

第七屆旺宏科學獎

成果報告書

參賽編號：SA7-521

作品名稱：愛怎麼樣，都型—鋼管秀之投影幾何

姓名：顏欣儀

關鍵字：柱面投影、投影幾何、反射定律

第七屆旺宏科學獎

成果說明書目錄

摘要	P.2
壹、研究動機.....	P.3
貳、研究目的.....	P.4
參、研究設備與器材	P.5
肆、研究過程與方法	P.6
伍、研究結果.....	P.19
陸、討論	P.20
柒、結論	P.22
捌、參考資料.....	P.23

摘要

在生活週遭的物品爲了使其更加美觀，常常會使用到鏡面投影，例如台中縣政府縣民廣場前的公共藝術作品－傾城之約，便是用了光線反射的原理，讓原本平鋪在地面上的不規則馬賽克投影在火焰外型的面鋼板上，象徵現實與虛幻交織的空間，無形的圖案反射成人形，也反射週遭的人物，使其更具有神秘感及商業價值。

看似簡單的投影，事實上卻不然。爲了能使更多的圖形能順利的投影到弧面物體上，我們使用投影及光學的原理，進行分析，並討論圖形與角度間的關係，因爲圖形的線條長度與角度在不同的投影位置會產生不同的變化，可能會某部分線條太長、太短甚至扭曲變形。當中需要引用到投影幾何學及光學，發展最快速的投影方式，使其能使用最簡易的方式精準的投影出正確的圖形。

我們主要做出鋼杯放在彎曲的圖型上，所呈現在鋼杯的圖形是方正的。



圖 1 傾城之約

壹、研究動機

有一次和同學在逛街的時候，突然間一個看似平凡無奇的杯墊吸引了我的目光。這個神奇的杯墊在擺上一個鋼杯後卻投影出令人驚艷的圖案，立刻讓我想起課堂上教的投影幾何學以及物理課的光學介紹，與遊樂場的哈哈鏡有些相似，所以讓我產生了濃厚的興趣，在生活周遭有很多會產生投影的東西，例如鋼製的垃圾桶投影地面，發現垃圾桶與地面上的圖形全然不同，從地面投影到鋼製桶子上的線條都扭曲變了樣了，於是想說若是可以自己設計出圖形將其投影到圓柱形鏡面物體以及鋼球體上，能否產生變化萬千的新穎設計。



圖 2 別具浪漫氣息的咖啡杯

貳、研究目的

- 一、 探討平面投影到曲面的相互變化。
- 二、 利用推導出的原理製作出投影人型公仔。
- 三、 能使各式各樣鏡面的曲面體能發展出更多樣的變化，能將其應用在各式商品，後續的商業發展空間不可計量。

參、研究設備及器材

- 一、電腦輔助繪圖軟體：Autodesk AutoCAD 2008
- 二、電腦輔助設計軟體：Autodesk Inventor 2008
- 三、文書編輯軟體：Microsoft Word 2003
- 四、影像編修軟體：Photoimpact 10、illustrator
- 五、海報製作軟體：Adobe InDesign CS2
- 六、電腦 x 4
- 七、Marph Magic 拼圖 x 1
- 八、鋼杯 x 4

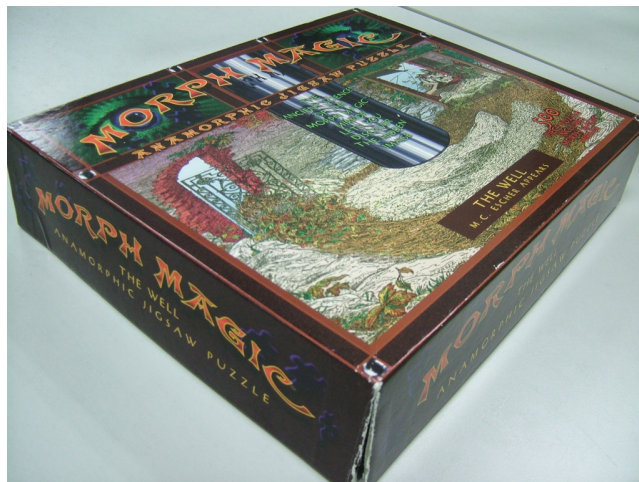


圖 3 Marph Magic 拼圖

肆、研究過程與方法

一、投影簡介

投影幾何是由法國書學家兼軍事工程蒙奇(Gaspard Monge)於 1795 年所發表。為利用投影原理來討論，點、線、面、體等在空間之大小、形狀、位置及其關聯情況，而將其表現於平面上的應用科學。

物體透過光源照射，將各點投射到一平面，即可形成一影像，即稱為投影。

水平投影面與直立投影面相交，將空間可區分為四個區域，每區域即為一個象限。

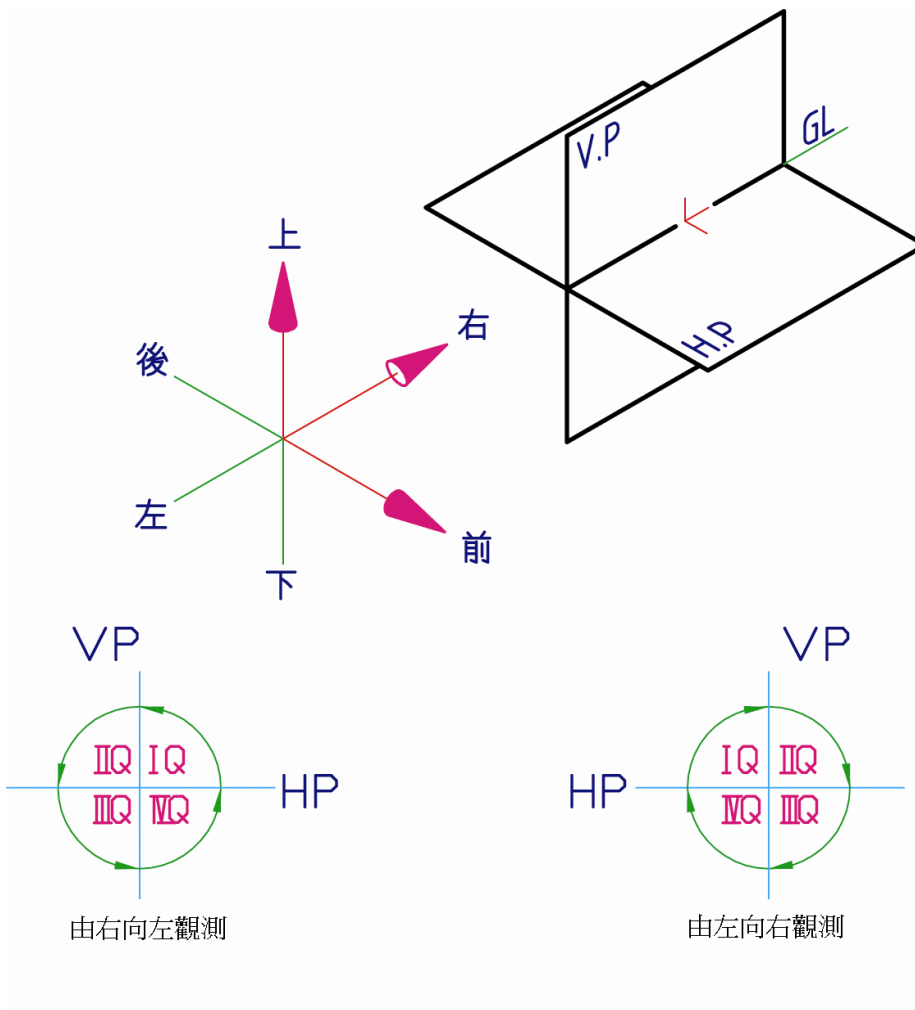


圖 4 象限

二、第一角法與第三角法

將物體置於第一象限所投影出來的的視圖的方法，稱為第一角法；同理由第三象限所投影出來者，稱為第三角法。如圖 5 所示。

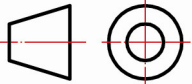
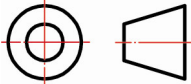
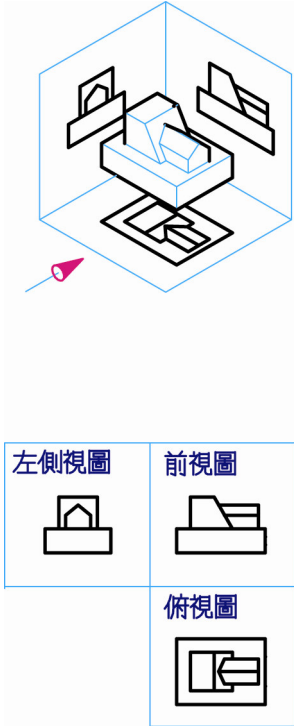
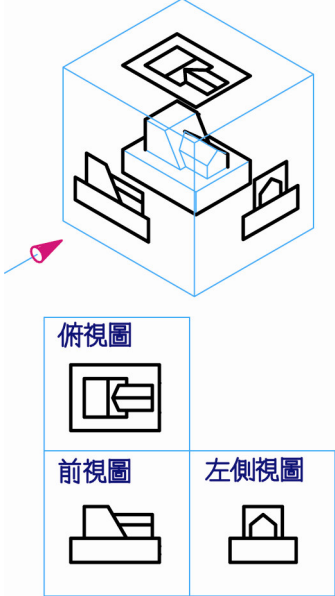
投影別	第一角投影法	第三角投影法
符號		
關係	視點→物體→投影面	視點→投影面→物體
圖例		

圖 5 兩種投影法之視圖排列差異

三、點之投影

點為組成物體之最基本元素，其無大小，只需表示其位置之所在；且點在空間中投影至投影面上，均仍為是點。如圖 6 所示。

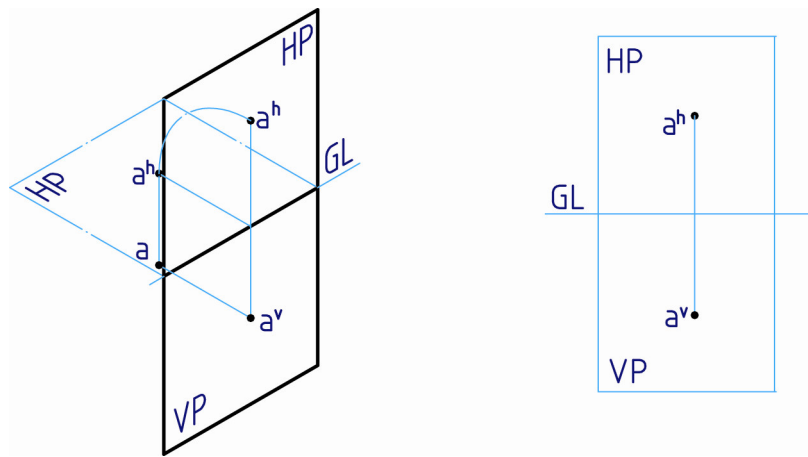


圖 6 點在第三象限之投影

四、線之投影

線可謂是點的組合，即點在一定方向移動，所形成的軌跡稱為直線，其投影及只要找出直線之兩端點的位置投影，再將其投影連接即可完成直線之投影。如圖 7 所示。

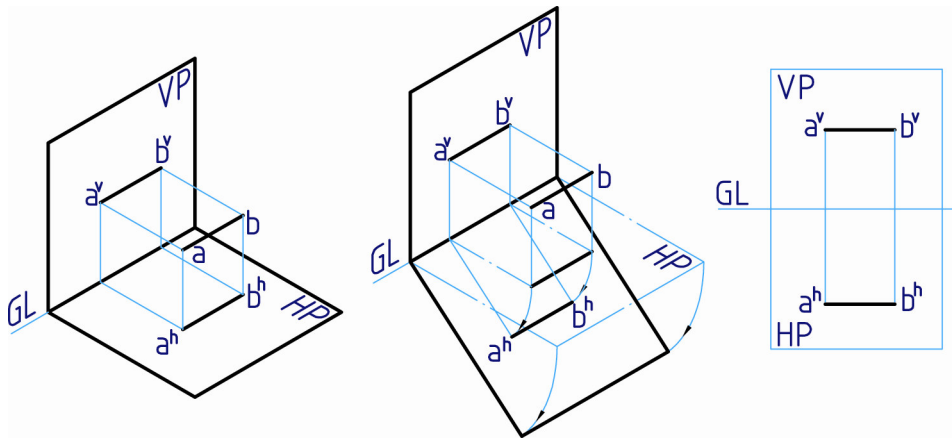


圖 7 直線之投影

五、利用光學性質

我們利用入射角等於反射角原理做出這項實驗。首先要了解光的特性而進一步的去判斷圖形在經過有弧度的鏡面體反射後，圖樣會怎麼產生變化。

(一) 光的反射定律：

指光射到一個介面時，其入射光線與反射光線成相同角度。光入射到不同介質的界面上會發生反射和折射。在反射時會出現：反射光線跟入射光線和法線在同一平面內。入射角等於反射角。如圖 8、9 所示。

1. 入射角 = 反射角。

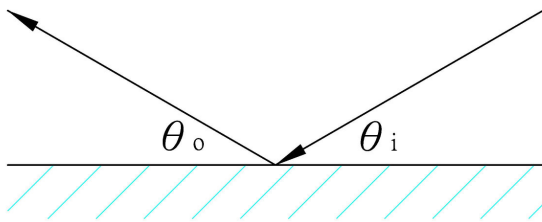


圖 8 入射角=反射角

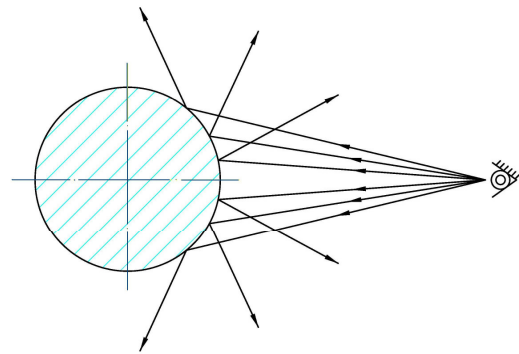


圖 9 俯視圖

2. 由俯視圖得知，投影最廣只達切線方向。如圖 10 所示。

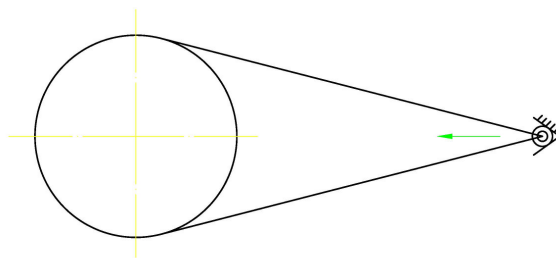


圖 10 切線圖

(二) 經由反覆實驗發現同心圓線，如圖 11 所示。在某一角度時在弧面上的投影會近似直線，以及指向圓心的直線會近似互相平行的直線，因此我們將同心圓線及指向圓心的直線轉換成座標方格，方便圖形構圖。但將圓柱鋼杯放置於中心點上，所產生的影像投影仍有差異，不符合完全平行和垂直，以致失敗。如圖 12 所示。

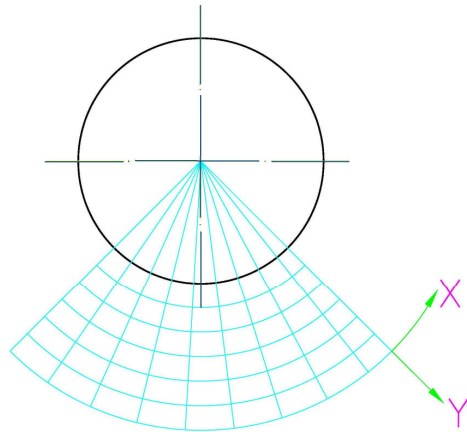


圖 11 座標方格

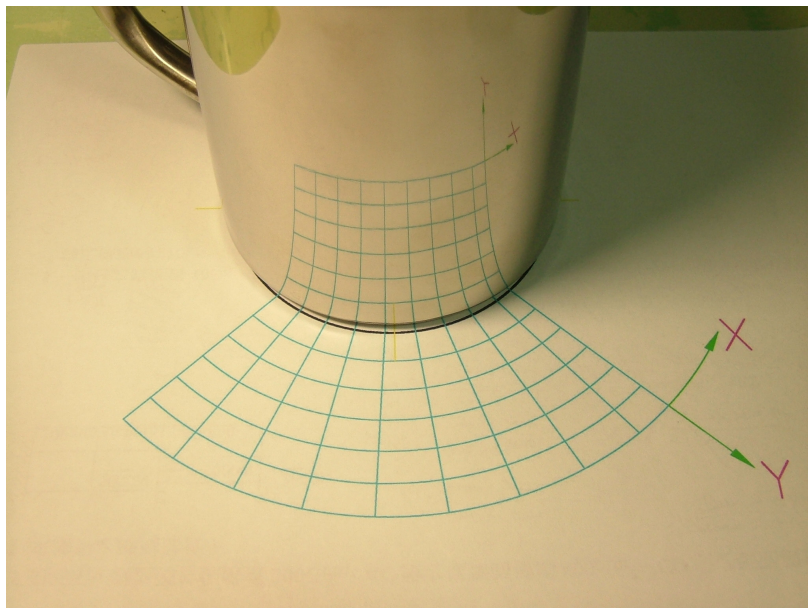


圖 12 成像

(二)圖 13 的投影已經接近正確值，但仍有誤差值過大的問題，經過再次檢討改進，並以 Autocad 軟體繪製 3d 立體圖形，透過不同的視埠角度來探討實點的位置如圖 14，圖形說明：平面成像以綠色平面矩形網格表示，平面與圓柱面相切，A 點為矩形平面像點，視線由視點經由 A 點與圓柱相交於 B 點，B 點為圓柱面像點，由正視圖觀察視線的反射，C 點為經垂直面反射的推論實點位置，由俯視圖觀察視線的反射面為圓形面，C 點未落在俯視線的反射線上，經分析討論，配合投影幾何原理作圖分析，求得正確實點 D 在俯視圖的投影位置。

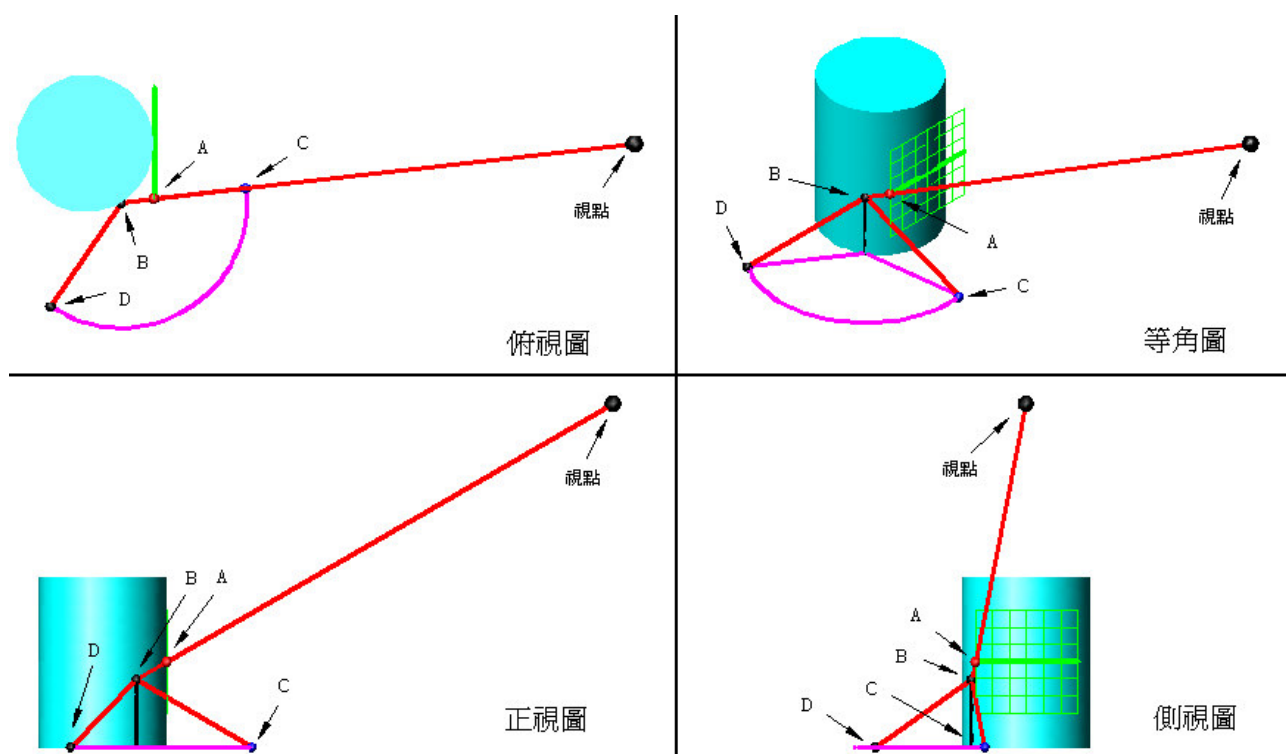


圖 14 3d 立體圖形

(三)經由推論實點 C，求得正確實點 D 在俯視圖位置的作圖步驟：

1. 將正視圖的 C 點垂直投影回入射線，在俯視圖的入射線求得的 C 點的位置。
2. 在俯視圖中，以 B 點為圓心，BC 距離為半徑畫弧，交反射線於 D 點，D 點為正確實點，在俯視圖的投影位置。

(四)依據上述的幾何投影作圖，求得平面矩形網格，過 A 點的水平線各像點之相對實點投影在俯視的位置，連接各點得一曲線如圖 15，此曲線經圓柱面反射回視點，眼睛可觀察到一水平像線。

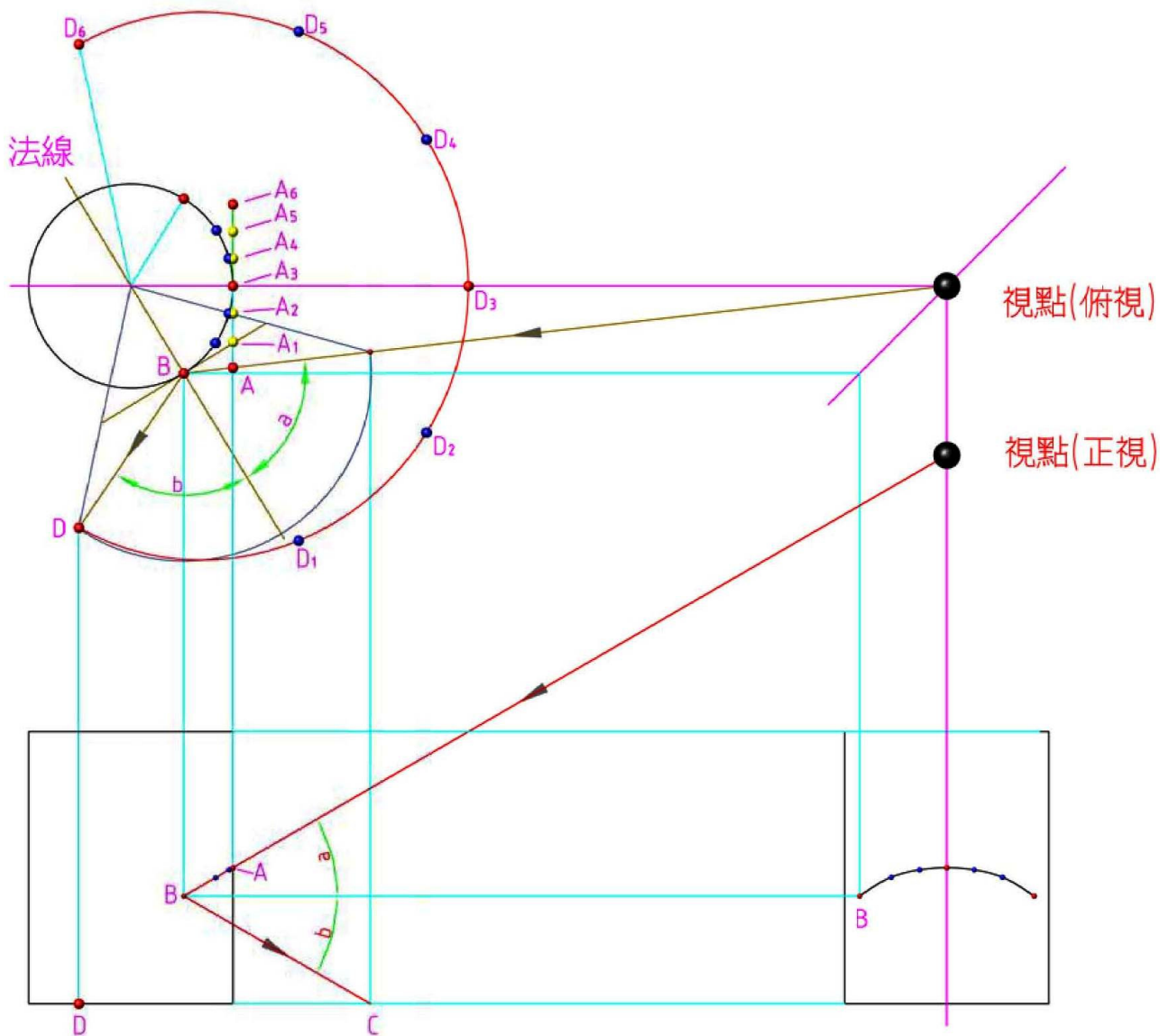


圖 15 平面矩形網格之求法

(五)透過幾何投影作圖，求得平面矩形網格各像點，其相對實點在俯視投影形成的變形網格如圖 16，即為桌墊變形網格圖。

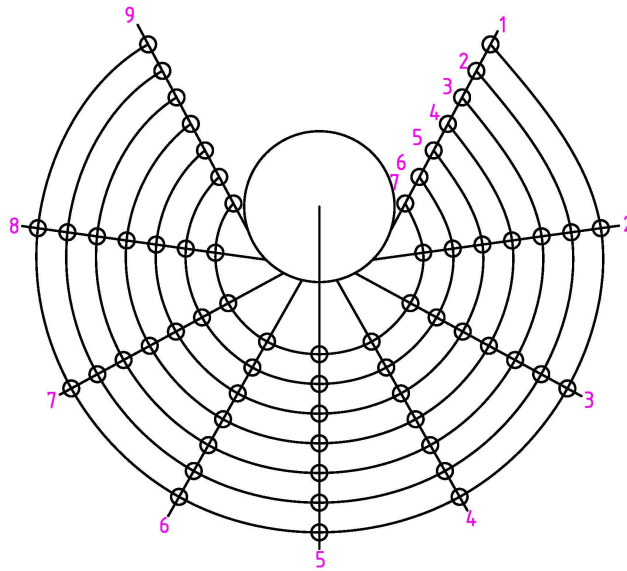


圖 16 桌墊變形網格圖

(六) 利用影像處理軟體(illustrator)，將預計成像的平面圖形，與桌墊變形網格圖重疊，將圖形變形與網格相符，即為本研究所須，圓柱面成像的桌墊圖形如圖 17，圓柱成像一如圖 18。

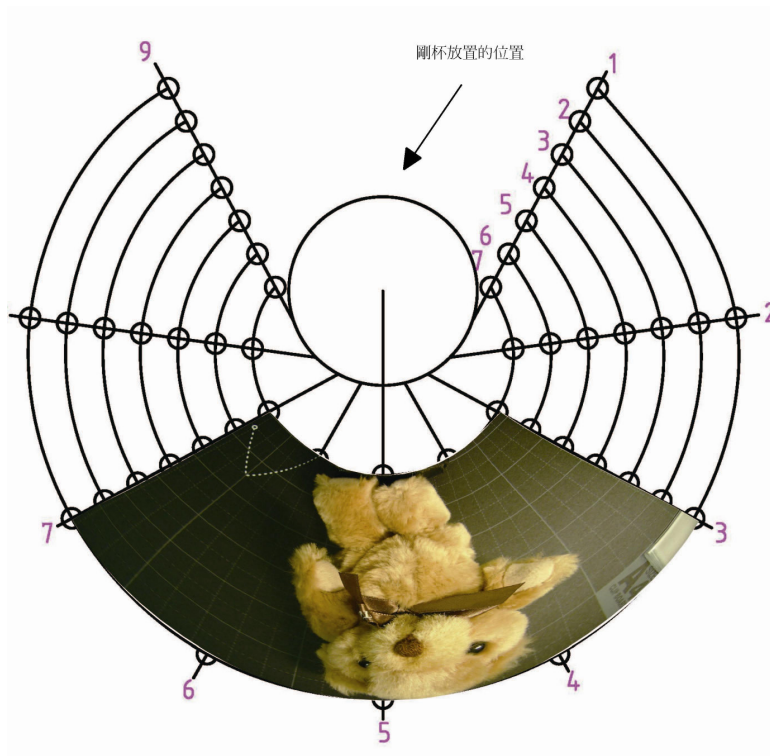


圖 17 神奇桌墊



圖 18 圓柱成像一

七、數學模式推導

我們使用直線方程式與圓方程式，再利用之前入射角等於反射角原理，可以解出投影點的方程式。為方面求解，將空間點投影相對關係利用圖 19 說明。

4.

$$(x - C_x)^2 + (y - C_y)^2 = \overline{AC}^2$$

$$ax + by = c \quad \Rightarrow \quad y = -mx + c$$

$$(x - C_x)^2 + (-mx + c - C_y)^2 = \overline{AC}^2$$

$$x^2 - 2C_x x + C_x^2 + m^2 x^2 - 2m(C - C_y)x + (C - C_y)^2 = \overline{AC}^2$$

$$(m^2 + 1)x^2 - 2[C_x + m(C - C_y)]x + C_x^2 + (C - C_y)^2 - \overline{AC}^2 = 0$$

我們用 Excel 驗算即可得出投影點。如圖 20,21。

	X	Y	Z	R	投影在圓柱上空間座標			視點->網格->地面點-A			直線方程式-B			由圓方程+方程式-B		
					X	Y	Z	X	Y	Z	a	b	c	聯立得		
鏡柱底 圓心 : O	0	0	0		X	Y	Z				aX + bY = c	X : 一元二次 方程式				
鏡柱底 半徑 : R				36									2	1	0	
視點 : P	0	600	300													
視屏網格座標 : T0	0	40	80		0.00	36.00	78.43	0.00	-163.64	0.00	560	0	0			
視屏網格座標 : T1	5	40	80		5.04	35.65	78.29	6.82	-163.64	0.00	560	5	3000	12545	-1E+05	358704
視屏網格座標 : T2	10	40	80		10.10	34.55	77.86	13.64	-163.64	0.00	560	10	6000	3137	-67200	358704
視屏網格座標 : T3	12.5	40	80		12.64	33.71	77.53	17.05	-163.64	0.00	560	12.5	7500	2008	-53760	358704
視屏網格座標 : T4	15	40	80		15.20	32.63	77.11	20.45	-163.64	0.00	560	15	9000	1394.8	-44800	358704
視屏網格座標 : T5	17.5	40	80		17.77	31.31	76.59	23.86	-163.64	0.00	560	17.5	10500	1025	-38400	358704
視屏網格座標 : T6	20	40	80		20.37	29.68	75.95	27.27	-163.64	0.00	560	20	12000	785	-33600	358704
視屏網格座標 : T7	22	40	80		22.47	28.13	75.34	30.00	-163.64	0.00	560	22	13200	648.93	-30545	358704
視屏網格座標 : T8	24	40	80		24.59	26.30	74.62	32.73	-163.64	0.00	560	24	14400	545.44	-28000	358704
視屏網格座標 : T9	26	40	80		26.74	24.11	73.76	35.45	-163.64	0.00	560	26	15600	464.91	-25846	358704
視屏網格座標 : T10	28	40	80		28.93	21.43	72.70	38.18	-163.64	0.00	560	28	16800	401	-24000	358704
視屏網格座標 : T11	30	40	80		31.18	18.00	71.36	40.91	-163.64	0.00	560	30	18000	349.44	-22400	358704
視屏網格座標 : T12	31	40	80		32.34	15.82	70.50	42.27	-163.64	0.00	560	31	18600	327.33	-21677	358704
視屏網格座標 : T13	32	40	80		33.54	13.08	69.43	43.64	-163.64	0.00	560	32	19200	307.25	-21000	358704
視屏網格座標 : T14	33	40	80		34.82	9.15	67.88	45.00	-163.64	0.00	560	33	19800	288.97	-20364	358704
視屏網格座標 : T15	33.7	40	80		35.92	2.38	65.22	45.90	-163.64	0.00	560	33.66	20196	277.79	-19964	358704

圖 20Excel 驗算一

視點>網格>柱面點-C		角度-D	反射點後 直線方程式-E			地面>柱面反射點 距離 AC	由 距離方程 + 方程式-E			得解：投影點-F	
X	Y		a	b	c		聯立得			X	Y
			aX + bY = c				X：一元二次 方程式				
			mX + Y = c				2	1	0		
										0.00	235.6364
5.039	35.646	73.3964	3.35	1.00	52.54	199.2899	12.247	-123.42	-39405.52	61.9858	226.6260
10.097	34.555	56.3994	1.51	1.00	49.75	198.2229	3.2653	-65.941	-38959.42	119.7938	199.6579
12.640	33.708	47.6092	1.10	1.00	47.56	197.3934	2.2001	-55.621	-38612.61	145.7199	179.4954
15.197	32.635	38.5253	0.80	1.00	44.73	196.3418	1.6339	-49.661	-38172.73	168.8020	154.9284
17.772	31.308	29.0477	0.56	1.00	41.18	195.0392	1.3085	-46.507	-37627.03	188.2780	126.0065
20.368	29.684	19.0403	0.35	1.00	36.71	193.4434	1.1191	-45.589	-36956.06	203.2285	92.7913
22.466	28.129	10.5230	0.19	1.00	32.30	191.9137	1.0345	-46.483	-36308.71	211.1523	63.1788
24.587	26.296	1.3919	0.02	1.00	26.89	190.1064	1.0006	-49.204	-35535.55	214.6376	30.9134
26.738	24.106	-8.5857	-0.15	1.00	20.07	187.9442	1.0228	-54.695	-34591.82	212.5760	-3.9522
28.929	21.427	-19.8077	-0.36	1.00	11.01	185.2950	1.1297	-65.363	-33388.80	203.2606	-41.3626
31.179	17.997	-33.0781	-0.65	1.00	-2.31	181.8936	1.4243	-88.813	-31700.76	183.5924	-81.2774
32.339	15.818	-41.0383	-0.87	1.00	-12.33	179.7292	1.7577	-113.68	-30464.40	167.9031	-102.1856
33.538	13.084	-50.6456	-1.22	1.00	-27.81	177.0090	2.4869	-166.81	-28534.89	145.7823	-123.7857
34.818	9.149	-63.9268	-2.04	1.00	-62.01	173.0853	5.1766	-360.48	-23682.96	110.8923	-146.3218
35.921	2.382	-85.8528	-13.79	1.00	-493.02	166.3178	191.2	-13736	219052.81	47.9491	-163.5005

圖 21Excel 驗算二

伍、研究結果

本研究製成的桌墊，經過鋼杯圓柱面成像，所呈現在鋼杯的圖形是方正的，如圖 19、20 所示，証實本研究求得的桌墊變形網格，確實為可供桌墊圖形變形參考。



圖 19 圓柱成像二



圖 20 圓柱成像三

陸、討論

觀察杯上圖形時，視點皆高於杯高，而非正視於鋼杯圓柱面，從較高的視點來觀察，一般鋼杯上印刷圖形，所形成的圖形是圓柱面成像，上下水平線變形為弧線，本研究的圓柱面反射成像，形成的是平面成像，在較高的視角觀察，上下水平線仍為水平線，如圖 21、圖 22，圖中 A 為預計成像的平面圖片，與鋼杯圓柱面相切，B 為依本研究方法將平面圖片變形製成桌墊，在圓柱面反射形成的像，C 為一般直接將圖形印刷在圓柱面的成像。

B 成像與 A 預計的成像趨近一致，證明本研究所求得的桌墊變形網格是正確的，透過圓柱面的反射成像原理，所形成的像比印刷成像更為方正。只需透過一般的鋼杯，桌墊圖形經反射成像，達成驚奇的成像效果，不但節省了印刷成本，透過不同的桌墊圖案亦可轉換四季不同的心情。



圖 21 預計成像的平面圖片 A、本研究結果 B 與平面印刷 C 之比較



圖 22 A、B、C 之比較

柒、結論

- 一、經由本研究方式，將原始圖片轉換成變形的桌墊圖片，依據光線反射的原理，可以神奇的在圓柱鋼杯上，重新成像。形成的為平面成像，與一般直接在鋼杯印刷成像不同。
- 二、研究的結果具有無窮的商業價值，可將變形的企業標誌圖片，用於餐盤、滑鼠鍵等，經由神奇反射成像，為企業形象塑造宣傳效果，在使用者的心中留下深刻的印象。
- 三、配合政府推動公共建設，推展來台觀光，利用本研究結果設計成公共藝術、景觀藝術作品，神奇的變化可留住眾人的目光，也會成為爭相合照的作品，達到良好的宣傳效果。
- 四、未來研究可進一步探討在空間中，各種曲面反射成像的原理與應用。例如:剛球體。

捌、參考資料

1. 李維華、陳永昌（民 94）。**電腦輔助製圖 2005**。全華科技圖書。

2. 圓柱體（無日期）。維基百科全書。民 97，取自：

<http://zh.wikipedia.org/w/index.php?title=%E6%9F%B1%E9%9D%A2&variant=zh-tw>

3. 光的反射定律（無日期）。維基百科全書。民 97，取自：

<http://zh.wikipedia.org/w/index.php?title=%E5%85%89%E7%9A%84%E5%8F%8D%E5%B0%84%E5%AE%9A%E5%BE%8B&variant=zh-tw>

4. 折射（無日期）。維基百科全書。民 97，取自：

<http://zh.wikipedia.org/w/index.php?title=%E6%8A%98%E5%B0%84&variant=zh-tw>

5. 周景秋(民 93)。**錯視**。廣西美術出版社。

6. 魏義峰(民 94)。**投影幾何 I**。出版社：復文書局。取自：

(1)概論 1-4 (P.5) ， 1-7(P.12)

(2)點之投影 2-2(P.20)

(3)線之投影 3-3(P.35) ， 3-4(P.38)