

第八屆旺宏科學獎

成果報告書

參賽編號：SA8-081

作品名稱：滾動液罐中液體作用之探討

姓名：鍾少軒

關鍵字：純滾動、轉動慣量、黏滯性

摘要

將含水的罐子由傾斜軌道上靜止釋放，藉由儀器測量其位置隨時間的變化。得知含不同水量的罐子及空罐經過相同距離的滾動總時間有相當的差異。由各項數據分析後，發現水在罐子中有晃動及形成薄水膜的行為。最後發展出理論模型，以描繪其滾動總時間隨水－罐質量比的變化趨勢，並推想水－罐間的交互作用方式。

壹、研究動機

「啊！水罐倒了！」某一天，我不小心同時把兩個水罐弄倒了，突然想起其中一個水罐內還殘留少許水，爲了不讓水罐滾落地上而濺濕高級地毯，我趕緊抓住滾的較快的罐子。當另一個罐子掉落地上時竟然濺出水來弄濕地毯！在含有水的罐子中，水對罐子的正向力不是應該推罐子向前嗎？我在挨罵的同時覺得相當困惑，於是想設計實驗，想找出害他挨罵的元兇！

貳、研究目的

- 一、 分析含水量不同的罐子在傾斜軌道上滾動的情形。
- 二、 分析不同罐子裝水後，在傾斜軌道上滾動的差異。
- 三、 探討水和罐子的交互作用如何影響罐子滾動的行為。
- 四、 分析含乙二醇量不同的罐子在傾斜軌道上滾動情形，並與含水罐比較差異。
- 五、 觀察液體在滾動罐子中表現出的行為。
- 六、 建立模型以模擬含水罐子的滾動行為。

參、研究設備及器材

- (一)兩條長 1.7m 寬 0.02m 木條組成的木製軌道(總寬 0.08m，軌道間距 0.04m)
- (二)自製發射器
- (三)空罐

	種類	半徑 (m)	長度(m)	質量(g)	容積(ml)
A 罐	味丹 500 鋁製沙土罐	0.0333	0.1664	19.62	509
B 罐	透明壓克力圓柱(小)	0.0289	0.1003	73.87	239
C 罐	透明壓克力圓柱(大)	0.0488	0.1071	257.90	630

- (四) PASCO 圖形精靈(Xplorer GLX)
- (五) PASCO 運動感測器(motion sensor)
- (六) 游標尺一支
- (七) 電腦一台(excel、data studio 軟體)
- (八) 電子天平一台(精準至小數第二位)
- (九) 千斤頂二個
- (十) 水電膠帶
- (十一) 熱熔槍、熱熔膠
- (十二) C 型夾兩支
- (十三) 水平儀

肆、研究過程或方法

一、實驗過程

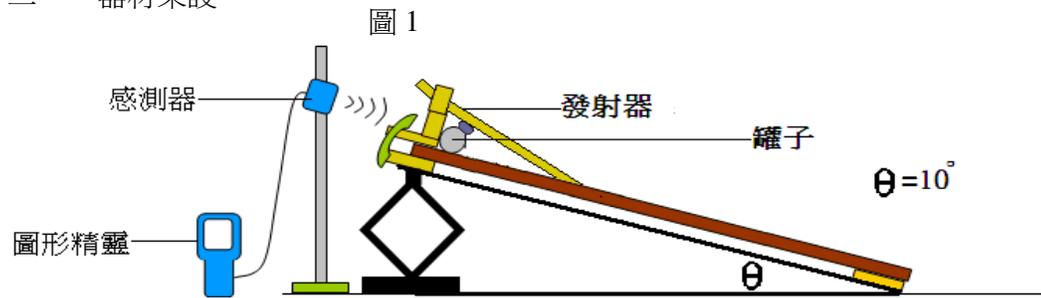
實驗一：將 A 罐置於軌道上，使之靜止釋放。觀察含有不同水量時，A 罐的滾動情形。

實驗二：分別將 B、C 罐置於軌道上，使之靜止釋放。觀察不同罐子含水滾動時，運動情形的差異。

實驗三：將 B 罐置於軌道上，使之靜止釋放。觀察含有不同值量之乙二醇時，B 罐的滾動情形。

實驗四：利用攝影機拍攝含水或乙二醇的 B 罐在軌道上滾動時，內部水或乙二醇的運動情形。

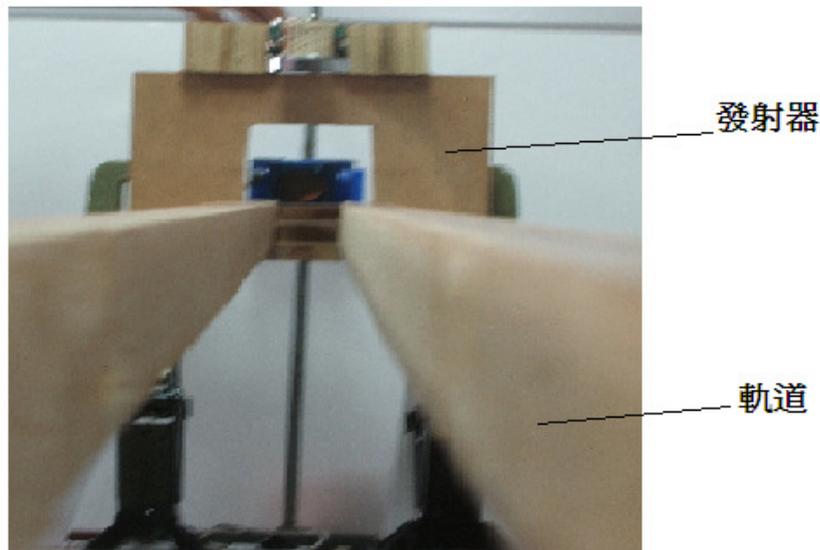
二、器材架設



(一) 軌道：

我們以長 1.7m、寬 0.02m、厚 0.039m 的木條平行擺放做為寬 0.08m 的軌道，並以磨砂紙將表面磨平。在實驗的過程中我們曾以厚木板當作斜面，但發現 PASCO 運動感測器在位置的讀取上會有跳動的情形。推測是斜面反射聲波所引起，因此我們將長木條切成 2 條，平行固定在木塊上，作為實驗的軌道。我們將軌道放置在兩等高千斤頂上，固定軌道與地面夾角 $\theta = 10^\circ$ ，最後以水平儀確定軌道面水平。

圖 2



(二) 發射器：

圖 3



我們將木板釘成 L 型並在上方架設可動式槓桿，槓桿前端黏有重物，以 C 型夾固定在軌道上方，讓軌道與發射器平行。並在發射器中央挖出一個邊長 0.08m 的正方形，此發射器的應用原理為木板和槓桿上的重物可夾住水罐並自由釋放，當我們在很短的時間內拉起槓桿便可釋放水罐。此發射器的優點有：

1. 易固定、改變在軌道上的位置。
2. 木板可確定水罐滾動方向。
3. 釋放時不會影響水罐滾動。
4. 在實驗完不會損毀軌道。

(三) PASCO 運動感測器的架設：

PASCO 運動感測器之測量原理為發出一聲波經由物體反射後的時間差計算出距離。由於感測器在 0.15m 內偵測不到，我們在罐子釋放點後方 0.2m 處以支架固定 PASCO 運動感測器，並調整角度使之平行於軌道。

(四) PASCO 圖形精靈(Xplorer GLX)：

圖形精靈(Xplorer GLX)為 PASCO 運動感測器的數據處理器，同時記錄運動感測器測得的數據。

三、實驗步驟

實驗一

1. 軌道、發射器、感測器架設方式與上述實驗架設(圖 1)相同。
2. 將運動感測器頻率設定為 **100Hz**，並測量數值，以確定發射裝置不會影響到實驗數據。
3. 將 A 罐放置於發射器上，調整感測器使其測量到罐子初始位置為 **0.2m**。
4. 每次使 A 罐靜止釋放前都須讓罐子在軌道上靜置約 1 分鐘，以確保罐內的水已無晃動。
5. 先啟動運動感測器約 2~3 秒後，釋放罐子滾動至軌道末端，再將運動感測器停止。
6. 擷取距離在 0.2m~1.6m 的位置(s)隨時間(t)改變的實驗數據。
7. 重複步驟 3~6 七次，
8. 利用實驗數據 s 和 t，繪出 s-t 的關係圖。
9. 利用 s-t 關係圖的數據，v-t 關係圖。
10. 改變水—罐質量比，重複步驟 1~9。
11. 繪出滾動總時間與水—罐質量比關係圖。
12. 對 v- t 關係圖做線性迴歸分析，將 v-t 關係圖分成若干部份進行討論。

實驗二

1. 將實驗一中的 A 罐換成 B、C 罐，並依照實驗一的步驟作相同的實驗。
2. 繪出 B、C 罐滾動總時間與水—罐質量比關係圖，並與 A 罐作比較。
3. 將 B、C 罐滾動總時間與水—罐質量比關係圖與 A 罐滾動總時間與水—罐質量比關係圖換成滾動總時間和容積比的關係圖。
4. 利用每個罐子不同水—罐質量比的 s-t 圖與本身空罐的 s-t 圖做比較，找出兩圖的交叉點，做繪出交叉點時間與水佔罐子總容積的關係圖，並將 A、B、C 罐進行比較。

實驗三

1. 將實驗一中的 A 罐換成 B 罐，將水替換成乙二醇，並依照實驗一的步驟作相同的實驗。
2. 繪出 B 罐滾動總時間與乙二醇—罐質量比關係圖，並與 B 罐之滾動總時間與水—罐質量比關係圖作比較。

實驗四

1. 在 B 罐中裝入滾動時間最長的水量。
2. 將 B 罐放置於發射器上，調整感測器使其測量到罐子初始位置為 **0.2m**。
3. 每次使 B 罐靜止釋放前都須讓罐子在軌道上靜置約 1 分鐘，以確保罐內的水已無晃動。
4. 將 B 罐釋放後利用攝影機從側邊進行跟拍。
5. 重複步驟 2~4 五次。
6. 將裝入的水量改成與空罐滾落總時間相同者及總容積之一半，重複步驟 2~5。
7. 用乙二醇替代水，重複步驟 2~6。

四、實驗方法

在每一次的滾動中，我們利用 PASCO 運動感測器紀錄罐子由軌道上滾下後位置隨時間的變化，經圖形精靈(Xplorer)作數據的篩選後紀錄滾動距離 1.4m 所經過的總時間 T。PASCO 運動感測器測位置的頻率為 100Hz，藉此得到罐子滾下時每隔 0.01 秒的位置變化，作出位置-時間(s-t)關係圖。再利用每隔五個數據點算出其平均速度，做出速度-時間(v-t)關係圖。

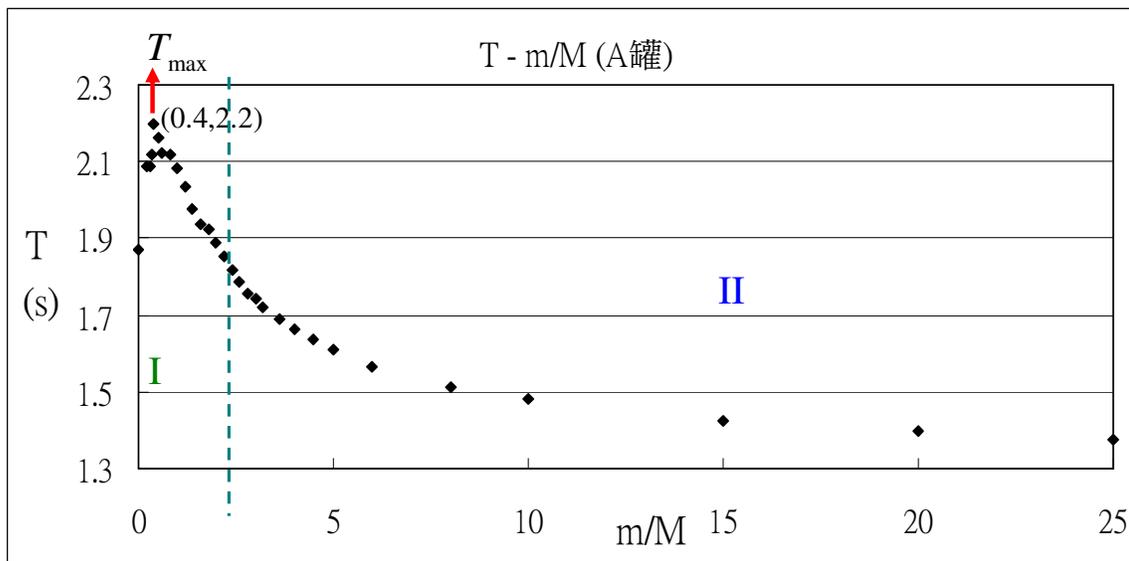
每一次的實驗中，由空罐開始實驗，再以水質量(m)與空罐質量(M)比值 $\frac{m}{M}$ 為準，以每次 $\frac{m}{M}$ 值增加 0.2 的方式逐漸加水，每種 $\frac{m}{M}$ 值實驗七次(包括空罐)，七組中取五組分析(確保去除嚴重誤差後有足夠數據)。以平均方式得到滾動含有此 $\frac{m}{M}$ 值的含水罐之滾動時間(T)。再做出 T 與 $\frac{m}{M}$ 關係圖，即 T- $\frac{m}{M}$ 圖並分析。最後將每種罐子的各種圖表作對比分析，試找出影響因素。

實驗二中，將 B、C 罐與實驗一作相同實驗，並做出 T- $\frac{m}{M}$ 圖。再利用不同水-罐質量比的 s-t 圖與本身空罐的 s-t 圖做比較，做出其交叉點與水-罐質量比。

伍、研究結果與討論

一、實驗一：

(一)滾動總時間(T)與水-罐質量($\frac{m}{M}$)比關係



由圖可看出，罐子加入少量水時，滾動總時間快速遞增，在 $\frac{m}{M} = 0.4$ 時達到最高峰，此時滾動總時間為 2.20 秒。達到滾動總時間最高峰後，滾動總時間隨 $\frac{m}{M}$ 值增加而遞減，呈一平滑曲線。當 $\frac{m}{M} = 2$ 時，A 罐之滾動總時間與空罐時的時間相近，當 $\frac{m}{M}$ 值更大時，滾動總時間逐漸穩定。

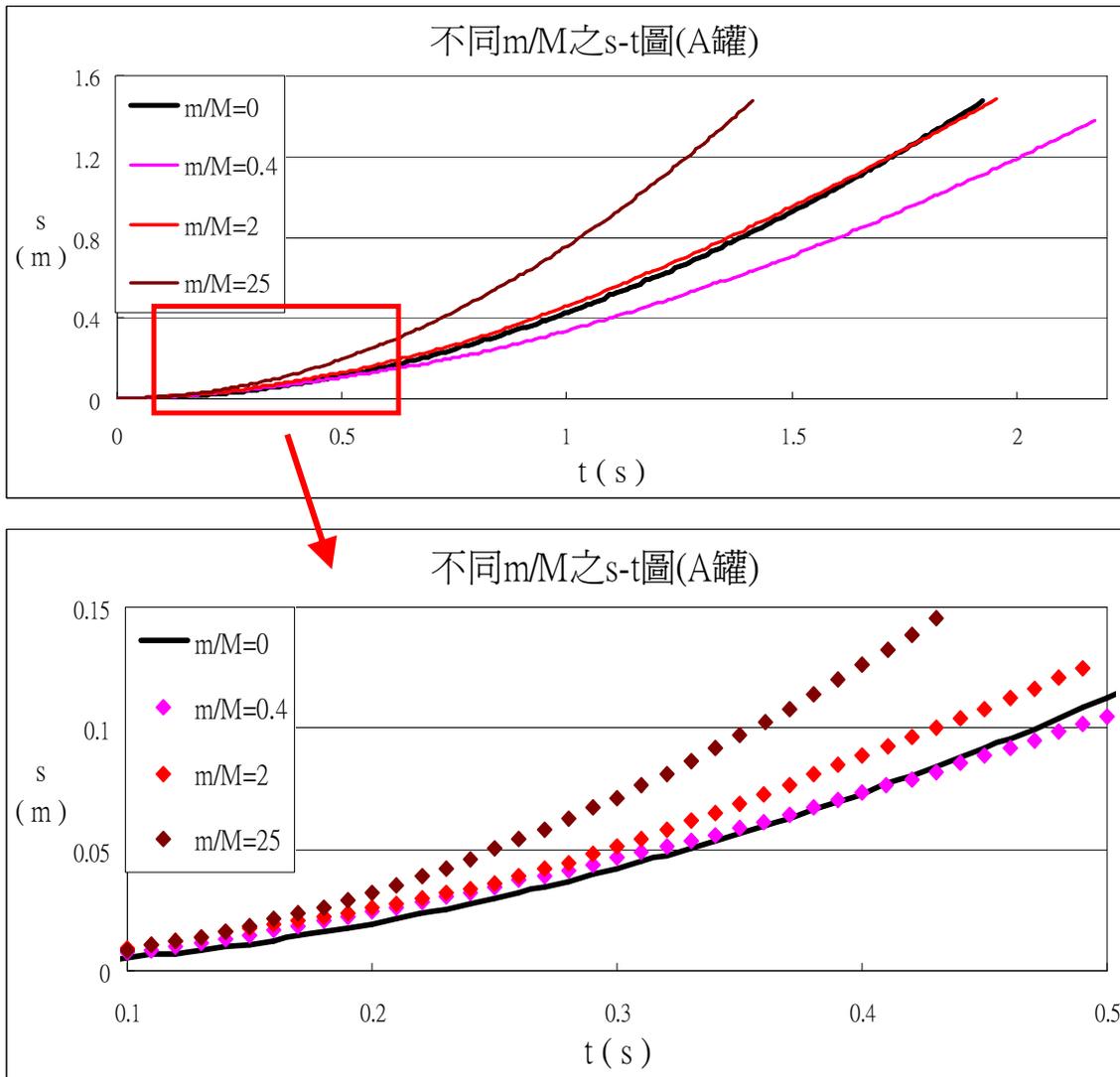
由此圖我們將含水罐滾動的情形分成二類：

- (1). 含水罐滾動總時間大於空罐滾動總時間(如上圖 I 區)
- (2). 含水罐滾動總時間小於空罐滾動總時間(如上圖 II 區)

我們將上述第一類的現象稱為“時間延遲”。

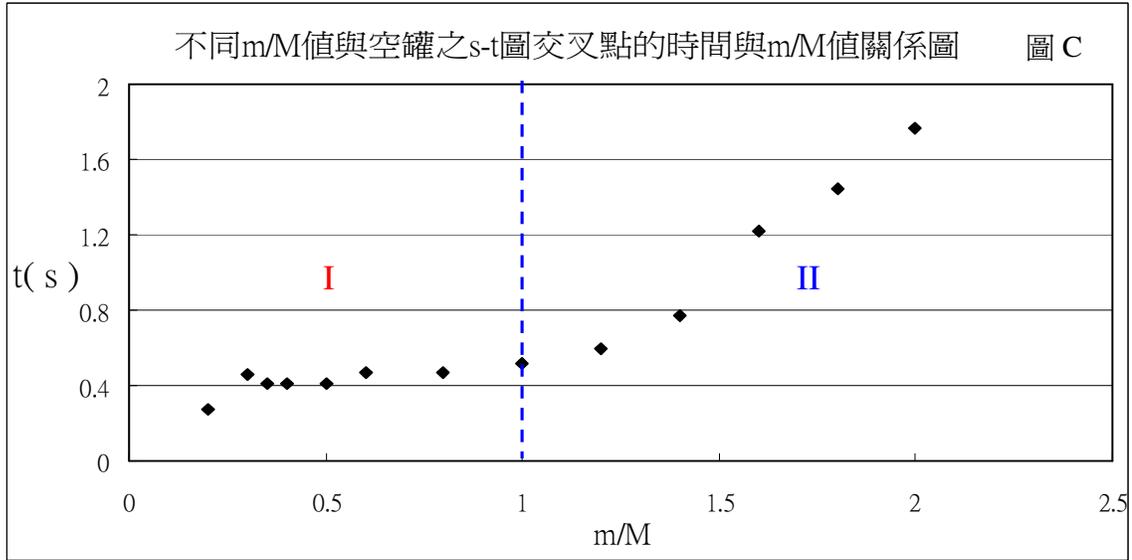
$\frac{m}{M}$	T(s)	$\frac{m}{M}$	T(s)	$\frac{m}{M}$	T(s)	$\frac{m}{M}$	T(s)
0	1.87	1	2.08	2.6	1.79	6	1.57
0.2	2.09	1.2	2.03	2.8	1.76	8	1.51
0.3	2.09	1.4	1.98	3	1.74	10	1.48
0.35	2.12	1.6	1.94	3.2	1.72	15	1.42
0.4	2.20	1.8	1.92	3.6	1.69	20	1.40
0.5	2.16	2	1.89	4	1.66	25	1.37
0.6	2.12	2.2	1.85	4.5	1.64		
0.8	2.12	2.4	1.82	5	1.61		

(二)位置(s)時間(t)關係



$\frac{m}{M}$ 比值不同的罐子，由靜止釋放滾下後作出的位置隨時間關係圖(s-t 圖)皆為平滑曲線，經由曲線迴歸後發現其皆屬於二次曲線，相關係數約均為 0.999。但將不同 $\frac{m}{M}$ 比值的 s-t 曲線放在同一張圖比較，我們發現：

- (1) 雖然空罐的滾動總時間不是最長，但開始滾動時，空罐的速率最慢。
- (2) 圖 B 為圖 A 中紅色方框的放大圖，其顯示 $\frac{m}{M} < 2$ 時，在開始滾動後會逐漸被空罐追上。(圖 B 中的曲線交叉點)
- (3) 分析不同交叉的時間點與 $\frac{m}{M}$ 值之關係，如圖 C 所示，發現其與空罐交叉的時間點隨 $\frac{m}{M}$ 值越大而越長，在下圖 I 區，在 $\frac{m}{M} < 1$ 時，交叉的時間點變化不大，但在下圖 II 區，在 $\frac{m}{M} > 1$ 後，交叉的時間點快速增長。

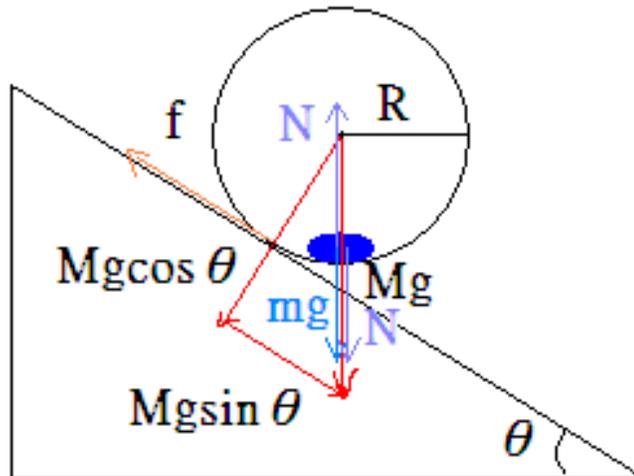


討論：

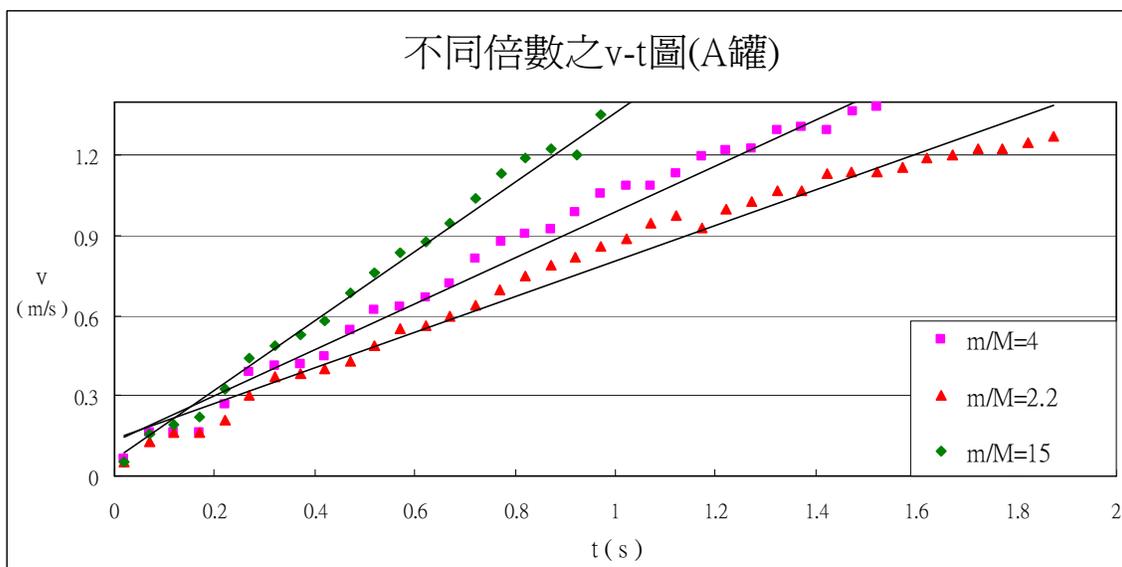
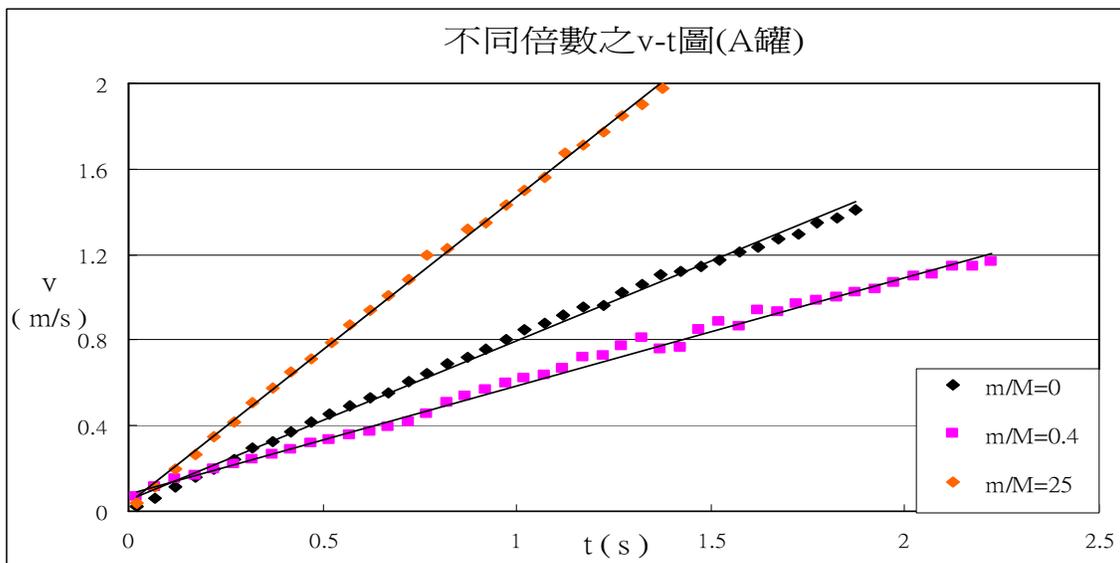
由上述結果可知，空罐一開始加速度最小。我們認為剛釋放罐子時，不論含水量為多少，一開始水皆施予罐子向前滾的力矩(順時針方向)。水因為本身的慣性和黏滯性而向後，使作用的力矩改變，一開始向前的作用減弱甚至形成反向力矩。

推測水在罐中會作來回的振盪，若假想為簡諧運動，其平衡點的位置會因為水的慣性及黏滯力而改變。若平衡點在罐子與軌道接觸點前方，則平均作用使罐子變快，若在後方則使罐子變慢。

$\frac{m}{M} < 1$ 時，水的質量小，平衡點很快就被帶至罐子與軌道接觸點後方。當水量越多，因黏滯力的作用而越慢移動平衡點。在 $\frac{m}{M} > 2$ 時，其和空罐在 s-t 圖中已無交點，表示此時，水的平衡點皆在罐子與軌道接觸點前方。



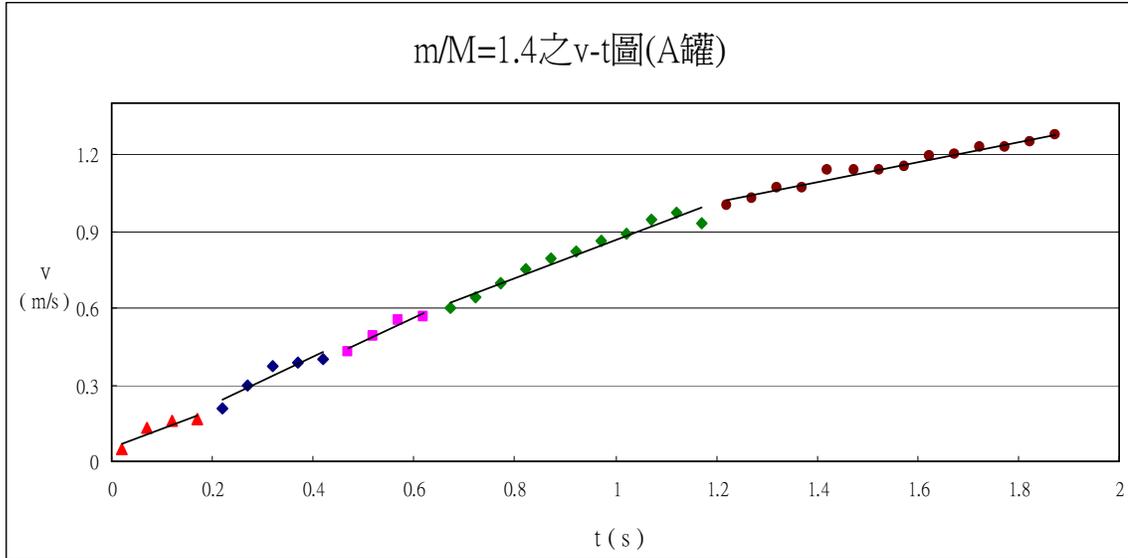
(三)速度-時間(v-t)關係



在所有的 v-t 圖中，我們可觀察到兩種現象：

- (1) 其圖形大致呈線性。例如空罐、 $\frac{m}{M} = 0.4$ 與 $\frac{m}{M}$ 值在 15 至 25 之間均呈現此一現象。
- (2) 其圖形呈波動狀，對其作線性迴歸後得到 v-t 圖的平均斜率，v-t 圖曲線在平均斜率上呈上下波動。例如 $\frac{m}{M}$ 值在 0.2 至 15 之間（除 0.4 外）。

詳細觀察上述第二種 v-t 圖現象，將各種 $\frac{m}{M}$ 比例的 v-t 圖相比較，均有相近的波動行為。將 v-t 圖分段做平均斜率，發現平均斜率隨 t 越大而越小，此現象在 $\frac{m}{M} > 10$ 以後並不明顯。此外，在不同質量比例下，其第一波動的斜率則隨 $\frac{m}{M}$ 越大而越大。如下圖所示，為 $\frac{m}{M} = 1.4$ 之 v-t 圖，可清楚看出上述之說明。



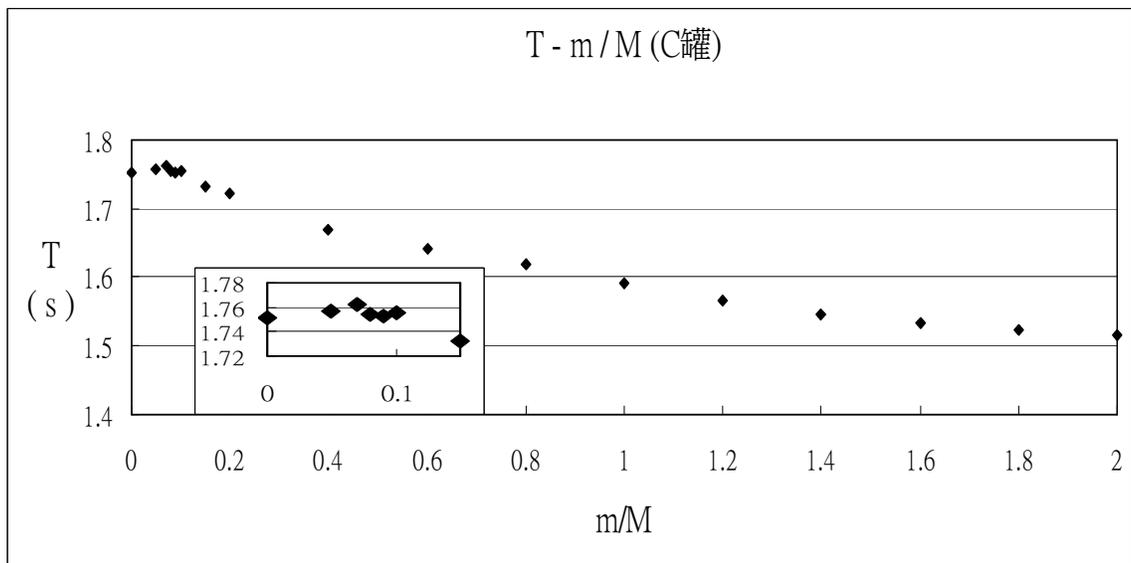
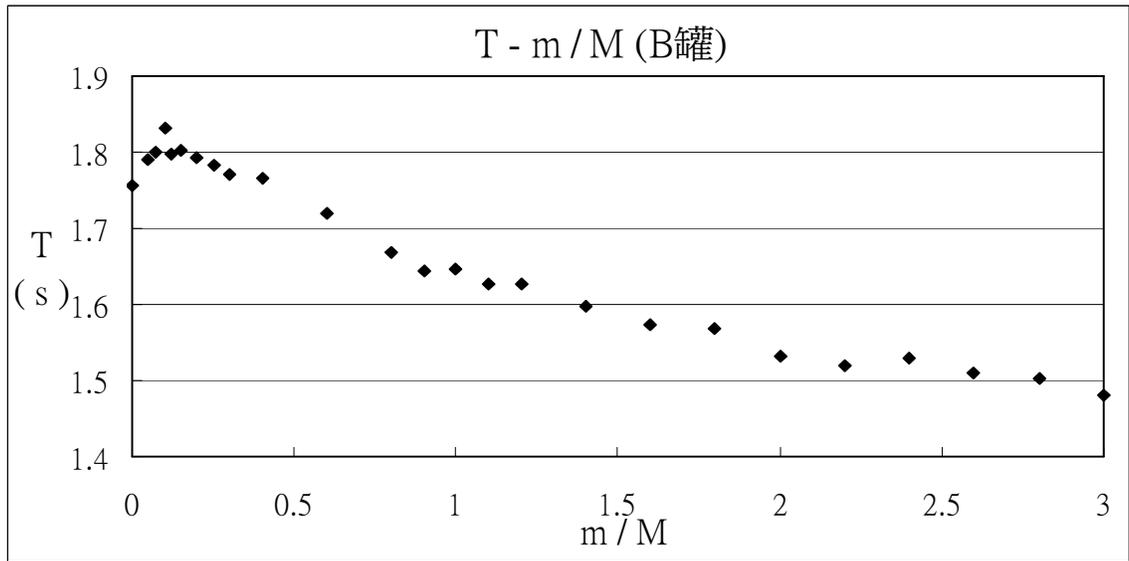
討論：

從 v - t 圖的晃動我們得知水在罐子中有晃動的現象，此晃動造成水的正向力對罐子的作用點不斷改變，產生不同大小且不同方向的力矩(以罐子與軌道接觸點為支點)。波長隨時間越長而越長表示此晃動頻率越來越慢。

將 v - t 圖分段做平均斜率，平均斜率隨 t 越大而越小，表示加速度有逐漸變慢的趨勢，以罐子作為座標系，可將水珠的晃動類比為單擺，罐子加速度隨時間下降，表水珠受到的等效重力場變小，又晃動頻率平方與等效重力場成正比，故晃動頻率越來越慢。第一波動行為類似表示不論水量如何，其一開始的作用相似，不過水量越多此作用越強。加速度逐漸變慢的趨勢，表示水晃動的平衡位置不斷向後，平均作用使得罐子加速度更小。

二、實驗二：

(一) B、C 罐滾動總時間(T)與 $\frac{m}{M}$ 關係



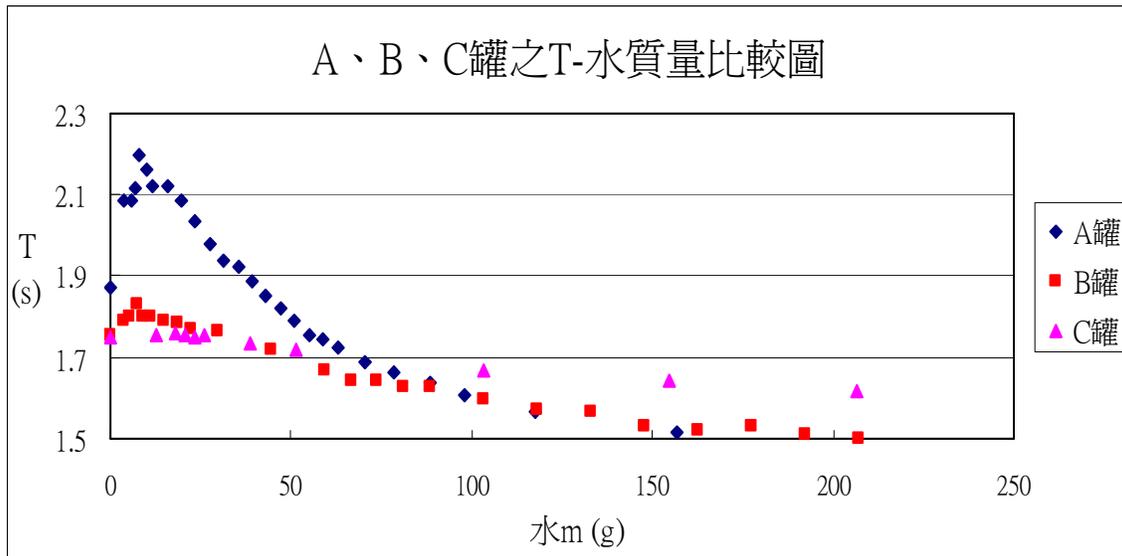
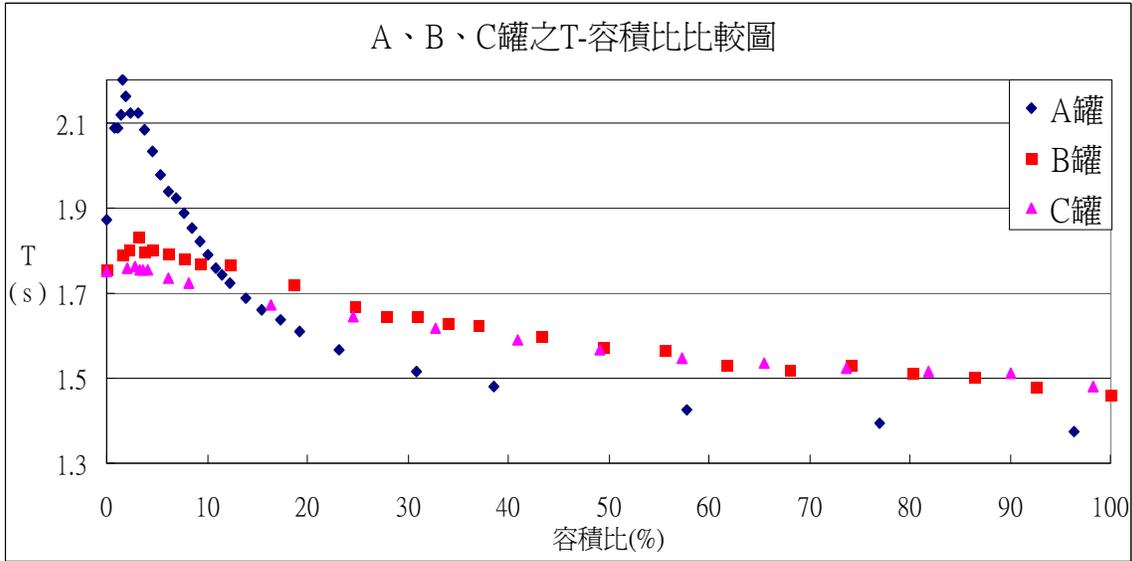
由圖可看出 B、C 罐子 T 隨 $\frac{m}{M}$ 值變化與 A 罐類似，皆有滾動總時間先遞增後遞減至平穩狀態。但是：

- (1) B、C 罐其滾動總時間變化並不明顯，尤其是 C 罐。
- (2) A、B、C 罐子出現最大滾動總時間的 $\frac{m}{M}$ 值分別為 0.4、0.1、0.01。

討論：

因為 B、C 空罐的質量較大，尤其 C 罐，故水的影響相對不顯著。

(二)A、B、C 罐 T 與水容積比關係



我們換做滾動總時間與水佔總容積的關係圖，我們發現三個罐子出現滾動時間最大值的水量佔總容積比例各為：A 罐 1.5%、B 罐 3.1%、C 罐 2.9%，三個罐子的比例極為相似。

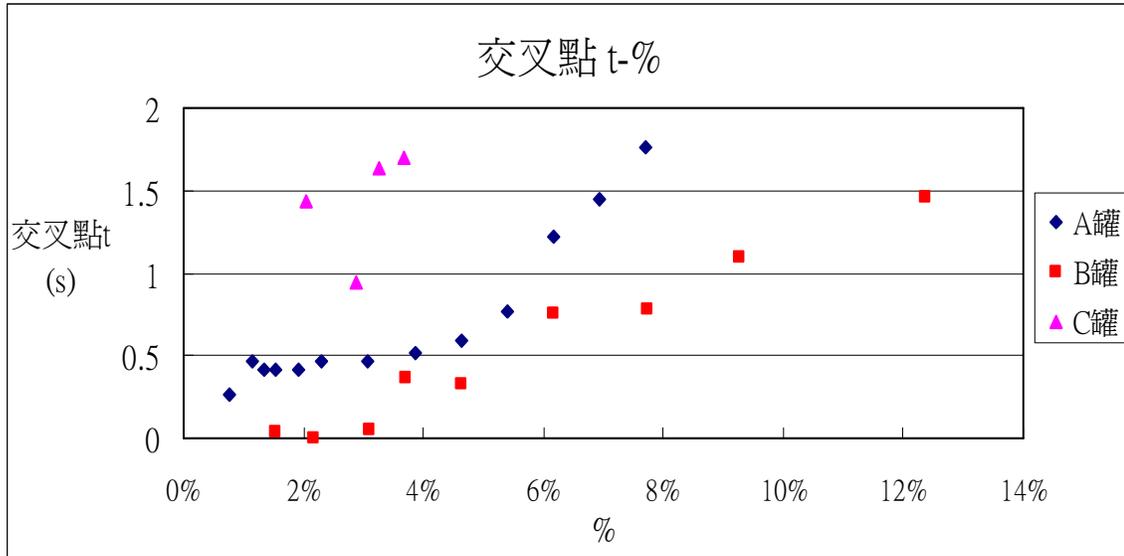
在 $T - \frac{m}{M}$ 圖中，各罐子出現滾動總時間最高峰的水量皆不同，且滾動總時間與空罐相同的罐子所含水量也不相同。

討論：

水對罐子的作用不只與水的質量有關，與罐子的質量、容積皆有關係。C 罐時間延遲現象之所以不明顯，是因為 C 罐質量過大，水的影響相對減少。

(三) B、C 罐位置-時間(s-t)關係

B、C 罐的實驗中，每個 $\frac{m}{M}$ 值的含水罐使其靜止滾動後做出的 s-t 圖皆為平滑曲線，經由二次曲線迴歸後發現其皆屬於二次曲線，最小平方差皆在 0.999 以上。在 B、C 罐中，若將滾動總時間高於空罐的含水罐和空罐比較 s-t 圖，也會出現如 A 罐 s-t 圖交叉的現象。下圖為 A、B、C 各不同 $\frac{m}{M}$ 值的 s-t 圖交叉點時間與水佔罐子總容積的比較關係，此關係圖中，A、B、C 罐有相似的趨勢，從 0% 至 3% 之間先少許下降後平穩，3% 之後隨水佔容積增加而快速增加。



由此我們推論：

水佔總容積的比例可以類推為水在罐子的相對形狀，s-t 圖交叉點時間與水佔罐子總容積的比較關係趨勢在三種罐子中類似，表示水的影響與水與罐子的相對形狀有關。

(四) B、C 罐速度-時間(v-t)關係

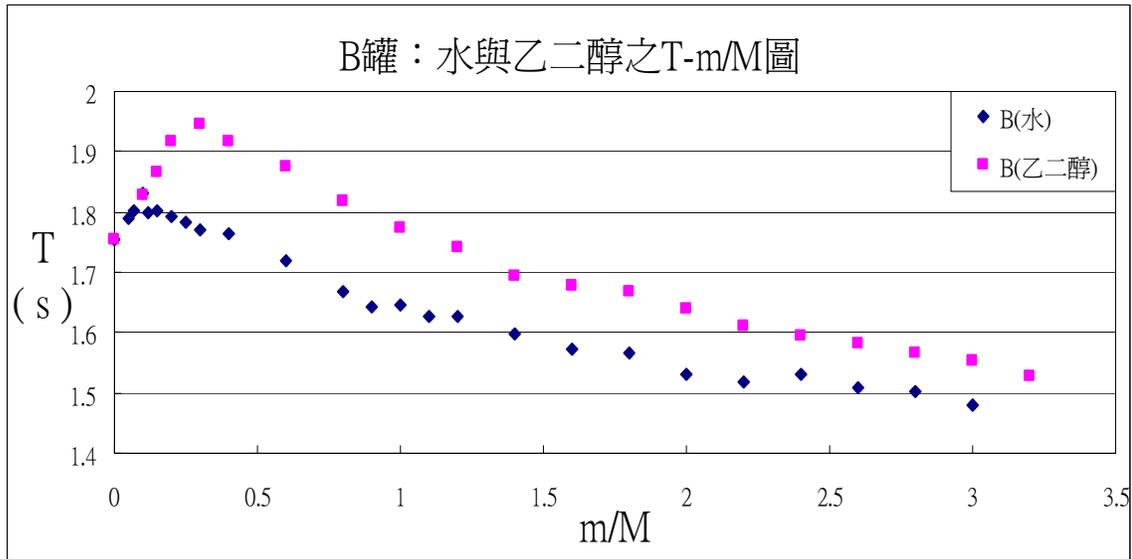
B、C 罐的 v-t 圖的晃動現象較不明顯，B 罐只有在 $\frac{m}{M}$ 值為 1 至 1.8 之間 v-t 圖有晃動現象，換成水佔罐子總容積比例為 31% 至 51%，C 罐則幾乎沒有此現象。A 罐的 v-t 圖晃動現象出現在水佔罐子總容積比例為 1% 至 59%。

討論：

B 罐的 v-t 圖在水量佔總容積比 31% 至 51% 間出現晃動可能是由於此時水面寬度較大，水可以晃動的範圍較廣。具有相同水面寬但不同水量的罐子，如 30%、70%，含水量少的罐子晃動比較明顯，含水量多的罐子晃動比較不明顯，表示只有部份水會晃動，其於無晃動的水則減弱了效果。C 罐可看出，罐子質量越大，v-t 圖晃動現象越不明顯。

三、實驗三：

(一) B 罐：乙二醇與水滾動總時間(T)與 $\frac{m}{M}$ 關係



由上圖可看出：

- (1) 含乙二醇罐子與含水罐子之 $T - \frac{m}{M}$ 曲線有相同的變化趨勢，一開始 T 隨 $\frac{m}{M}$ 遞增，達到 T 最大值後， T 隨 $\frac{m}{M}$ 遞減，呈一平滑曲線。
- (2) 含乙二醇罐子中， T 之最大值較含水罐子長。
- (3) 含乙二醇罐子中，出現 T 最大值之 $\frac{m}{M} = 0.3$ ，較含水罐子大
- (4) 達到 T 最大值之前，含乙二醇罐子之與含水罐子之 $T - \frac{m}{M}$ 曲線一致
- (5) 達到 T 最大值之後，含乙二醇罐子之 T 皆大於含水罐子。

討論：

比較水與乙二醇的性質，兩者的密度比是 1 : 1.115，而黏滯係數分別為水： $8.94 \times 10^{-4} (\text{Pa}\cdot\text{s})$ 、乙二醇： $1.61 \times 10^{-2} (\text{Pa}\cdot\text{s})$ ，兩者密度接近，但乙二醇的黏滯係數約為水的 18 倍。因此推得圖中出現滾動總時間最大值的含量的差異來自於黏滯力。在含水罐及含乙二醇罐達到滾動總時間最大值之前，二者有一致的 $T - \frac{m}{M}$ 關係，表示在此時內部液體對罐子有相同的作用方式，且隨液體黏滯力越大而出現在越多的含液體量，此作用為黏滯力使液體質心移至罐子與軌道接觸點後方，施予反向的力矩使罐子滾動總時間增加，黏滯力越大表示能將越多的液體帶至罐子後方。達到滾動總時間最大值的 $\frac{m}{M}$ 值，兩者的 $T - \frac{m}{M}$ 出現類似的遞減關係。是由於此時是受到液體形成薄膜的影響，而黏滯力越大的液體所能形成的薄膜厚度越厚。

四、實驗四：

從拍攝的影片中，我們發現水及乙二醇在滾動罐子中有兩種行為：

(一)晃動現象。

- (1) 水和乙二醇皆會出現晃動現象
- (2) 水晃動較乙二醇明顯
- (3) 液體含量少時，晃動現象不明顯
- (4) 罐中的水或乙二醇並非全部都在晃動，只有表層晃動
- (5) 晃動振幅的大小隨著滾落時間增加而漸減

(二)形成薄膜

- (1) 水和乙二醇皆會在罐壁形成薄膜



(水 $\frac{m}{M}$: 0.1)



(乙二醇 $\frac{m}{M}$: 0.2)

- (2) 乙二醇形成的薄膜較水厚

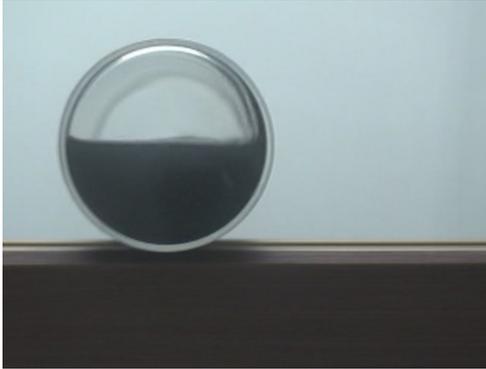


(水 $\frac{m}{M}$: 1.6)

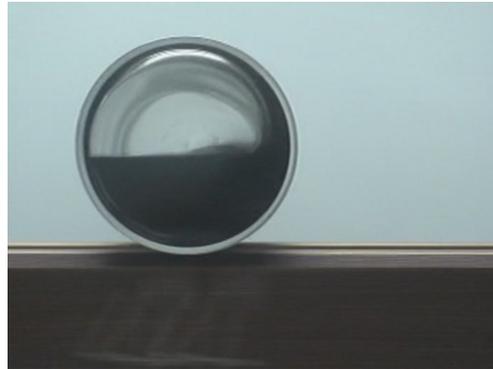


(乙二醇 $\frac{m}{M}$: 1.8)

(3) 罐中只有部分液體會形成薄膜



(水 $\frac{m}{M}$: 1.6)



(乙二醇 $\frac{m}{M}$: 1.8)

(4) 薄膜的厚度皆不均勻



(水 $\frac{m}{M}$: 0.4)



(乙二醇 $\frac{m}{M}$: 1.2)

(5) 同樣液體形成的薄膜在不同的 $\frac{m}{M}$ 中類似



(水 $\frac{m}{M}$: 0.1)



(乙二醇 $\frac{m}{M}$: 0.2)

陸、模型模擬

由上述實驗結果與討論我們推想了幾種模型去模擬水和罐子由靜止釋放滾動的運動情形。

(一)模型一：

假設水沒有黏滯性，且水不會變形、無晃動，模型如右下圖。

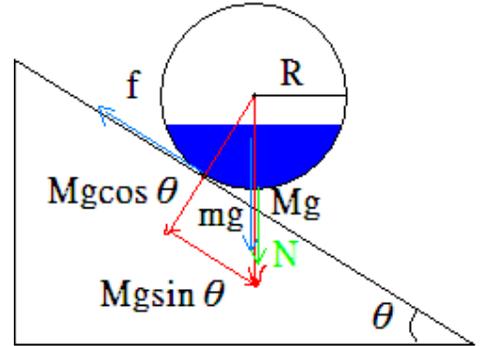
根據力學能守恆：

$$m_{\text{總}} gh = \frac{1}{2} m_{\text{總}} v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

其中 $m_{\text{總}} = m + M$ m ：水質量 M ：空罐質量

兩邊微分可得：

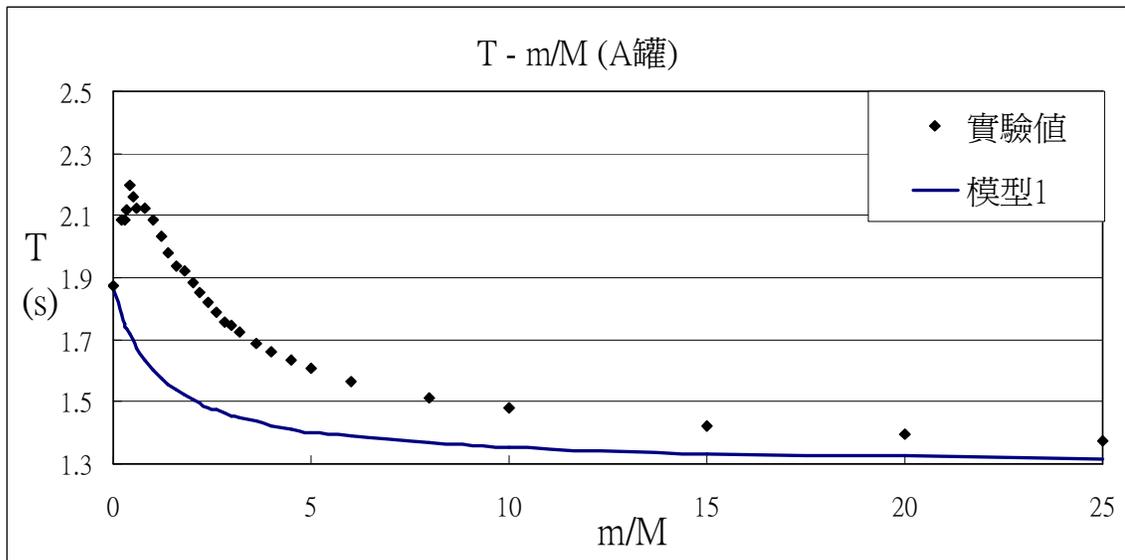
$$a = \frac{m_{\text{總}} g \sin \theta}{\left(m_{\text{總}} + \frac{I}{R^2}\right)}$$

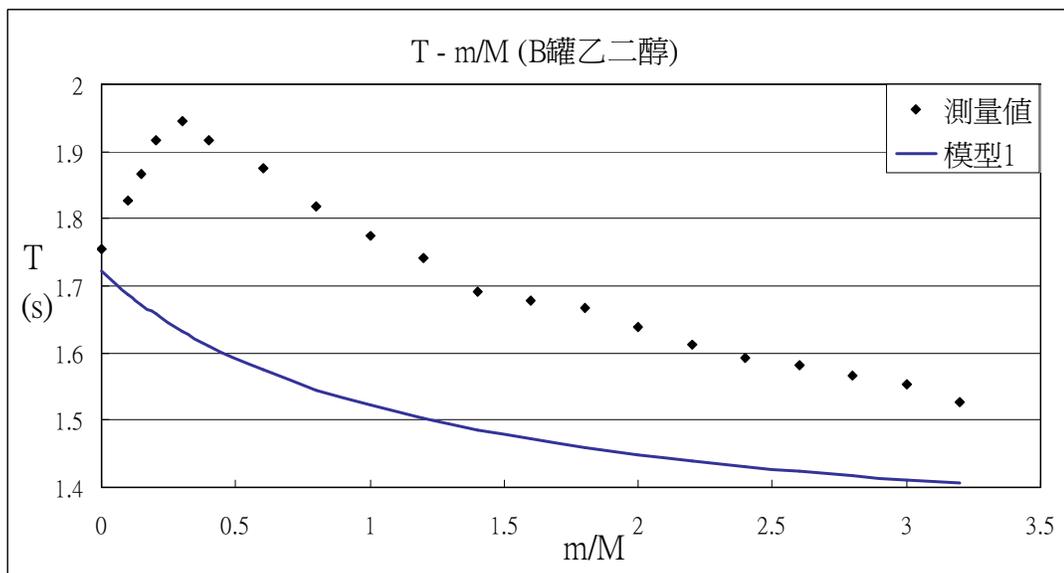
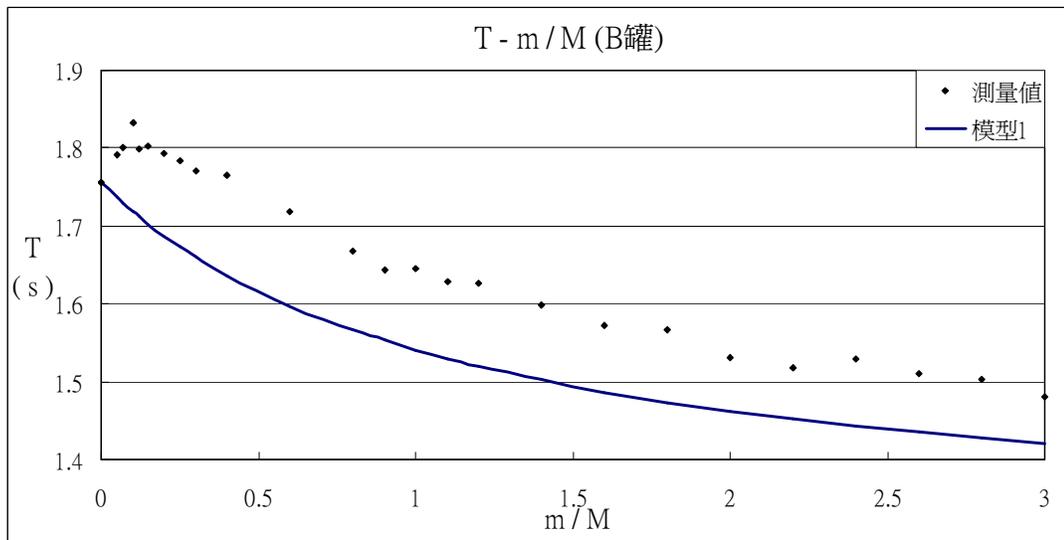


滾動總時間 $T = \sqrt{\frac{2s(m_{\text{總}} + \frac{I}{R^2})}{m_{\text{總}} g \sin \theta}}$

S：滾動距離

由上式作 T 與 $\frac{m}{M}$ 的關係圖如下：





由上圖中可看出模型曲線的趨勢與實驗中 $\frac{m}{M} > 2$ 的罐子相似，隨罐子含水量越多，模擬的曲線與實驗值越相近。但是在模型中沒有出現含水量少時滾動總時間延長的情況，且模擬出的時間皆比實驗值低。

推論：

在此模型中，我們沒有考慮水的滾動及水的黏滯力的影響。罐子含水量越多時，滾動行為愈趨近此模型。罐子在 $\frac{m}{M} > 2$ 時，水對罐子的主要作用力類似固定方向及大小的正向力。

(二)模型二：

當罐子滾動時，假設全部的水會形成均勻圓柱厚水膜固定在罐子內壁，並與罐子一起滾動，模型如右下圖。

根據力學能守恆：

$$m_{\text{總}}gh = \frac{1}{2}m_{\text{總}}v^2 + \frac{1}{2}(I_1 + I_2)\omega^2$$

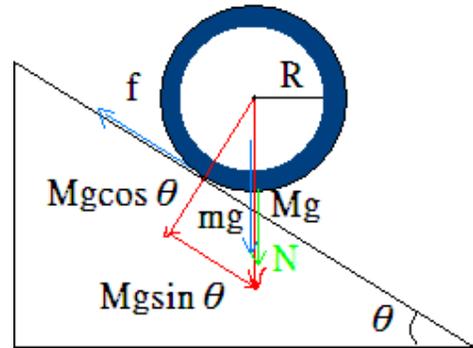
兩邊微分可得：

$$a = \frac{m_{\text{總}}g \sin \theta}{(m_{\text{總}} + \frac{I_1 + I_2}{R^2})}$$

其中

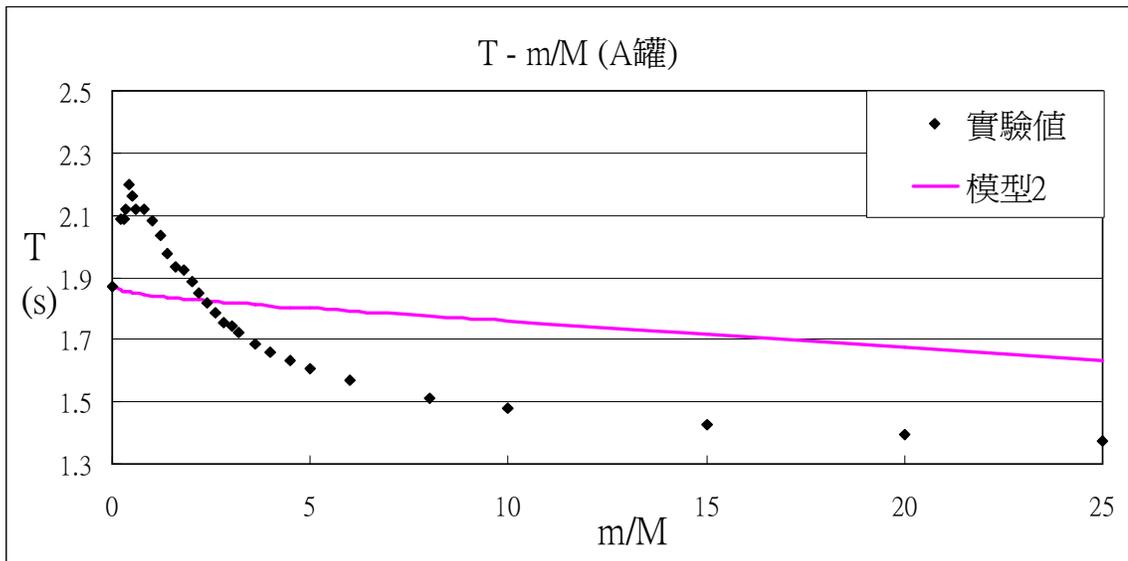
I_1 ：空罐以其中心軸為軸的轉動慣量

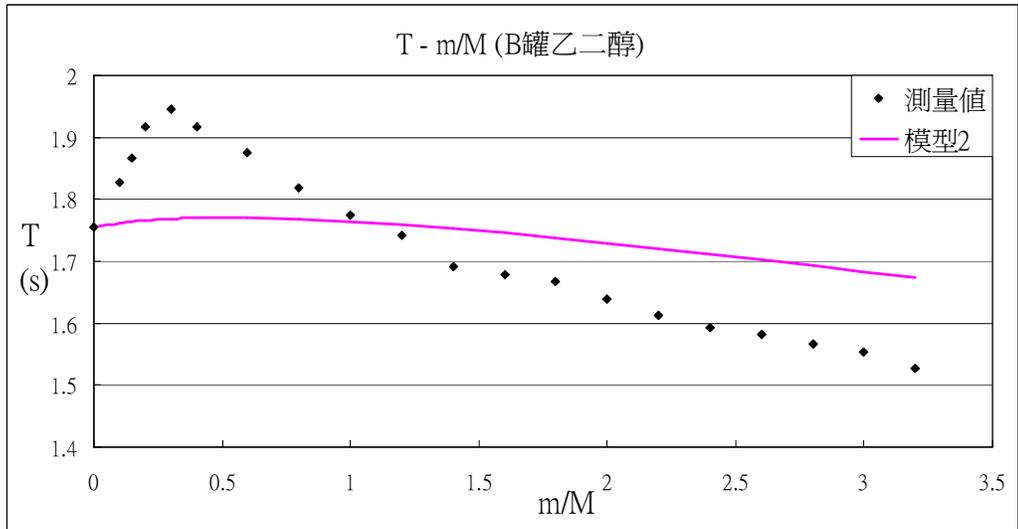
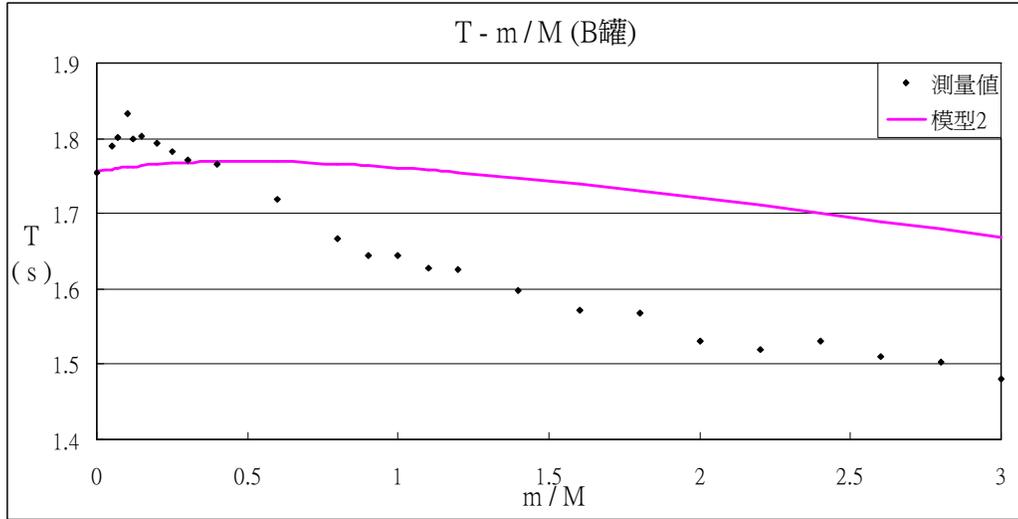
I_2 ：均勻圓柱厚水膜以其中心軸為軸的轉動慣量



$$T = \sqrt{\frac{2s(m_{\text{總}} + \frac{I_1 + I_2}{R^2})}{m_{\text{總}}g \sin \theta}}$$

由上式作 T 與 $\frac{m}{M}$ 的關係圖如下：





由上圖可看出模型二的曲線相較於模型一滾動總時間增加。但在含少量水的罐中數值小於實驗值，而在 $\frac{m}{M}$ 值較大時，有與實驗值相同的變化趨勢，但時間過大。

推論：

在此模型中，我們可以看出水跟著罐子滾動造成的影響，可得知水膜形成確實會造成時間延長。但全部的水形成圓柱厚水膜，不是水量少時造成滾動總時間劇增的主因。且並非全部的水均形成圓柱厚水膜。

(三)模型三：

由於討論過模型一、二模擬的結果，我們結合罐內水的平移及滾動兩項因素建立模型三。

當罐子滾動時，部分的水會形成均勻圓柱薄水膜固定在罐子內壁，並與罐子一起滾動，模型如右下圖。此模型把水膜的影響考慮進去，可由實驗觀察推測水膜厚度。已知水膜越厚則滾動總時間越長，曲線上移，藉由實驗四中觀察推測的水膜厚度代入模型。

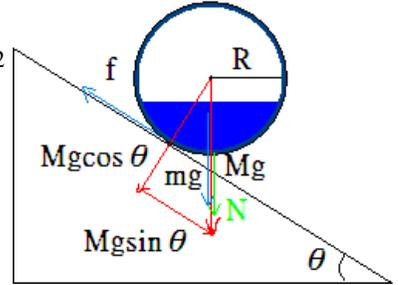
根據力學能守恆：
$$m_{\text{總}}gh = \frac{1}{2}m_{\text{總}}v^2 + \frac{1}{2}(I_1 + I_2)\omega^2$$

兩邊微分可得：
$$a = \frac{m_{\text{總}} g \sin \theta}{(m_{\text{總}} + \frac{I_1 + I_2}{R^2})}$$

其中

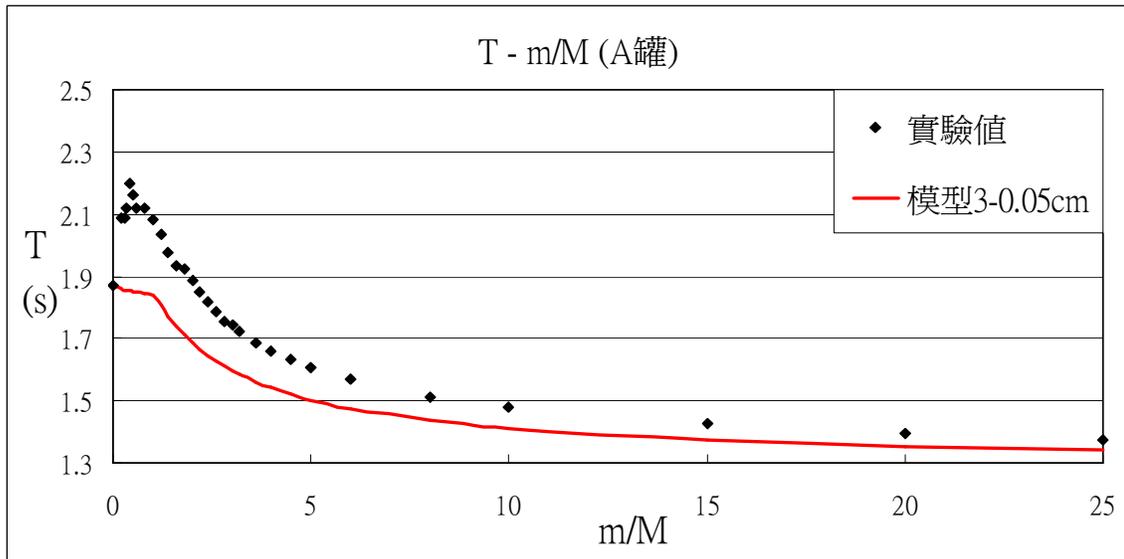
I_1 ：空罐以其中心軸為軸的轉動慣量

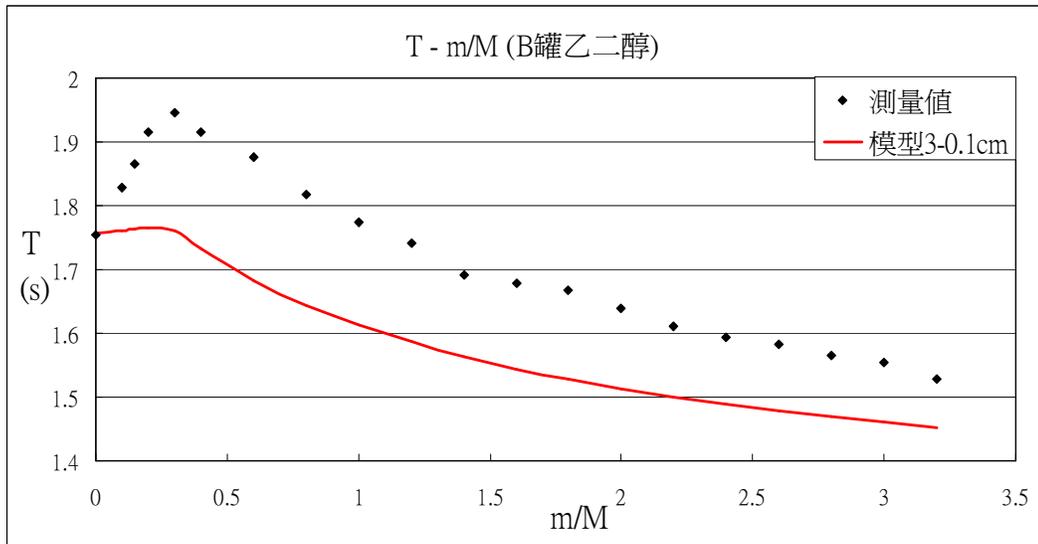
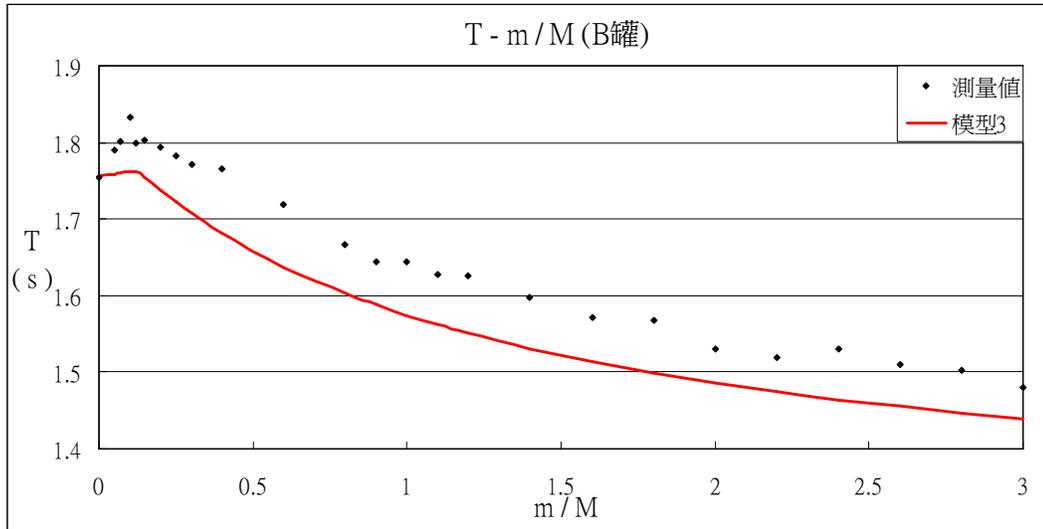
I_2 ：均勻圓柱薄水膜以其中心軸為軸的轉動慣量



$$T = \sqrt{\frac{2s(m_{\text{總}} + \frac{I_1 + I_2}{R^2})}{m_{\text{總}} g \sin \theta}}$$

由上式作 T 與 $\frac{m}{M}$ 的關係圖如下：





我們以實驗四中觀察推測的薄水膜厚度代入模型，即水膜厚度為 0.05cm。相較於模型二，模型三可以模擬出含水量較大時罐子的滾動情形；相較於模型一，在罐子含有少許水量時可模擬出滾動總時間上升的現象，但不像實驗值中般明顯增加。

推論：

在 $\frac{m}{M}$ 較大時，水在罐子中的作用為形成圓柱薄水膜及施予罐子固定方向、大小的正向力。但在 $\frac{m}{M}$ 較小時，形成圓柱薄水膜無法使滾動總時間驟增，可能還有其他的作用存在，例如水在罐子中前後晃動或黏滯力的影響。

(四)模型四：

假設水有黏滯性，水因黏滯力形成水塊，相對罐子中心靜止。且水不會變形、無晃動，模型如右下圖。其中 α 為水質心—罐子圓心連線與鉛垂線的夾角，由實驗四觀察決定。 F 為水和罐子間的黏滯力。

因水的位置固定，故在以罐子為加速座標系中，水有以下靜力平衡關係：

$$F = mg \sin \alpha - ma \cos(\alpha - \theta)$$

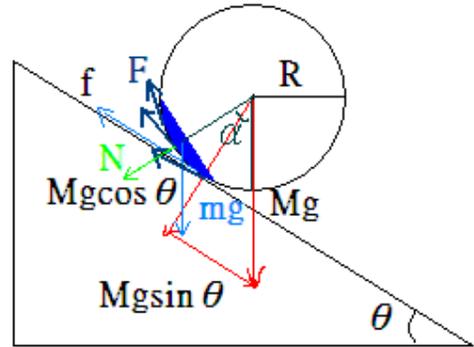
根據力學能守恆：

$$m_{\text{總}} gh = \frac{1}{2} m_{\text{總}} v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 + Fs$$

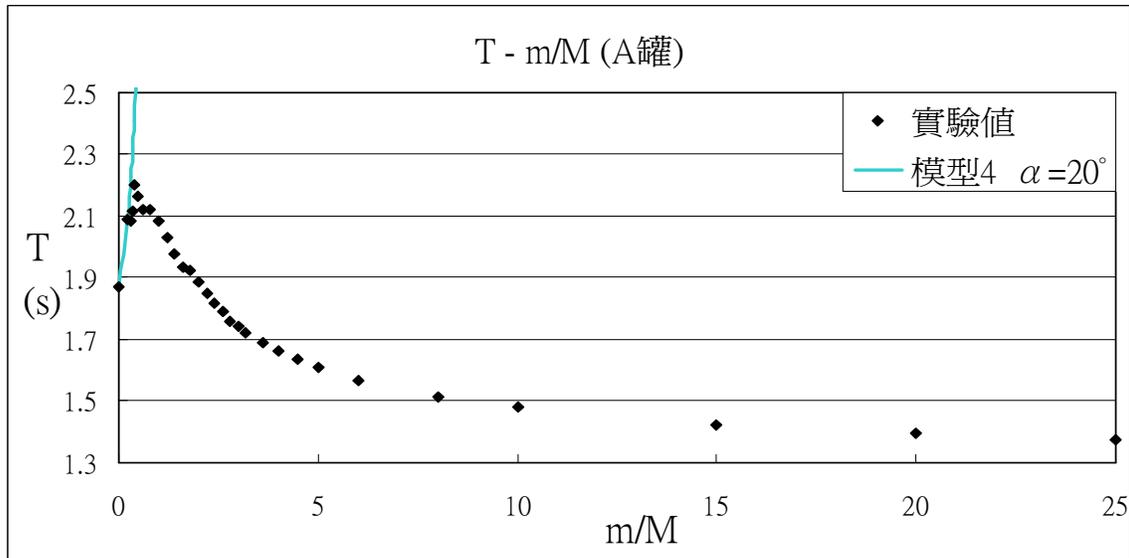
其中 $m_{\text{總}} = m + M$ m ：水質量 M ：空罐質量
兩邊微分可得：

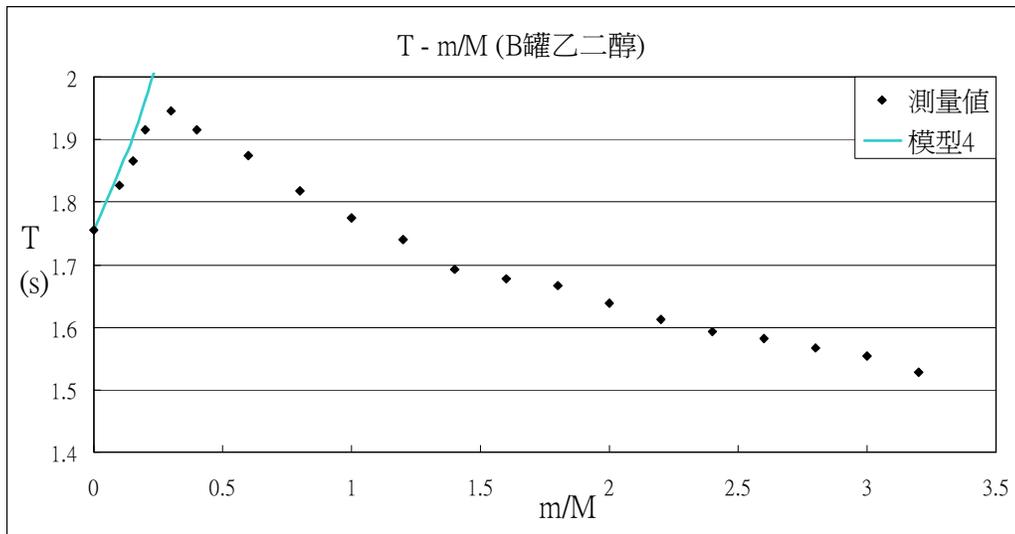
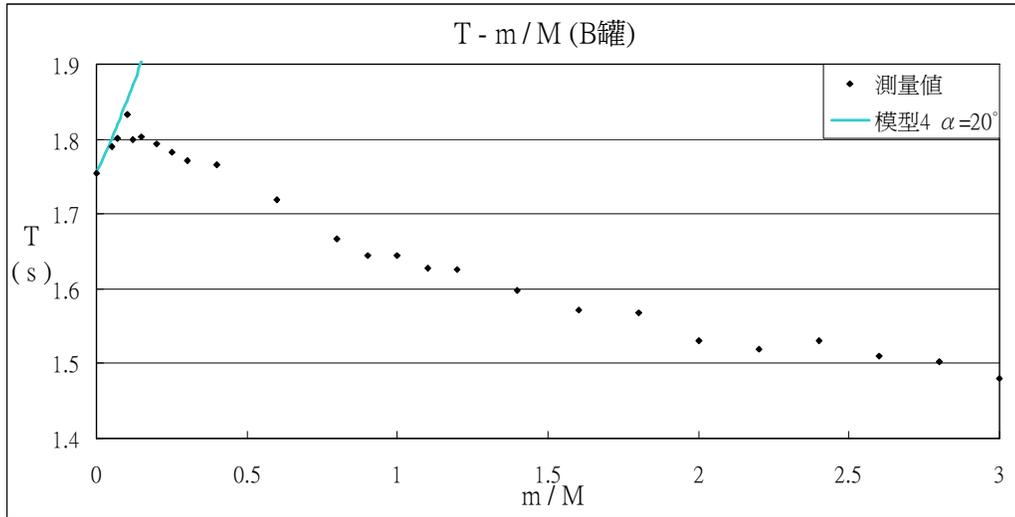
$$a = \frac{m_{\text{總}} g \sin \theta - mg \sin \alpha}{[m_{\text{總}} + \frac{I}{R^2} - m \cos(\alpha - \theta)]}$$

$$\text{滾動總時間 } T = \sqrt{\frac{2s[m_{\text{總}} + \frac{I}{R^2} - m \cos(\alpha - \theta)]}{m_{\text{總}} g \sin \theta - mg \sin \alpha}} \quad S: \text{滾動距離}$$



由上式作 T 與 $\frac{m}{M}$ 的關係圖如下：





由上圖中可看出，若水停留在罐子的固定位置上，滾落一定距離的總時間會明顯受影響。在 $\alpha = 20^\circ$ 的情形下，少水量時滾落總時間劇增，與實驗中的情形相似。但水量多時，則會出現罐子無法滾落的不合理現象。

推論：

在此模型中，我們得知水在罐子中的位置會影響罐子滾落的總時間，由實驗四我們認為少水量時 $\alpha = 20^\circ$ 是合理的。當水量大時，水滯留在後方的晃動則不明顯，或幾乎沒有移動。而此模型中，黏滯力 F 會隨 α 及總水量而改變，無法得知黏滯力確切的影響。

(五)模型五：

假設水有黏滯性，水和罐子間有黏滯力作用，且水不會變形、無晃動、部分水形成水塊並相對罐子中心靜止、另一部分形成一薄膜隨罐子滾，模型如右下圖。其中 α 為水質心—罐子圓心連線與鉛垂線的夾角， F 為水和罐子間的黏滯力。我們假設水會形成水塊，故接觸面積 A 為罐子靜止時，水與罐子的接觸面積。因水塊相對罐子中心靜止，設 ΔV 為罐子之平均速度， ΔZ 為薄膜厚度。而薄膜厚度則由實驗四觀察得知。

根據流體力學：

$$F = \eta A \frac{\Delta V}{\Delta Z}$$

η ：黏滯係數

A ：接觸面積

$\frac{\Delta V}{\Delta Z}$ ：速度梯度

根據力學能守恆：

$$m_{\text{總}}gh = \frac{1}{2}m_{\text{總}}v^2 + \frac{1}{2}(I_1 + I_2)\omega^2 + Fs$$

其中

$m_{\text{總}} = m + M$ m ：水質量 M ：空罐質量

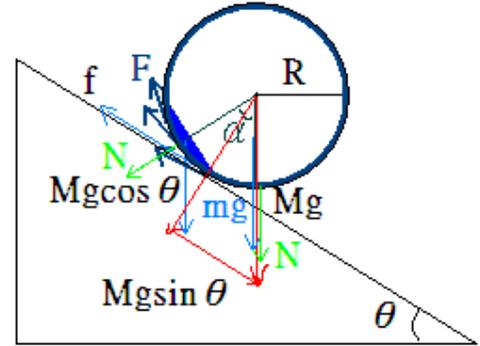
I_1 ：空罐以其中心軸為軸的轉動慣量

I_2 ：均勻圓柱薄水膜以其中心軸為軸的轉動慣量

兩邊微分可得：

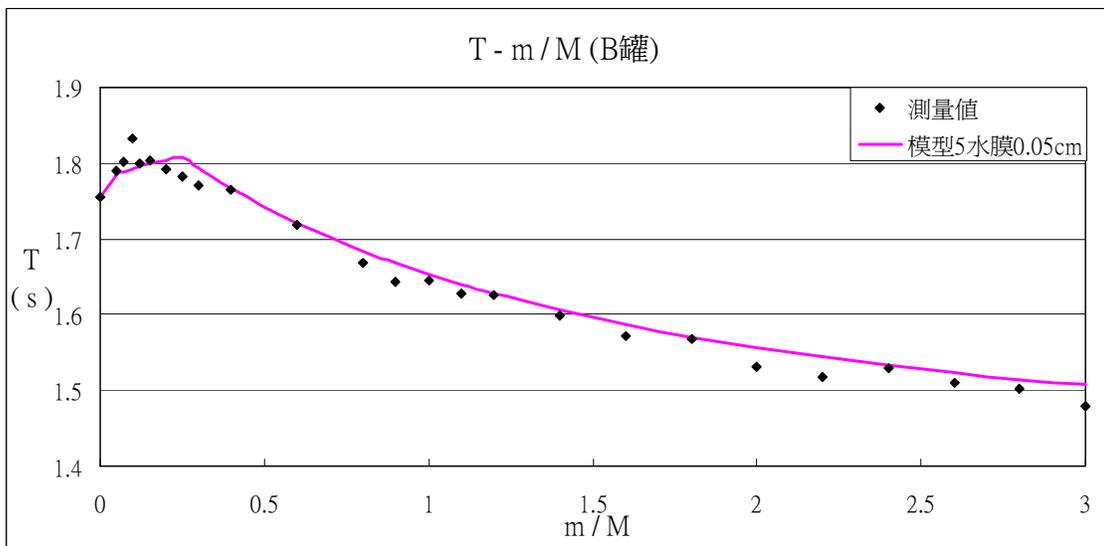
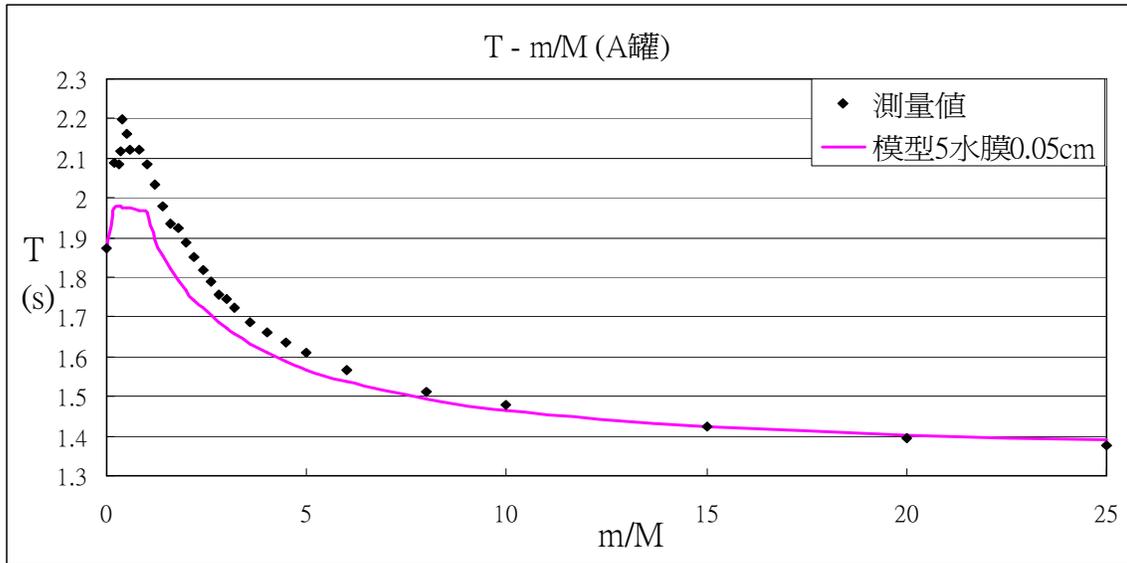
$$a = \frac{m_{\text{總}}g \sin \theta - F}{\left(m_{\text{總}} + \frac{(I_1 + I_2)}{R^2}\right)}$$

$$\text{滾動總時間 } T = \sqrt{\frac{2s\left(m_{\text{總}} + \frac{(I_1 + I_2)}{R^2}\right)}{m_{\text{總}}g \sin \theta - F}}$$



S ：滾動距離

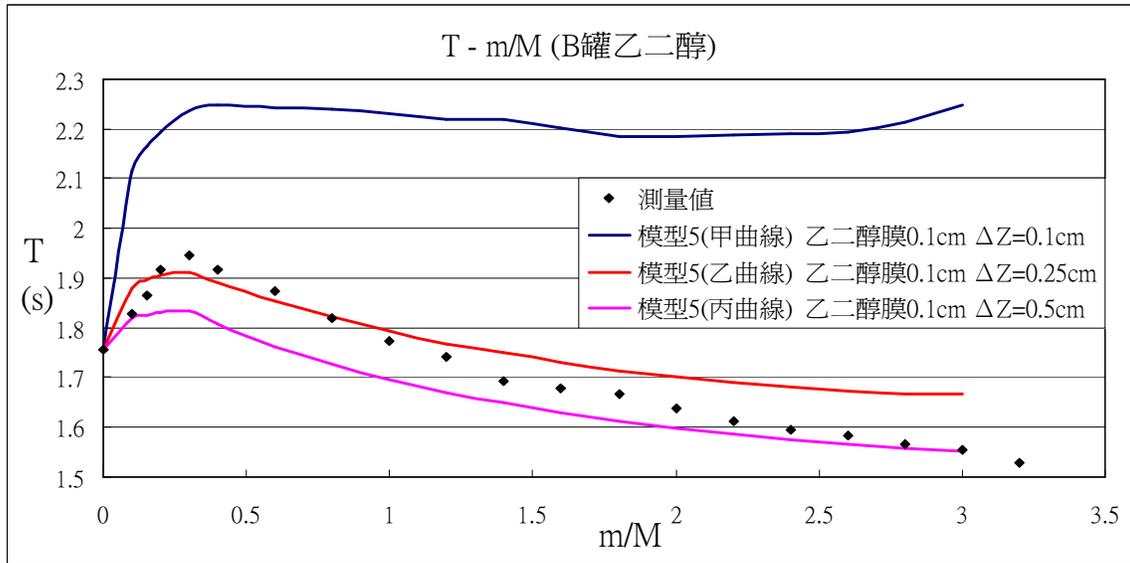
由上式作 T 與 $\frac{m}{M}$ 的關係圖如下：



由上圖中可看出，模型五可以模擬出在少水量時滾動總時間隨 $\frac{m}{M}$ 遞增而增長，但數值依然小於實驗值且無峰值出現。在多水量時，模型與實驗值有相同的變化趨勢且數值上較為吻合。

推論：

此模型等同於綜合一~四的模型，再置入黏滯力的作用，黏滯力越大，含少水量之罐子的滾動總時間大於空罐的情形越明顯。模型中黏滯力之作用面積，及水與罐子之間的速度梯度，對滾動總時間皆有明顯影響，模型預測的滾動總時間之所以小於實驗值，可能為所代入模型的接觸面積過小，或速度梯度過小而造成，黏滯力的作用方式有待深入確定。



在模擬含乙二醇之 B 罐的圖中，甲曲線的罐子含乙二醇量少時滾動總時間劇增；含乙二醇量多時，滾動總時間遠大於實驗值，且出現滾動總時間最大值後，滾動總時間隨 $\frac{m}{M}$ 下降的趨勢不明顯。但若增加速度梯度中 ΔZ 之值，如乙、丙曲線，則可以模擬出較接近實驗值的情形。

推論：

液體黏滯力中速度梯度之 ΔZ 不為薄膜厚度，應比薄膜厚度大，因此液塊在滾動的罐中不只有平移的行為，還有流動的現象，造成速度梯度。且液體在罐子中含量不同，形成之速度梯度會不相同。

柒、結論

- 一、含水罐由傾斜軌道滾下時，運動行為與空罐有相當的差異：
 - (1)其滾動總時間會隨水－罐質量比的增加而快速遞增、遞減，最後到達穩定狀態。
 - (2)在靜止釋放後的初期，空罐的速度總是最慢，空罐追上其他含水罐的時間會隨水－罐質量比增加而增大。
 - (3)含水罐滾下時，運動前期並非等加速度，其速度會在平均速度直線作上下振盪。推測可能是滾下時罐內水的晃動所造成。
- 二、不同質量的空罐裝水後滾動的運動行為類似。但空罐質量越大時，罐內的水對罐子滾下之影響越不明顯。
- 三、含乙二醇與含水罐之滾動總時間與液-罐質量比的關係會有相同的趨勢。含乙二醇罐之滾動總時間最大值大於含水罐，且出現滾動總時間最大值之 $\frac{m}{M}$ 值，以裝乙二醇罐較大。罐子含液體量較多時，含乙二醇罐之滾動總時間大於含水罐。其差異來自黏滯係數的差別。
- 四、可由我們拍攝的影片中看出，液體在滾動的罐子中，部份會形成薄膜隨罐子滾動，此薄膜厚度不均勻，乙二醇形成之薄膜較水形成之薄膜厚。另一部份則會隨罐子平移，表層會有晃動現象。
- 五、綜合模型一~五，發現模型五的預測較接近實驗結果，可見在含液罐滾動過程中，部分液體會形成薄水膜隨罐滾動，部分液體形成液塊隨罐中心平移，且有黏滯力作用。

捌、未來展望

- 一、將 A 罐內裝乙二醇液體，觀察不同的液體性質如何影響罐子滾動的運動樣子，並比較與內部裝水時的差異。
- 二、未來我們可以改變軌道角度來觀察在不同角度對水罐滾動的影響。
- 三、未來我們可以在罐子內部打蠟，藉以觀察若罐內液體不會產生“濡濕”現象對罐子所產生的影響。

玖、參考資料及其他

- 一、普通高級中學 物理 下冊，第八章位能與力學能守恆、第十章轉動、第十一章流體的性質。南一書局高中物理編撰委員會。南一書局企業股份有限公司。2009.2
- 二、David hailiday。FUNDAMENTS OF PHYSICS 第七版(第 10、14 章)。全華圖書股份有限公司。
- 三、Vennard。Elementary Fluid Mechanics(14-22 頁)。科技圖書股份有限公司
- 四、DataStudio 處理程式使用說明書。
- 五、PASCO 圖型精靈(Xplorer GLX)使用說明書