第八屆旺宏科學獎

成果報告書

參賽編號：SA8-394

作品名稱：由泡泡接合探尋孟氏定理

姓名：蔡長佑

關鍵字：孟氏定理、曲率球心、泡泡接合

壹、　研究動機

在一次物理課中，物理老師在介紹流體力學時，提及泡泡的膜與表面張力的關係，正巧提到泡膜表面張力與泡泡內外氣壓差。在下課時間，我就找老師討論：若有二個或二個以上的泡泡接合，泡膜達穩定時的形狀是否有規則可尋？正巧，老師在幾篇論文中看過一些利用數學對此議題的研究，於是我決定對「泡膜結構」做個深入的探討。

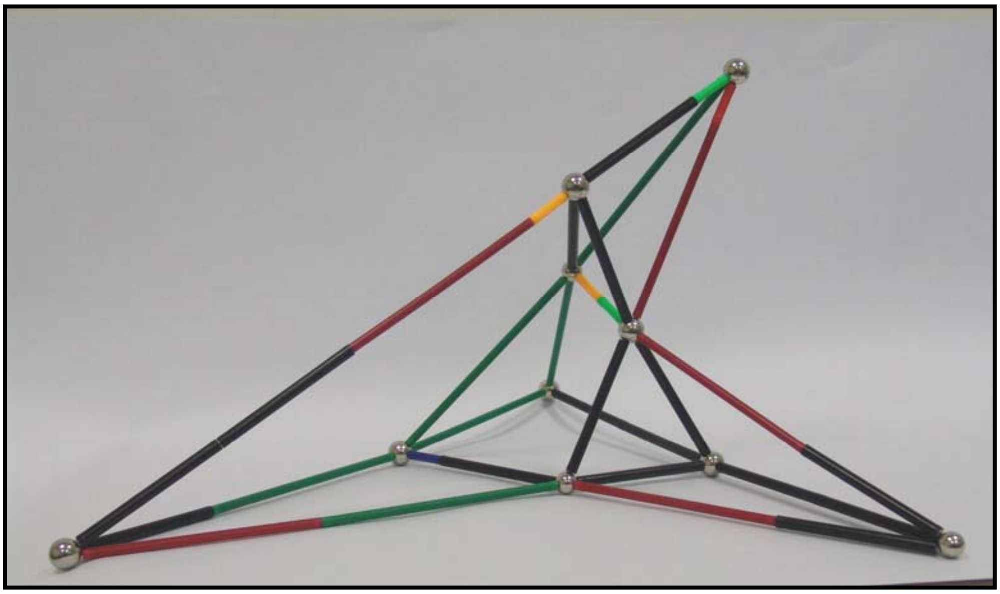
圖一：四個泡泡接合之情況。

貳、 研究目的

一、探討兩個泡泡相接合時之情形及關係 。
二、由兩個泡泡相接合之情形，推廣至 n 個時的情形及關係。
三、推導出最多可以幾個泡泡兩兩互相接合。

参、 研究設備及器材

吸管、甘油、沐浴乳、電腦、繪圖程式（Archimedes Geo3D、Calques3D）、maple、照相機、攝影機、磁鐵教具。



圖二：以磁鐵教具模擬四個泡泡之接合情形。

肆、 研究過程及方法

一、 兩個泡泡接合狀況

(一)Plateau’s　laws：

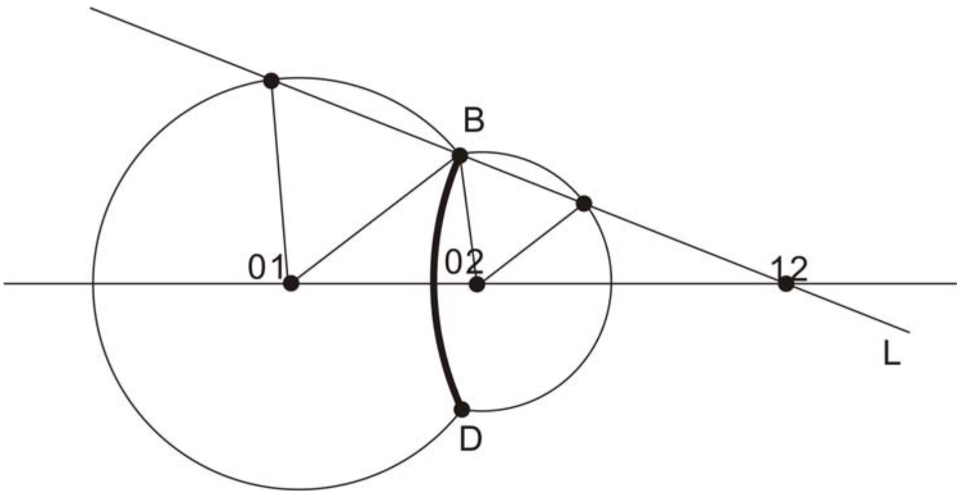
1. 當半徑相異之泡泡兩兩相接，其調整到最穩定狀態時，其兩個泡泡膜的接觸面是一個新泡泡球體的一部份。

2. 兩個泡泡接合時，有三個球面，其中兩兩球面之切線成120°。

3. 四個泡泡相接時，共享中心接合點，任兩個泡泡球心連接至中心點所交織夾角約為 109.47 度。

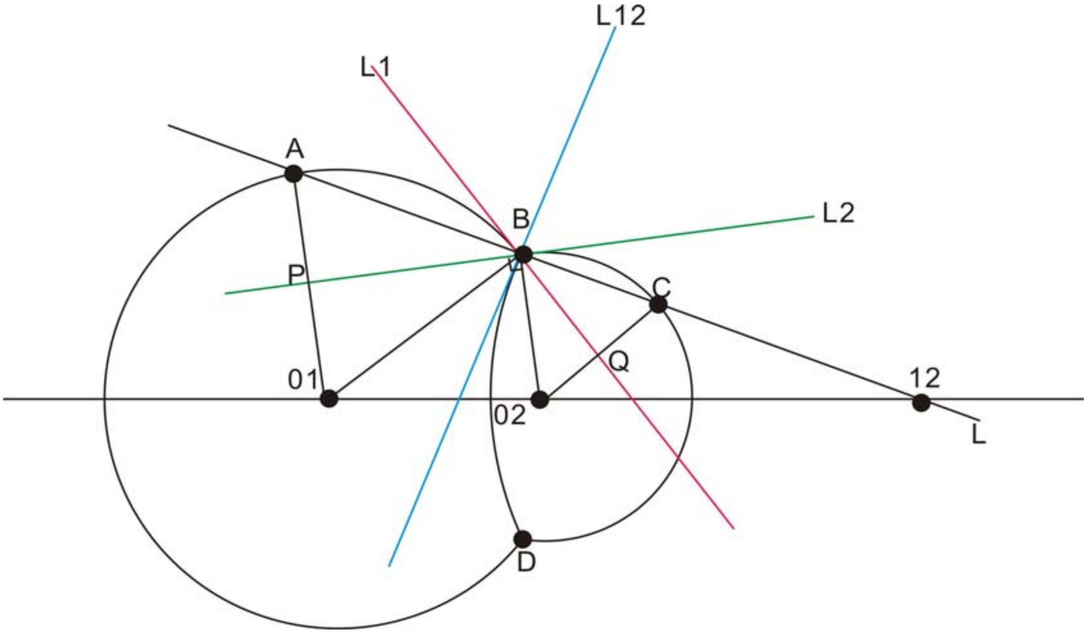
(二)依照 Plateau’s　laws 可知；

1. 如圖三所示，BD 弧面是一個球體的一部份，弧面的球心為 O_{12} (此後為使數學運算方便，以 O_{12} 表示 O_{01} 、O_{02} 所接面之球心) 。



圖三：兩個泡泡接合示意圖。

2. 如圖四所示，兩兩球面之切線成 120 度 。



圖四：三泡膜之切線兩兩互成 120 度。

(三) 如圖四所示，過 O_{12} 與 B(B 為兩泡泡之交點)的直線為 L，分別交 O_{01}、O_{02} 於 A、C 兩點。

(四) 分別做三圓的切線 L_1、L_2 及 L_{12}。

(五) 依 Plateau's laws 知 $\angle PBQ = 120°$

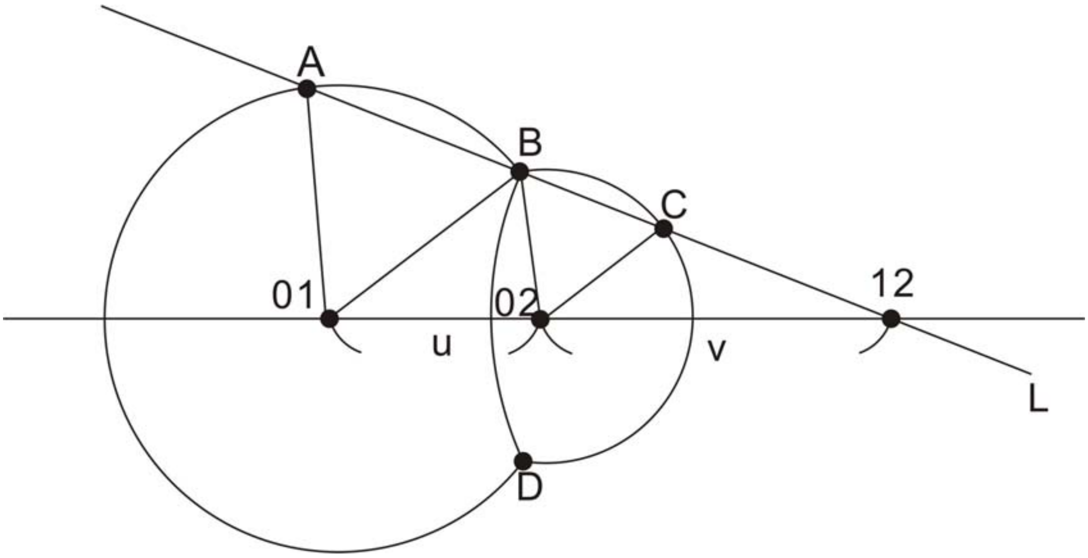
由於 L_2 為切線，因此 $\angle PBO_{02} = 90°$

$\therefore \angle O_{02}BQ = 30°$ 同理 $\angle CBQ = 30°$

$\therefore \angle O_{02}BC = 60°$ 同理 $\angle ABO_{01} = 60°$

$\therefore \angle O_{01}BO_{12} = 120°$(與$\angle ABO_{01}$互補) 同理 $\angle O_{02}CO_{12} = 120°$

$\therefore \Delta O_{01}BO_{12} \sim \Delta O_{02}CO_{12}$



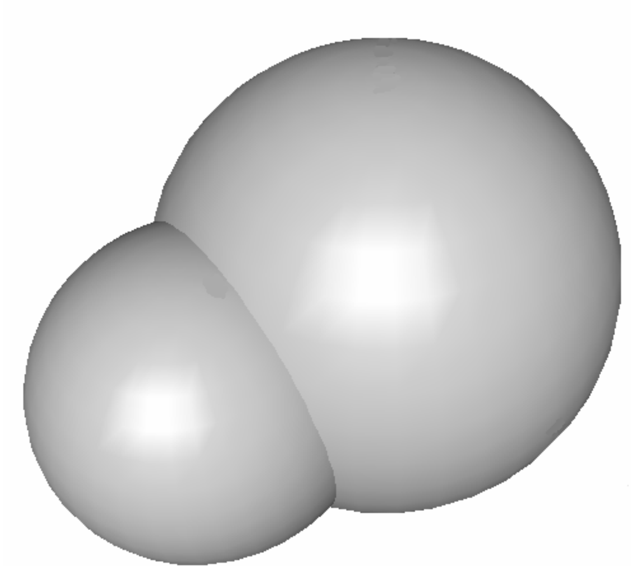
圖五：兩泡泡接合時線段比例關係。

(六)設$\overline{O_{01}O_{02}} = \mathrm{u}$，$\overline{O_{02}O_{12}} = \mathrm{v}$

依相似三角形 $\Delta O_{01}BO_{12} \sim \Delta O_{02}CO_{12}$ 可知

$$\frac{v}{u+v} = \frac{r_{02}}{r_{01}} \quad \cdots\cdots(1) \qquad\qquad \frac{u}{u+v} = \frac{r_{02}}{r_{12}} \quad \cdots\cdots(2)$$

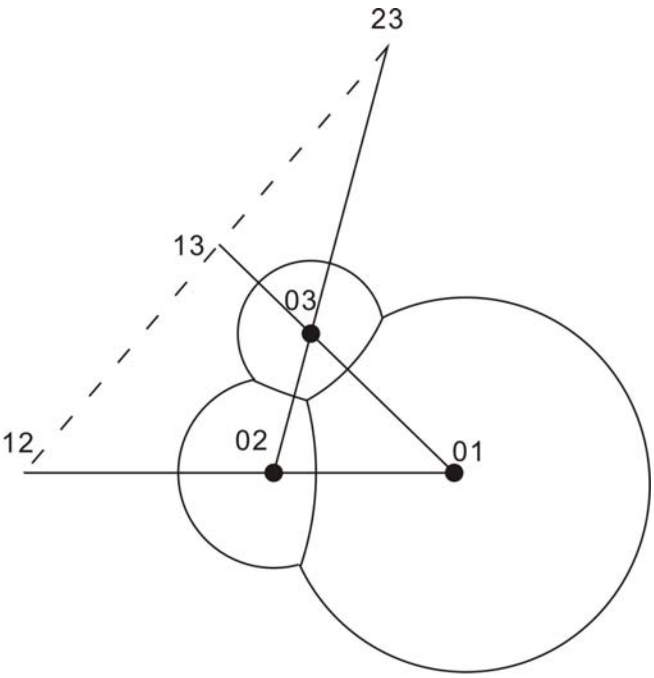
$$\therefore r_{12}^{-1} : r_{01}^{-1} : r_{02}^{-1} = u : v : (u+v) \quad \cdots\cdots(3)$$



圖六：兩泡泡電腦模擬圖。

二、 三個泡泡接合狀況

觀察三個泡泡接合時，各球心似乎符合孟氏定理的圖形
欲証 ：O_{12}、O_{23}、O_{13}共線。(r 表半徑，其中 $r_{01}>r_{02}>r_{03}$)



圖七：三泡泡接合示意圖。

利用孟氏定理(請見附錄)的逆定理，如果：

$$\frac{\overline{O_{01}O_{12}}}{\overline{O_{12}O_{02}}} \cdot \frac{\overline{O_{02}O_{23}}}{\overline{O_{23}O_{03}}} \cdot \frac{\overline{O_{03}O_{13}}}{\overline{O_{13}O_{01}}} = 1 \quad ,$$

得 O_{12}、O_{13}、O_{23}共線，證明如下：

$$\frac{\overline{O_{01}O_{12}}}{\overline{O_{12}O_{02}}} = \frac{r_{02}^{-1}}{r_{01}^{-1}} \cdots\cdots(4) \quad \Rightarrow \text{如同}\ \frac{u+v}{v}$$

$$\frac{\overline{O_{02}O_{23}}}{\overline{O_{23}O_{03}}} = \frac{r_{03}^{-1}}{r_{02}^{-1}} \cdots\cdots(5) \quad \Rightarrow \text{如同}\ \frac{u+v}{v}$$

$$\frac{\overline{O_{03}O_{13}}}{\overline{O_{13}O_{01}}} = \frac{r_{01}^{-1}}{r_{03}^{-1}} \cdots\cdots(6) \quad \Rightarrow \text{如同}\ \frac{v}{u+v}$$

$\therefore$ (4)×(5)×(6)

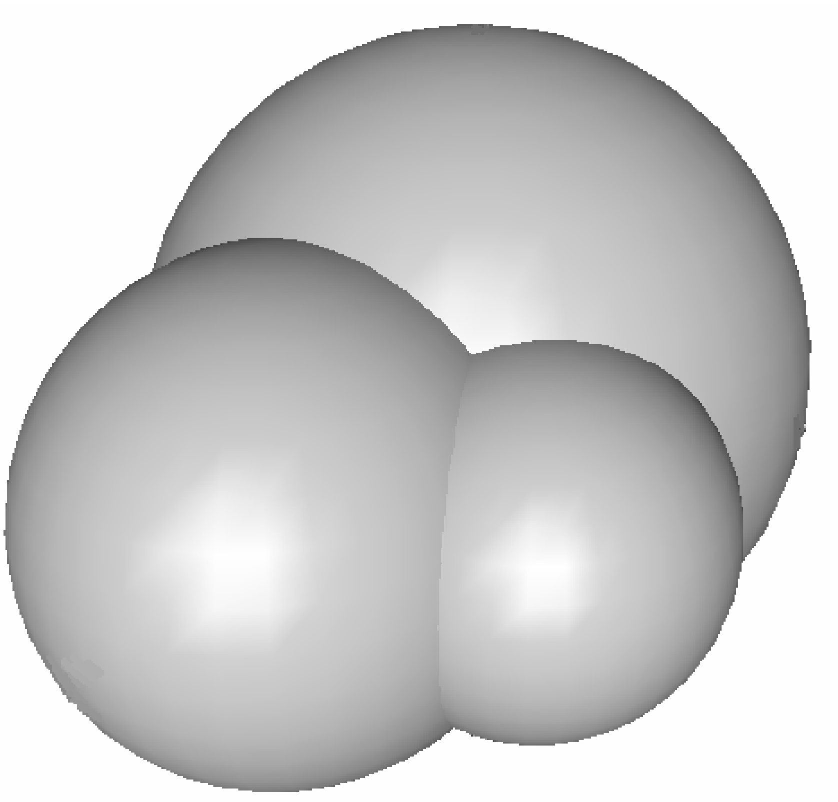
$$\frac{\overline{O_{01}O_{12}}}{\overline{O_{12}O_{02}}}\cdot\frac{\overline{O_{02}O_{23}}}{\overline{O_{23}O_{03}}}\cdot\frac{\overline{O_{03}O_{13}}}{\overline{O_{13}O_{01}}}=\frac{r_{02}^{-1}}{r_{01}^{-1}}\cdot\frac{r_{03}^{-1}}{r_{02}^{-1}}\cdot\frac{r_{01}^{-1}}{r_{03}^{-1}}=1 \quad \cdots\cdots(7)$$

(備註：之後即以 $\frac{(01,12)}{(12,02)}\times\frac{(02,23)}{(23,03)}\times\frac{(03,13)}{(13,01)}=1$

簡化方程式(7)) 。

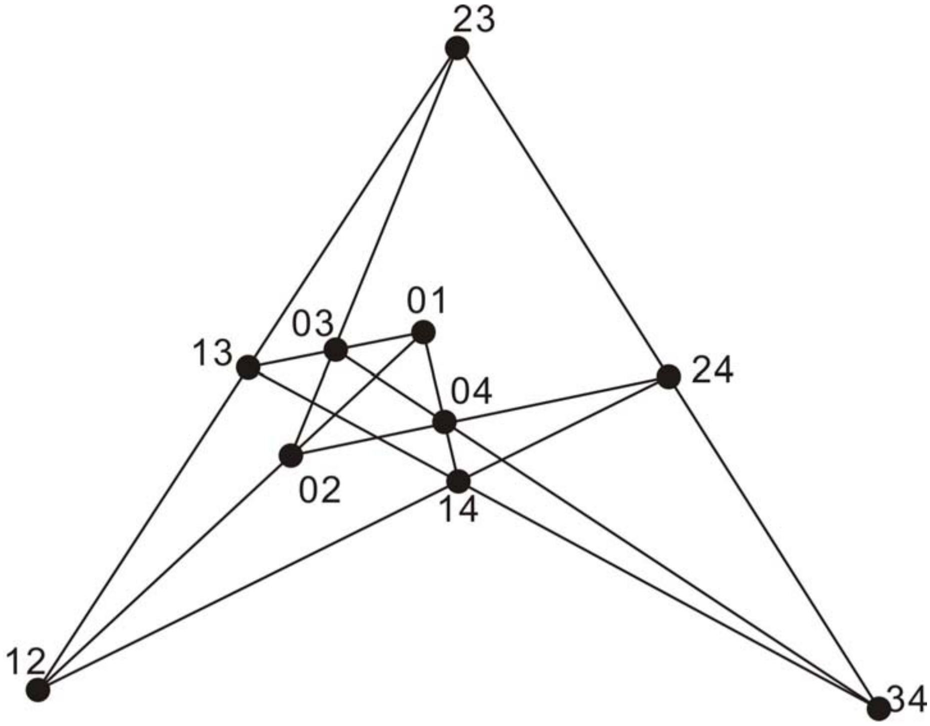
$\therefore$ 故得証：O_{12}、O_{13}、O_{23} 共線。

$\therefore$ 三個泡泡接合時各球心連線符合孟氏定理的圖型。



圖八：三泡泡接合之電腦模擬圖。

二、四個泡泡接合狀況



圖九：四泡泡接合之球心關係圖。

(一)、圖九 $r_1 > r_2 > r_3 > r_4$

取圖中任三個 O_i 點（ $i = 01,02,03,04$ ）連線成一三角形，並找出其三邊延伸之線段，可行成一個「孟氏定理」的圖形。

(二)、取 O_{01}, O_{02}, O_{03} 依照方程式(7)形成路徑為

$$O_{01} \Rightarrow O_{12} \Rightarrow O_{02} \Rightarrow O_{23} \Rightarrow O_{03} \Rightarrow O_{13} \Rightarrow O_{01}$$

$$\frac{(01,12)}{(12,02)} \cdot \frac{(02,23)}{(23,03)} \cdot \frac{(03,13)}{(13,01)} = 1 \qquad \cdots\cdots(8)$$

同理

$$\frac{(01,12)}{(12,02)}\cdot\frac{(02,24)}{(24,04)}\cdot\frac{(04,14)}{(14,01)}=1 \quad \cdots\cdots(9)$$

$$\frac{(01,13)}{(13,03)}\cdot\frac{(03,34)}{(34,04)}\cdot\frac{(04,14)}{(14,01)}=1 \quad \cdots\cdots(10)$$

$$\frac{(02,23)}{(23,03)}\cdot\frac{(03,34)}{(34,04)}\cdot\frac{(04,24)}{(24,02)}=1 \quad \cdots\cdots(11)$$

(三)、將(8)÷(9)得

$$\frac{(02,23)}{(23,03)}\times\frac{(03,31)}{(31,01)}\times\frac{(01,14)}{(14,04)}\times\frac{(04,42)}{(42,02)}=1 \quad \cdots\cdots(12)$$

(其中 13 與 31 同，24 與 42 同)

(四)、觀察上式，此式似乎有一個規律可尋，即從 O_{02} 到 O_{03} 到 O_{04} 到 O_{01} 且以之接觸面的球面球心為橋樑，組合成一個連續不斷的路徑。

(五)、進一步猜想此有規律的路徑是否可從任一肥皂球球心開始，且不重覆地經過其他三個泡泡球心並回到原出發點。

(六)、令 $p,q,r,s\in\{1,2,3,4\}$ 且 p、q、r、s 皆相異

$$\frac{(op,pq)}{(pq,oq)}\times\frac{(oq,qr)}{(qr,or)}\times\frac{(or,rp)}{(rp,op)}=1 \quad \cdots\cdots(13)$$

$$\frac{(op,pq)}{(pq,oq)}\times\frac{(oq,qs)}{(qs,os)}\times\frac{(os,sp)}{(sp,op)}=1 \quad \cdots\cdots(14)$$

$$\frac{(13)}{(14)}=\frac{(oq,pr)}{(qr,or)}\times\frac{(or,rp)}{(rp,op)}\times\frac{(qs,os)}{(oq,qs)}\times\frac{(sp,op)}{(os,sp)}=1$$

整理後得

$$\Rightarrow\frac{(oq,qr)}{(qr,or)}\times\frac{(or,rp)}{(rp,op)}\times\frac{(op,sp)}{(sp,os)}\times\frac{(os,qs)}{(qs,oq)}=1 \quad \cdots\cdots(15)$$

(七)、觀察上式可知，可任選四個泡泡其中之任一個球心，依照任一種特定順序經過其他三個泡泡球心，其中兩兩泡泡球心以其交接面的第三球心為橋樑，最後可以以不中斷的路徑走完全程。

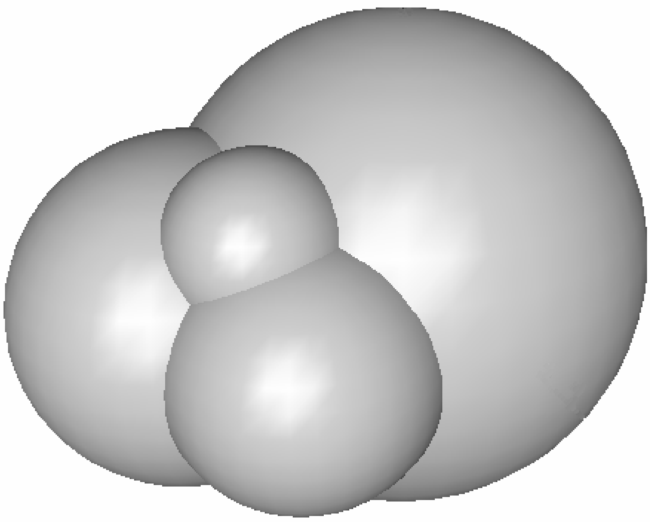
例如：

if ：p=1 , q=2 , r=4 , s=3

$$\frac{(02,24)}{(24,04)}\times\frac{(04,41)}{(41,01)}\times\frac{(01,13)}{(13,03)}\times\frac{(03,32)}{(32,02)}=1$$

（點 14 與點 41 同，23 與 32 同）

(八)、推測此種有規律的路徑可從三個、四個泡泡推展到無限多個泡泡。



圖十：四泡泡接合之電腦模擬圖。

四、n 個泡泡接合情況

欲証：當 n 個泡泡兩兩相接時，是否符合上述之規律。

<證明>

利用數學歸納法

(一)、已知當三個泡泡相接時符合此一路徑。

(二)、設：當有(n-1)個泡泡時符合此一規律路徑 $(n \geq 4)$

$$\frac{(o\ a_1, a_1 a_2)}{(a_1 a_2, o\ a_2)} \times \frac{(o\ a_2, a_2 a_3)}{(a_2 a_3, o\ a_3)} \cdots\cdots \frac{(o\ a_{n-2}, a_{n-2} a_{n-1})}{(a_{n-2} a_{n-1}, o\ a_{n-1})} \times \frac{(o\ a_{n-1}, a_{n-1} a_1)}{(a_{n-1} a_1, o\ a_1)} = 1 \quad \cdots (16)$$

(a_i (i=1,2,…n-1) 是 1 到 n-1 中任一數且互不相等 。)

依方程式(7)可知

$$\frac{(o\ a_{n-1}, a_{n-1} a_1)}{(a_{n-1} a_1, o\ a_1)} \times \frac{(o\ a_1, a_1 a_n)}{(a_1 a_n, o\ a_n)} \times \frac{(o\ a_n, a_n a_{n-1})}{(a_n a_{n-1}, o\ a_{n-1})} = 1 \cdots (17)$$

當(16)÷(17)得

$$\frac{(o\ a_1, a_1 a_2)}{(a_1 a_2, o\ a_2)} \times \frac{(o\ a_2, a_2 a_3)}{(a_2 a_3, o\ a_3)} \times \cdots\cdots \times \frac{(o\ a_{n-1}, a_{n-1} a_n)}{(a_{n-1} a_n, o\ a_n)} \times \frac{(o\ a_n, a_n a_1)}{(a_n a_1, o\ a_1)} = 1 \cdots (18)$$

∴當有 n 個泡泡時也符合此一規律路徑。

五、探討泡泡兩兩接合數目的極限

(一)、原有 1 個泡泡

$O_i\,(x_i,y_i.z_i)$

$$\overline{O_iO_j}=u_{ij}=\sqrt{r_i+r_j-r_ir_j}\quad (r_i\neq r_j)$$

令 $O_1=(0,0,0)$

(二)、接上第 2 個泡泡

$\because \overline{O_1O_2}=u_{12}$

$\Rightarrow O_2$ ： $x_2^2+y_2^2+z_2^2=u_{12}^2$

$\Rightarrow$ 令 $O_2(x_2,0,0)$

$\Rightarrow x_2=\pm u_{12}$

$\therefore O_2(u_{12},0,0)$

(三)、接上第 3 個泡泡

$\because \overline{O_1O_3}=u_{13}$

$\overline{O_2O_3}=u_{23}$

$$\Rightarrow\begin{cases}(x_3-u_{12})^2+y_3^{\ 2}+z_3^{\ 2}=u_{13}^{\ 2}\text{......(19)}\\ x_3^{\ 2}+y_3^{\ 2}+z_3^{\ 2}=u_{13}^{\ 2}\text{..................(20)}\end{cases}$$

(20)－(19) $\Rightarrow x_3=\dfrac{u_{13}^{\ 2}+u_{12}^{\ 2}-u_{23}^{\ 2}}{2u_{12}}$ 代回(20)

$$\Rightarrow y_3^{\ 2}+z_3^{\ 2}=u_{13}^{\ 2}-x_3^{\ 2}$$

O_3 在 $\begin{cases}x_3=\dfrac{u_{13}^{\ 2}+u_{12}^{\ 2}-u_{23}^{\ 2}}{2u_{12}}\\ x_3^{\ 2}+y_3^{\ 2}+z_3^{\ 2}=u_{13}^{\ 2}\end{cases}$ 之圓上任一點

取 $z_3=0\Rightarrow y_3=\sqrt{u_{13}^{\ 2}-x_3^{\ 2}}$ ，$-\sqrt{u_{13}^{\ 2}-x_3^{\ 2}}$

(四)、接上第4個泡泡

$$\because \overline{O_1O_4} = u_{14}$$

$$\overline{O_2O_4} = u_{24}$$

$$\overline{O_3O_4} = u_{34}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_4{}^2 + y_4{}^2 + z_4{}^2 = u_{14}{}^2 \text{..............................}(21) \\ (x_4 - u_{12})^2 + y_4{}^2 + z_4{}^2 = u_{24}{}^2 \text{.................}(22) \\ (x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2 + z_4{}^2 = u_{34}{}^2 \text{.......}(23) \end{cases}$$

(21)－(22)

$$\Rightarrow x_4 = \frac{u_{12}{}^2 + u_{14}{}^2 - u_{24}{}^2}{2u_{12}} \quad \text{………}(24)$$

(22)－(23)

$$\Rightarrow y_4 = \frac{-2u_{12}x_4 + u_{12}{}^2 + 2x_3x_4 - x_3{}^2 - y_3{}^2 - u_{24}{}^2 + u_{34}{}^2}{-2y_3} \quad \text{………..}(25)$$

(24)(25)代入(21)

$$\Rightarrow z_4 = \sqrt{-x_4{}^2 - y_4{}^2 + u_{14}{}^2}\ ,\ -\sqrt{-x_4{}^2 - y_4{}^2 + u_{14}{}^2}$$

(五)、接上第5個泡泡

$$\Rightarrow \begin{cases} x_5{}^2 + y_5{}^2 + z_5{}^2 = u_{15}{}^2 \text{.................................}(26) \\ (x_5 - u_{12})^2 + y_5{}^2 + z_5{}^2 = u_{25}{}^2 \text{.........................}(27) \\ (x_5 - x_3)^2 + (y_5 - y_3)^2 + z_5{}^2 = u_{35}{}^2 \text{.................}(28) \\ (x_5 - x_4)^2 + (y_5 - y_4)^2 + (z_5 - z_4)^2 = u_{45}{}^2 \text{.......}(29) \end{cases}$$

(26)－(27)

$$\Rightarrow x_5 = \frac{-u_{25}{}^2 + u_{12}{}^2 + u_{15}{}^2}{2u_{12}} \text{……….}(30)$$

(27)－(28)

$$\Rightarrow y_5 = \frac{-2u_{12}x_5 + u_{12}{}^2 + 2x_3x_5 - x_3{}^2 - y_3{}^2 - u_{25}{}^2 + u_{35}{}^2}{-2y_3} \text{……}(31)$$

(30)(31)代入(28)

$$\Rightarrow z_5 = \sqrt{-x_5{}^2 - y_5{}^2 + u_{15}{}^2}\ , -\sqrt{-x_5{}^2 - y_5{}^2 + u_{15}{}^2}$$

取 $y_3<0$, $z_4>0$, $z_5<0$ 代入(29)時

$(x_5-x_4)^2+(y_5-y_4)^2+(z_5-z_4)^2-u_{45}{}^2=$

$$\begin{aligned}
&(2((3r_1^2r_2^2 + 3r_3^2r_1^2 + 3r_3^2r_2^2 - 2r_3^2r_1 r_2 - 2r_1 r_3 r_2^2 - 2r_1^2r_3 r_2)(-r_4^2r_1^2r_3 r_2 \\
&+ 2r_1^2r_3^2r_2^2 + 2r_1^2r_2^2r_4^2 + 2r_4^2r_3^2r_1^2 - r_1^2r_4 r_3^2r_2 - r_1 r_4^2r_3^2r_2 - r_4^2r_1 r_3 r_2^2 - r_1^2r_4 r_3 r_2^2 \\
&- r_1 r_4 r_3^2r_2^2 + 2r_4^2r_3^2r_2^2))^{1/2}((3r_1^2r_2^2 + 3r_3^2r_1^2 + 3r_3^2r_2^2 - 2r_3^2r_1 r_2 - 2r_1 r_3 r_2^2 \\
&- 2r_1^2r_3 r_2)(-r_1^2r_5 r_3^2r_2 - r_1^2r_5^2r_3 r_2 + 2r_5^2r_3^2r_2^2 + 2r_1^2r_5^2r_3^2 + 2r_1^2r_3^2r_2^2 - r_1 r_5^2r_3^2r_2 \\
&+ 2r_1^2r_5^2r_2^2 - r_1 r_5 r_3^2r_2^2 - r_1^2r_2^2r_5 r_3 - r_1 r_5^2r_3 r_2^2))^{1/2} - 3r_5 r_1^4r_3 r_2^4 - r_5 r_1^4r_2^3r_3^2 \\
&- r_5 r_1^4r_3^3r_2^2 - 3r_5 r_1^4r_3^4r_2 - r_5 r_1^3r_2^4r_3^2 + 6r_5 r_1^3r_2^3r_3^3 - r_5 r_1^3r_3^4r_2^2 - r_5 r_1^2r_2^4r_3^3 \\
&- r_5 r_1^2r_2^3r_3^4 - 3r_5 r_3^4r_2^4r_1 - 3r_4 r_1^4r_3 r_2^4 - r_4 r_1^4r_2^3r_3^2 - r_4 r_1^4r_3^3r_2^2 - 3r_4 r_1^4r_3^4r_2 \\
&- r_4 r_1^3r_2^4r_3^2 + 6r_4 r_1^3r_2^3r_3^3 - r_4 r_1^3r_3^4r_2^2 - r_4 r_1^2r_2^4r_3^3 + 3r_5 r_4 r_3^4r_2^4 + 3r_4 r_5 r_1^4r_2^4 \\
&+ 3r_4 r_5 r_3^4r_1^4 - r_4 r_1^2r_2^3r_3^4 - 3r_4 r_3^4r_2^4r_1 - 2r_4 r_5 r_1^4r_2^3r_3 + 6r_4 r_5 r_1^4r_3^2r_2^2 - 2r_4 r_5 r_1^4r_3^3r_2 \\
&- 2r_4 r_5 r_1^3r_2^4r_3 - 2r_4 r_5 r_1^3r_2^3r_3^2 - 2r_4 r_5 r_1^3r_3^3r_2^2 - 2r_4 r_5 r_3^4r_1^3r_2 + 6r_4 r_5 r_1^2r_2^4r_3^2 \\
&- 2r_4 r_5 r_1^2r_3^3r_2^3 + 6r_4 r_5 r_3^4r_1^2r_2^2 - 2r_4 r_5 r_1 r_3^3r_2^4 - 2r_4 r_5 r_3^4r_2^3r_1 + 12r_3^4r_2^4r_1^2 \\
&+ 12r_1^4r_2^4r_3^2 - 8r_1^4r_2^3r_3^3 + 12r_1^4r_3^4r_2^2 - 8r_1^3r_2^4r_3^3 - 8r_1^3r_2^3r_3^4)/(9r_3^4r_2^4 + 9r_3^4r_1^4 \\
&+ 9r_1^4r_2^4 + 22r_3^4r_1^2r_2^2 - 12r_3^4r_1^3r_2 - 12r_1^4r_2^3r_3 - 4r_1^3r_3^3r_2^2 - 4r_1^3r_2^3r_3^2 - 12r_1^3r_2^4r_3 \\
&- 12r_1^4r_3^3r_2 + 22r_1^4r_3^2r_2^2 - 12r_1 r_3^3r_2^4 - 4r_1^2r_3^3r_2^3 + 22r_1^2r_2^4r_3^2 - 12r_3^4r_2^3r_1)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$上式不恆等於０。

當上式等於0時

r_5=

$$((r_1 r_2 r_3 + r_1 r_4 r_3 + r_1 r_4 r_2 + r_2 r_3 r_4 + 2(3r_4^2 r_1^2 r_3 r_2 - 6r_1^2 r_3^2 r_2^2 - 6r_1^2 r_2^2 r_4^2$$
$$- 6r_4^2 r_3^2 r_1^2 + 3r_1^2 r_4 r_3^2 r_2 + 3r_1 r_4^2 r_3^2 r_2 + 3r_4^2 r_1 r_3 r_2^2 + 3r_1^2 r_4 r_3 r_2^2 + 3r_1 r_4 r_3^2 r_2^2$$
$$- 6r_4^2 r_3^2 r_2^2)^{1/2}) r_4 r_3 r_2 r_1) / (5r_1^2 r_3^2 r_2^2 + 5r_1^2 r_2^2 r_4^2 - 2r_1^2 r_4 r_3 r_2^2 - 2r_1^2 r_4 r_3^2 r_2$$
$$- 2r_4^2 r_1^2 r_3 r_2 + 5r_4^2 r_3^2 r_1^2 - 2r_1 r_4 r_3^2 r_2^2 - 2r_4^2 r_1 r_3 r_2^2 - 2r_1 r_4^2 r_3^2 r_2 + 5r_4^2 r_3^2 r_2^2)$$

觀察上式如果r_5有解，則分子中根號內的值要爲正數或零

∴ 欲証

$$3(r_1^2 r_2^2 r_3 r_4 + r_1^2 r_3^2 r_2 r_4 + r_1^2 r_4^2 r_2 r_3 + r_2^2 r_3^2 r_1 r_4 + r_2^2 r_4^2 r_1 r_3 + r_3^2 r_4^2 r_1 r_2)$$
$$- 6(r_1^2 r_2^2 r_3^2 + r_1^2 r_2^2 r_4^2 + r_1^2 r_3^2 r_4^2 + r_2^2 r_3^2 r_4^2) \geq 0$$

由算幾不等式

$$\Rightarrow 3(r_1^2 r_2^2 r_3 r_4 - \frac{1}{2}(r_1^2 r_2^2 r_3^2 + r_1^2 r_2^2 r_4^2)) + 3(r_1^2 r_3^2 r_2 r_4 - \frac{1}{2}(r_1^2 r_2^2 r_3^2 + r_1^2 r_3^2 r_4^2))$$
$$+ 3(r_1^2 r_4^2 r_2 r_3 - \frac{1}{2}(r_1^2 r_2^2 r_4^2 + r_1^2 r_3^2 r_4^2)) + 3(r_2^2 r_3^2 r_1 r_4 - \frac{1}{2}(r_1^2 r_2^2 r_3^2 + r_2^2 r_3^2 r_4^2))$$
$$+ 3(r_2^2 r_4^2 r_1 r_3 - \frac{1}{2}(r_1^2 r_2^2 r_4^2 + r_2^2 r_3^2 r_4^2)) + 3(r_3^2 r_4^2 r_1 r_2 - \frac{1}{2}(r_1^2 r_3^2 r_4^2 + r_2^2 r_3^2 r_4^2))$$
$$- \frac{3}{2}(r_1^2 r_2^2 r_3^2 + r_1^2 r_2^2 r_4^2 + r_1^2 r_3^2 r_4^2 + r_2^2 r_3^2 r_4^2)$$
$$\leq - \frac{3}{2}(r_1^2 r_2^2 r_3^2 + r_1^2 r_2^2 r_4^2 + r_1^2 r_3^2 r_4^2 + r_2^2 r_3^2 r_4^2) < 0$$

∴ r_5 恆爲虛數，所以無法接上第五個泡泡

伍、 結論

依之前的討論可推導出：

一. 當二半徑不同泡泡相接時，相接處的新膜為一個泡泡球的一部分。新泡膜的球心與原二泡泡球心依 Plateau's laws 可知其比例關係。

如果 $r_1 > r_2$ 則 O_{12} 即在 O_1 到 O_2 的射線上，

而且 r_{12}^{-1} : r_{01}^{-1} : r_{02}^{-1} ＝ u ： v ： (u + v) 。

二. 當三個半徑相異泡泡兩兩相接時，形成三個新的球面膜，三個新膜的新球心與原三泡泡球心共六點，其距離有一特定比例(如上方第一點)，而我們利用球心之間距離的比例關係與孟氏定理做結合，可知三個新球心共線。

三. 當四個半徑相異泡泡兩兩相接時，任三個泡泡的球心及其兩兩相交球面之球心之間符合孟氏定理，所以更可造成四個孟氏定理之圖形。

所形成六個新的球面膜的新球心與原四泡泡球心共十點，其距離有一特定比例，而我們利用之間的比例關係與孟氏定理做結合，推出一個固定的式子。

可任選四個泡泡之任一個球心，依照任一特定順序不重覆經過所有的泡泡球心，其中兩兩泡泡球心以其交接面的第三球心為橋樑，最後可以用不中斷的路徑「走」完全程，當泡泡達穩定時一連串乘除的答案等於 1。

四. n 個泡泡兩兩相接時，其球心與其兩兩相接球面的球心之間的關係符合孟氏定理的推廣：

$$\frac{(o\,a_1,a_1a_2)}{(a_1a_2,o\,a_2)}\times\frac{(o\,a_2,a_2a_3)}{(a_2a_3,o\,a_3)}\times......\times\frac{(o\,a_{n-1},a_{n-1}a_n)}{(a_{n-1}a_n,o\,a_n)}\times\frac{(o\,a_n,a_na_1)}{(a_na_1,o\,a_1)}=1$$

n 個泡泡兩兩相接時，可任選 n 個泡泡其中之任一個球心，依照任一種特定順序不重覆經過所有的泡泡球心，其中兩兩泡泡球心以其交接面的第三球心為橋樑，最後可以用不中斷的路徑「走」完全程，當泡泡達穩定時一連串乘除的答案等於 1。

五. 如果空間中若干點要符合 N 個泡泡相接時形成的相關式，要兩個條件：

(一).其中 C_2^n 個點符合(N-1)個泡泡組成的圖形

(二).此 C_2^n 點中任一點是在另 N 點中兩兩所成的射線上

六. 泡泡任意大小兩兩接合：

(一).只有當 4 個以下(包含 4 個)的泡泡兩兩接合時，可以任意大小接合。

(二).當 4 個泡泡要接上第 5 個時，解出之 r_5 為虛數，所以最多只能以 4 個泡泡兩兩互相接合。

陸、 討論及應用

一、如果吹二個不同大小泡泡，使其接合達穩定狀態：

(一).泡泡相接的膜是一個球面，球心位置符合由 r_{12}^{-1}： r_{01}^{-1} ： r_{02}^{-1} ＝ u ： v ： (u + v)。

二、如果吹三個不同大小泡泡，使其兩兩接合達穩定狀態：

(一).其中接合穩定後，多出的三個點共線。

(二).三點中任一點是在原三個點(原三球心)兩兩所成的射線上。

三、自三個泡泡結構推導回數學上：

假設：如果平面上有六個點符合以下兩條件

(一).其中的三個點共線(符合兩個泡泡中三點的相交圖形) 。

(二).此三點中任一點是在另三點兩兩所成的射線上。

(即如有 A、B、C、D、E、F 六點，其中 A、B、C 三點共線且 A、B、C 分別在 DE、DF、EF 射線上)即定可畫出此六個點符合平面上的孟氏定理圖形(唯一畫法，且明顯成立) 。

四、如果吹四個不同大小泡泡，使其兩兩接合達穩定狀態：

(一).其中接合穩定後，多出的六個點(即多出來的六個泡膜的球心)共平面且符合孟式定理的圖形(符合三個泡泡中六點的相交圖形)。

(二).此六點中任一點是在另四點兩兩所成的射線上。

(三).接合達穩定後必符合(15)式：

$$\Rightarrow \frac{(oq,qr)}{(qr,or)}\times\frac{(or,rp)}{(rp,op)}\times\frac{(op,sp)}{(sp,os)}\times\frac{(os,qs)}{(qs,oq)}=1$$

五、自四個泡泡結構推導回數學上：

假設：如果平面上有十個點符合

(一).其中六個點共平面且符合孟式定理的圖形。

(二).此六點中任一點是在另四點兩兩所成的射線上，即可用繪圖軟體畫出(唯一畫法)，此十個點符合四個泡泡相接時的結構，且可進一步找出與其相對應的四個泡泡，換言之其十個點符合我們所推導的有規律的(15)式。

六、以三維座標模擬泡泡兩兩接合

(一).第 1 泡泡要接上第 2 個時，第 2 個泡泡的球心在 1 個球面 (此球面爲以 O_1 爲球心，u_{12} 爲半徑)上的任一點。

(二).在球面上任取一點爲第 2 個泡泡的球心，接上第 3 個泡泡時，第 3 個泡泡爲圓(圓爲分別以 O_1、O_2 爲球心，u_{13}、u_{23} 爲半徑之兩球交圓)上的任一點。

(三).當前 3 個泡泡位置都固定時，接上第 4 個泡泡，第 4 個泡泡的球心只有 2 個位置可以接合。

(四).當 4 個泡泡要接上第 5 個時，解出之 r_5 爲虛數，所以最多只能以 4 個泡泡以任意大小兩兩接合。

七、觀察後發現的規律：

如果在空間中若干點要符合 n 個(n=2,3,4)大小相異泡泡相接時形成的相關式，要兩個條件：

(一).其中 C_2^n 個點(泡泡相接形成的膜的球心)符合(n-1)個泡泡組成的圖形。

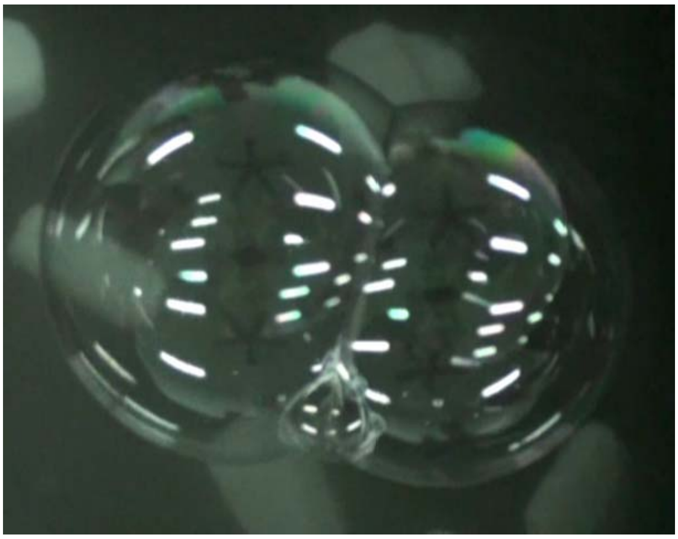
(二).此 C_2^n 點中任一點是在另 n 點中兩兩所成的射線上。

圖十一：以吸管將泡泡接合之照片。

柒、 參考資料及其他

一、Stuwe, M. *Plateau's Problem and the Calculus of Variations*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1989.
二、Wikipedia 維基百科 http://en.wikipedia.org/wiki/Plateau's_laws

圖十二：二泡泡接合之照片。

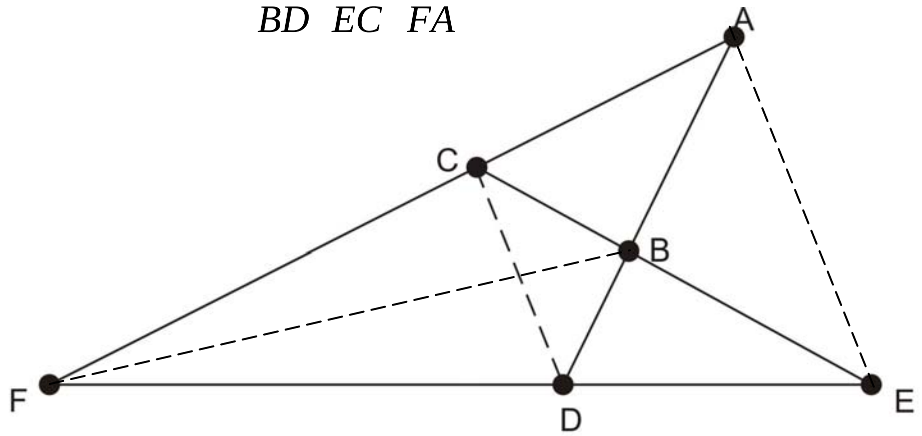


圖十三：三泡泡接合之照片。

圖十四：四泡泡接合之照片。

附錄

以下為「孟氏定理$\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}\cdot\frac{\overline{BE}}{\overline{EC}}\cdot\frac{\overline{CF}}{\overline{FA}}=1$」的証明：



上圖：孟氏定理圖形。

作三輔助線$\overline{CD}$ 、 $\overline{BF}$ 、 $\overline{AE}$

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}=\frac{\Delta ACD}{\Delta BCD}\ \cdots(\mathrm{I})\qquad \frac{\overline{BE}}{\overline{CE}}=\frac{\Delta BDE}{\Delta CDE}\ \cdots(\mathrm{II})\qquad \frac{\overline{CF}}{\overline{FA}}=\frac{\Delta CDF}{\Delta ADF}\ \cdots(\mathrm{III})$$

$$\therefore (\mathrm{I})\times(\mathrm{II})\times(\mathrm{III}):\ \frac{\Delta ACD}{\Delta BCD}\cdot\frac{\Delta BDE}{\Delta CDE}\cdot\frac{\Delta CDF}{\Delta ADF}$$

$$=\frac{\Delta ACD}{\Delta ADF}\cdot\frac{\Delta CDF}{\Delta CDE}\cdot\frac{\Delta BDE}{\Delta BCD}$$

$$=\frac{\overline{AC}}{\overline{AF}}\cdot\frac{\overline{DF}}{\overline{DE}}\cdot\frac{\overline{BE}}{\overline{BC}}$$

$$=\frac{\Delta ABC}{\Delta ABF}\cdot\frac{\Delta ABF}{\Delta ABE}\cdot\frac{\Delta ABE}{\Delta ABC}=1$$

$\therefore$ 得証$\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}\cdot\frac{\overline{BE}}{\overline{EC}}\cdot\frac{\overline{CF}}{\overline{FA}}=1$