四個頂點之點坐標可設為 $A(x_1，y_1，0)$，$B(x_2，y_2，0)$，$C(x_3，y_3，0)$，$D(x_4，y_4，z_4)$，如圖（七）所示。

又因具有 24 點球面之四面體爲對直四面體，因此 D 點投影至 xy 平面之點即爲 ΔABC 之垂心 H，因此，H 之坐標爲(x_4，y_4，0)。



圖（七）

此外，根據尤拉線及三角形九點圓圓心之性質，可得 ΔABC 之垂心 H、重心 G、外心 O 和九點圓圓心 N，皆位於尤拉線上，且線段長的比例如下：



可利用分點公式，求得九點圓圓心 N 點坐標爲

$$\left(\frac{3\times(\frac{x_1+x_2+x_3}{3})+x_4}{4}，\frac{3\times(\frac{y_1+y_2+y_3}{3})+y_4}{4}，0\right)$$

$$=\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}，\frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}，0\right)，$$

又設四面體 $ABCD$ 之重心爲 G_c，G_c 之坐標爲四頂點坐標之算術平均，即

$$G_c\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}，\frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}，\frac{z_4}{4}\right)$$

由此得知 G_c 位於 N 之垂直上方，因此，G_c 至 ΔABC 的九點圓上各點之距離相等。

接著再看 $\overline{DA}$，$\overline{DB}$ 和 $\overline{DC}$ 三稜邊之中點坐標分別爲

$$\left(\frac{x_1+x_4}{2}，\frac{y_1+y_4}{2}，\frac{z_4}{2}\right)，\left(\frac{x_2+x_4}{2}，\frac{y_2+y_4}{2}，\frac{z_4}{2}\right)，\left(\frac{x_3+x_4}{2}，\frac{y_3+y_4}{2}，\frac{z_4}{2}\right)，$$

而 ΔABC 垂心 $H(x_4，y_4，0)$到 ΔABC 頂點的中點坐標分別爲

$$\left(\frac{x_1+x_4}{2}，\frac{y_1+y_4}{2}，0\right)，\left(\frac{x_2+x_4}{2}，\frac{y_2+y_4}{2}，0\right)，\left(\frac{x_3+x_4}{2}，\frac{y_3+y_4}{2}，0\right)，$$

因此依距離公式即可知此六點與 G_c 之距離皆相等，又此六點都包含於 24 點球面中，且空間中不共平面相異四點決定一球面，故可得證：

對直四面體之重心 G_c 爲此 24 點球面的球心。

定理三：24 點球面之球心 G_c(即四面體重心)在該對直四面體之外心 O_c 與垂心 H_c 之連線上，並且 G_c 位於 $\overline{O_cH_c}$ 之中點。

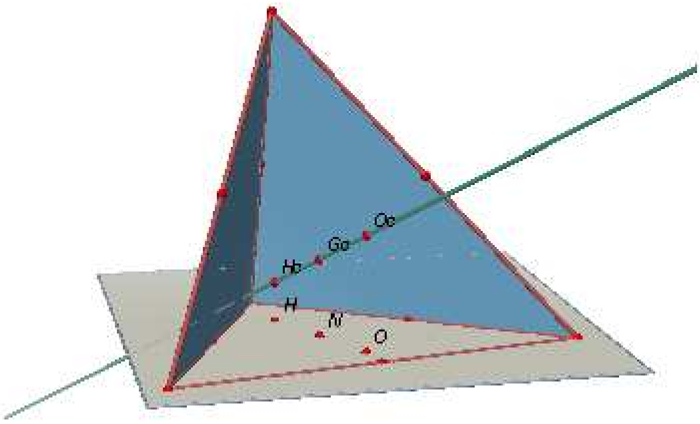
證明：

已知空間中也具有尤拉線，亦即對直四面體的垂心，重心，外心位於同一直線上。又四面體的外心 O_c 在 ΔABC 上的投影爲 ΔABC 之外心 O，而對直四面體垂心 H_c 在 ΔABC 上的投影爲 ΔABC 之垂心 H。

根據定理二，對直四面體重心 G_c 在 ΔABC 上的投影爲 ΔABC 之九點圓圓心 N，故依相似可得：

$$\overline{HN} : \overline{NO} = \overline{H_cG_c} : \overline{G_cO_c} = 1:1，$$

因此得知，**對直四面體中，重心恰爲垂心與外心的中點**。如圖（八）。



圖（八）

六、對直四面體之 24 點球面，外接球面兩者的半徑關係之探討

平面上的九點圓，其半徑正好爲外接圓半徑的一半，因此我們也問：在空間中，24 點球面的半徑與四面體之外接球半徑是否也有一定比例？

我們以兩個特例：「正四面體」與「垂直四面體」的情形做計算。

（所謂「垂直四面體」爲具有同一頂點的三邊兩兩垂直之四面體。）

（一）正四面體：

設邊長爲 a，則外接圓半徑 R 爲 $\frac{\sqrt{6}}{4}a$，而 24 點球半徑 r 以畢氏定理可算出

$$r=\sqrt{(\frac{\sqrt{6}}{12}a)^2+(\frac{\sqrt{3}}{6}a)^2}=\sqrt{\frac{18}{144}a^2}=\frac{\sqrt{2}}{4}a$$ ，因此 $R : r = \sqrt{3} : 1$。

（二）垂直四面體：

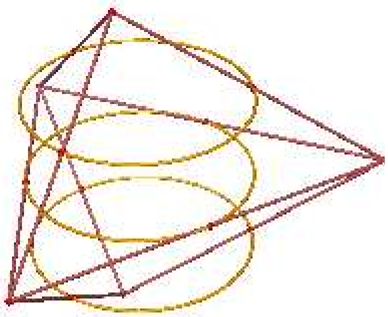
設四頂點坐標爲 $(0,0,0)$，$(a,0,0)$，$(0,b,0)$，$(0,0,c)$，因外接球球心 O 爲 $x=\frac{a}{2}$，$y=\frac{b}{2}$，$z=\frac{c}{2}$ 三個平面之交點，因此 $O(\frac{a}{2},\frac{b}{2},\frac{c}{2})$。另外，已知 24 點球球心爲四面體之重心 G_c，故 $G_c(\frac{a}{4},\frac{b}{4},\frac{c}{4})$，由此可知 R：r＝2：1。

所以 24 點球面半徑與外接球面半徑並無簡單的比例關係。

七、凸五、六、七面體是否有類似的結果？

由於前提是各面上有九點圓，故各面皆爲三角形，但若各面皆爲三角形，五、七面體無法成立，而六面體則無法將各中點置於同一球面。

依圖（九）可知，六面體的情形會出現三個等圓，而三個平行的等圓無法做出一球，故得知六面體無類似 24 點球面之結果。

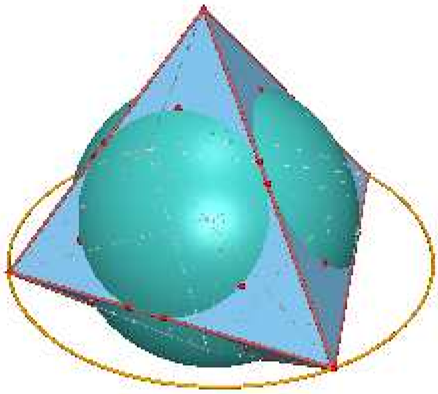


圖（九）

八、48 點球面

利用三角形所拼成的「三角形多面體」，已考慮過四面體與六面體，接下來討論八面體時。若其各面上的九點圓皆共球面，如圖（十），扣除重複的點，即包含 24 個各面垂心至各面頂點之中點，12 個稜邊上的垂足和 12 個稜邊上的中點，共 48 個特殊點。

定義二：若八面體各面上的九點圓共球面，我們稱此球面爲八面體的 48 點球面。



圖（十）

九、48 點球面存在的充要條件

引理五：具有 48 點球面之八面體，其三條對角線必兩兩互相垂直

證明：

考慮其中兩條對角線，其對應之頂點共可連出四邊，且四邊中點必在同一平面，故我們可將其投影在平面上，簡化之。

討論平面上的四邊形，已知各中點連線必爲平行四邊形，且角度等於對角線交角。若四邊中點共圓，則中點形成之四邊形爲矩形，故對角線互相垂直。

由上述知，若八面體存在 48 點球面，則三條對角線兩兩互相垂直。

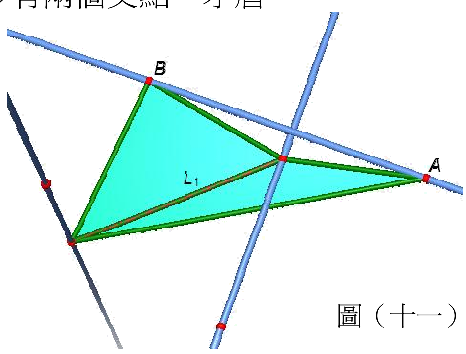
引理六：具有 48 點球面之八面體，其三條對角線必相交於一點

證明：

使用反證法。如圖(十一)，六個紅點即爲八面體頂點，藍線則是對角線，若其中兩對角線不相交，已知對角線兩兩互相垂直，則於此兩對角線上各取一頂點連線，設爲 L_1，必不與剩餘之對角線垂直。因此，頂點 A、B 在 L_1 上之垂足不共點，則 L_1 上同時有兩垂足及一中點，已知一直線與球面至多有兩個交點，矛盾。

若考慮其中一垂足與中點重合，則利用引理四之證明方法，可知九點圓 α、β 分別與 L_1 相切、相割，但都包含於四十八點球面，矛盾。

由上述知，若八面體存在 48 點球面，則三條對角線必相交於一點。

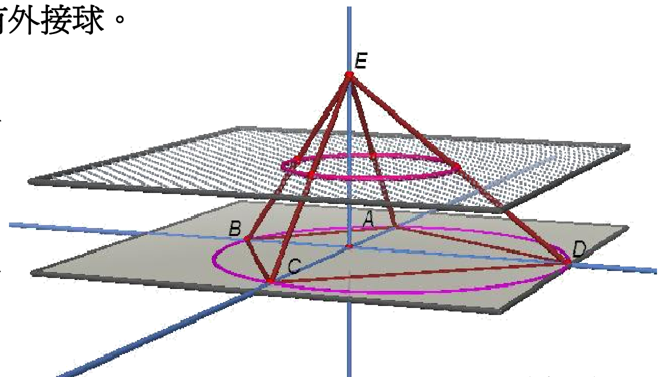


圖（十一）

引理七：具有 48 點球面之八面體，必具有外接球。

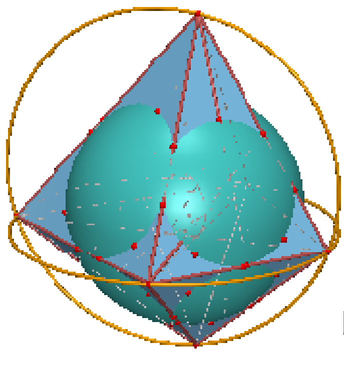
證明：

如圖所示，將四邊形 ACBD 各頂點與 E 點連線，由於四邊形 ABCD 在一平面上，故四連線中點也在同一平面上，且所形成之圖形爲四邊形 ABCD 的相似形，而此四點必成一圓（球面與一平面相交結果），如圖(十二)，故可知四邊形 ABCD 有外接圓。



圖（十二）

依此類推，八面體六個頂點能形成相交於兩頂點且不同平面之圓，如圖(十三)。而不共線三點決定一圓，不共平面四點決定一球面，故此兩圓恰決定一球面，即此八面體的六個頂點同時通過一外接球面。因此若八面體存在 48 點球面，必具有外接球。


圖（十三）

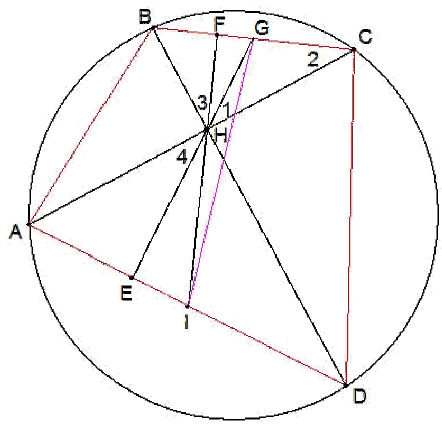
由上述知，**若八面體存在 48 點球面，則三條對角線兩兩互相垂直並交於一點，且八面體具有外接球。**

引理八：三條對角線兩兩互相垂直並交於一點，且具有外接球之八面體，存在 48 點球面。

證明：

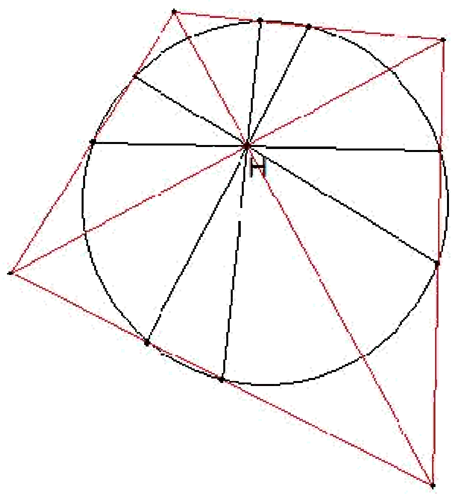
考慮八面體中共平面之四點 A、B、C、D，如圖(十四)，其中 E、F 分別爲 H 至 $\overline{AD}$ 、 $\overline{BC}$ 之垂足，I、G 爲 $\overline{AD}$ 、 $\overline{BC}$ 中點。因 $\overline{AC}\perp\overline{BD}$ ，故 $\triangle BHC$ 爲直角三角形，且 G 爲其外心，則有 $\angle 1=\angle 2$ 。

又 $\angle BHC=\angle BFH=90^\circ$ 、 $\angle B=\angle B$ ，因此 $\triangle BHC\sim\triangle BFH$ ，故 $\angle 2=\angle 3$ 。另外， $\angle HEA=\angle HFB=90^\circ$ ，又八面體具外接球，可知 $\square ABCD$ 有外接圓，因此 $\angle CBD=\angle CAD$ (對同弧)，故 $\triangle HEA\sim\triangle HFB$ ，則有 $\angle 3=\angle 4$ 。由以上知 $\angle 1=\angle 4$ ，因此點 E、H、G 共線。



圖（十四）

再看 $\square ABCD$ ，因對角線互相垂直，故四個中點共圓，且 $\overline{IG}$ 爲一直徑。又 $\angle GEI=90^\circ$ ，因此 E 亦在中點形成之圓上。同理可證， $\square ABCD$ 四個中點與 H 至四邊垂足共圓，如圖(十五)。

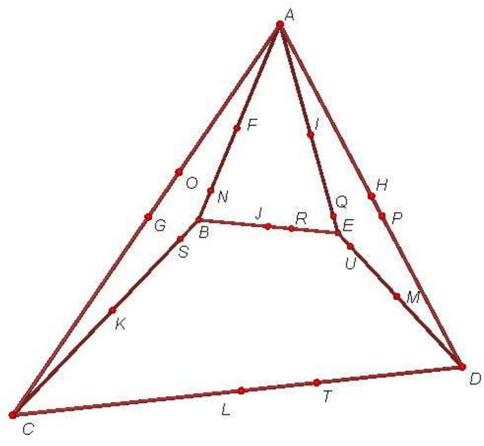


圖（十五）

接下來，利用類似引理三的證明方法，考慮八面體上半部，如圖（十六）。令各稜邊中點分別爲 F、G、H、I、J、K、L、M。此外， $\square BCDE$ 對角線交點與頂點 A 在 $\overline{BC}$ 的垂足相同(三垂線定理)。同理，可推至 $\overline{CD}$ 、 $\overline{DE}$ 、 $\overline{EB}$ ，令各稜邊垂足分別爲 N、O、P、Q、R、S、T、U。

又由九點圓定理，得知過△ACD 三邊中點 G、H、L 的圓也過三邊垂足 O，P，T，所以 G、H、L、O，P，T 六點共圓，設此圓爲 α ，同理，F、G、K、N、O、S 共圓 β 。又由上述知，K、S、J、R、U、M、L、T 共圓 γ 。

因爲圓 α 交圓 β 於 O、G 兩點，故可找到一球面 X，使得 X 同時包含圓 α 和圓 β 。同理，可找到兩球面 Y、Z，使得 Y 和 Z 分別包含圓 γ 和圓 β ，圓 γ 和圓 α 。因爲圓 α 和圓 β 共球面 X，則球面 X 至少包含 O、G、K、L 四點，且四點不共平面。圓 β 和圓 γ 共球面 Y，則球面 Y 也至少包含 O、G、K、L 四點，故球面 X＝球面 Y，即圓 α 、圓 β 和圓 γ 共球面。同理，球面 Y＝球面 Z，將其推廣至整個八面體，即可得到 48 點球面。



圖（十六）

爲使定理較爲簡潔，我們參考四面體的性質做了以下定義：

定義三：對角線兩兩互相垂直且交於一點之八面體，稱爲「對直八面體」，且對角線交點即爲其垂心。

因此，由引理五至八之證明，配合上述定義，可得到：

定理四：「八面體具有 48 點球面」之充要條件爲「具有外接球的對直八面體」。

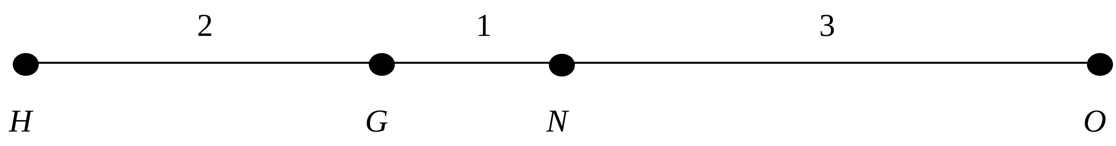
十、48 點球面球心與具外接球之對直八面體重心、外心、垂心的關係

證明出 48 點球面存在的充要條件後，我們接著討論對直八面體中，是否也具有尤拉線，如果有，其比例又是如何？

因具 48 點球面之八面體必爲對直八面體，不失其一般性，可令八面體六個頂點座標分別爲 $(x_1,0,0),(x_2,0,0),(0,y_1,0),(0,y_2,0),(0,0,z_1),(0,0,z_2)$，則我們得到八面體垂心 $H(0,0,0)$ 以及重心 $G(\frac{x_1+x_2}{6},\frac{y_1+y_2}{6},\frac{z_1+z_2}{6})$。接著考慮外心，因外心爲各邊中垂面交點，故包含於平面 $x=\frac{x_1+x_2}{2}$ 、 $y=\frac{y_1+y_2}{2}$ 、 $z=\frac{z_1+z_2}{2}$ ，則我們可得外心 $O(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2})$。再來討論 48 點球球心 N，先考慮 xy 平面，四邊中點座標分別爲 $(\frac{x_1}{2},\frac{y_1}{2},0),(\frac{x_1}{2},\frac{y_2}{2},0),(\frac{x_2}{2},\frac{y_1}{2},0),(\frac{x_2}{2},\frac{y_2}{2},0)$，因 N 到四邊中點等距，故包含於平面 $x=\frac{x_1+x_2}{4}$ 、 $y=\frac{y_1+y_2}{4}$ ，同理，若考慮 yz 平面，則有 N 包含於 $z=\frac{z_1+z_2}{4}$ ，因此 48 點球球心 $N(\frac{x_1+x_2}{4},\frac{y_1+y_2}{4},\frac{z_1+z_2}{4})$ 。

綜合上述討論，我們得到一個結果：

定理五：**存在 48 點球面之八面體，其重心 G、外心 O、垂心 H、48 點球球心 N 共線，且有下列比例關係：**



十一、對直八面體之 48 點球面，外接球面兩者的半徑關係之探討

不失其一般性，設 8 面體之 6 頂點座標分別爲：

$(x_1,0,0),(x_2,0,0),(0,y_1,0),(0,y_2,0),(0,0,z_1),(0,0,z_2)$

則此 8 面體符合第一、二條件

且因內冪定理知 $x_1x_2 = y_1y_2 = z_1z_2$，設 $x_1x_2 = y_1y_2 = z_1z_2 = \alpha$

48 點球球心爲 $N(\frac{x_1+x_2}{4},\frac{y_1+y_2}{4},\frac{z_1+z_2}{4})$，外心爲 $O(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2})$

可得外接球半徑爲：

$$\sqrt{(\frac{x_1+x_2}{2}-x_2)^2+(\frac{y_1+y_2}{2})^2+(\frac{z_1+z_2}{2})^2}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1+y_2)^2+(z_1+z_2)^2}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{x_1{}^2+x_2{}^2+y_1{}^2+y_2{}^2+z_1{}^2+z_2{}^2-2x_1x_2+2y_1y_2+2z_1z_2}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{x_1{}^2+x_2{}^2+y_1{}^2+y_2{}^2+z_1{}^2+z_2{}^2+2\alpha}$$

48 點球面半徑爲：

$$\sqrt{(\frac{x_1+x_2}{4}-\frac{x_2}{2})^2+(\frac{y_1+y_2}{4}-\frac{y_2}{2})^2+(\frac{z_1+z_2}{4})^2}$$

$$=\frac{1}{16}\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1+z_2)^2}$$

$$=\frac{1}{16}\sqrt{x_1{}^2+x_2{}^2+y_1{}^2+y_2{}^2+z_1{}^2+z_2{}^2-2x_1x_2-2y_1y_2+2z_1z_2}$$

$$=\frac{1}{16}\sqrt{x_1{}^2+x_2{}^2+y_1{}^2+y_2{}^2+z_1{}^2+z_2{}^2-2\alpha}$$

得知 48 點球半徑與外接球半徑無固定的比例關係。

伍、結論

我們證明了下列結果：

一、四面體具有 24 點球面之充要條件是此四面體爲對直四面體。

二、對直四面體的 24 點球球心恰爲其重心。

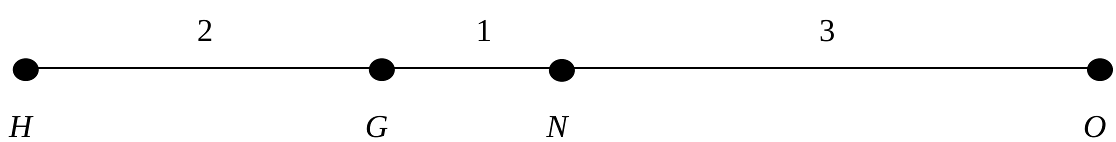
三、24 點球球心與該對直四面體之外心、垂心共線，且位於外心與垂心中點。（意即四面體之尤拉線）

四、24 點球面之半徑與對直四面體外接球半徑無固定的比例關係。

五、六面體無類似 24 點球面之結果。

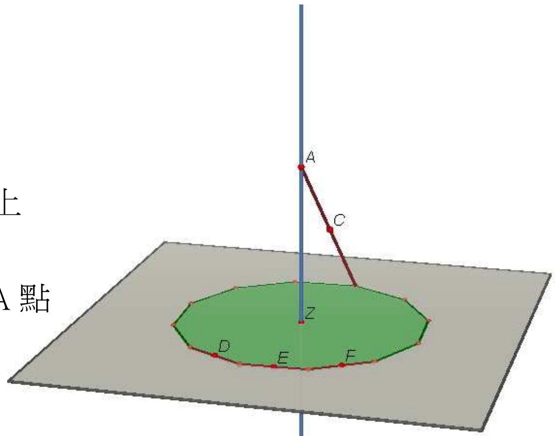
六、八面體具有 48 點球面之充要條件爲具有外接球的對直八面體。

七、存在 48 點球面之八面體，其重心 G、外心 O、垂心 H、48 點球球心 N 共線(意即八面體之尤拉線)，且有下列比例關係：



陸、討論與展望

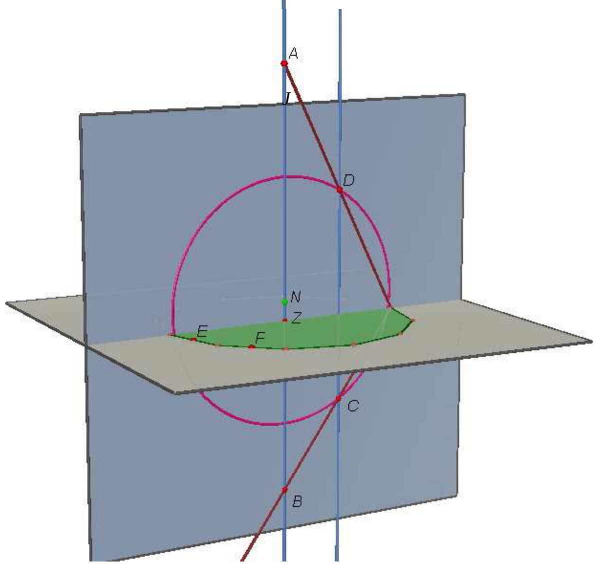
一、我們發現以 n+2 點做多面體，有一通式可使九點圓聯立成球面，其中 n>3



討論一正 n 邊形為底，作上下兩側的錐體，知會形成 2n 面體。

任取正 n 邊形邊上三中點 D、E、F 作圓，再加上 C 點構成球面。

顯然上述球面會通過正 n 邊形上各中點，以及 A 點往 n 邊形頂點連線段的中點。



而後，將上述球面球心定義為 N，以 N 為圓心，$\overline{ND}$ 為半徑，作一過 D 的圓。再自 D 作過中央平面的垂線，與圓交於新的點 C。

(目前已知 C 點位於球 N 上。)

自正 n 邊形頂點 J 作射線過 C，必與中央垂線相交，令交點為點 B。

因兩垂線平行，所以 $\overline{JD}:\overline{DA}=\overline{JC}:\overline{CB}=1:1$，C 是 $\overline{JB}$ 中點。

則可稱正 n 邊形與 A、B 形成的 2n 面體擁有「12n 點球面」，此球面與多面體各面皆交出一九點圓。

二、由(一)知對任意 2n 面體、n>3，至少有一特例使其存在九點圓聯立球面，即以正 n 邊形為底面形成之 2n 面體。但我們的目標不僅止於找出特例，而是求得 2n 多面體存在 12n 點球面之充要條件並證明，且若該多面體存在外心與垂心，找出其尤拉線之性質。

更進一步，嘗試證明在空間中的九點圓聯立球面或尤拉線之性質是否有隨 n 面體的 n 改變之一般式，若有，則找出來並證明。

柒、參考文獻

1、幾何明珠　黃家禮 編著　九章出版社。

2、幾何探索　曹亮吉 著　南一書局。

3、平面幾何中的小花　單墫 著　上海教育出版社。

4、高中數學課本　第三冊　南一書局。