

# 第九屆旺宏科學獎

## 成果報告書

參賽編號：SA9 - 114

作品名稱：極化泡泡膜的形變

姓名：楊泓翊

關鍵字：泡泡膜、靜電、極化

## 摘要：

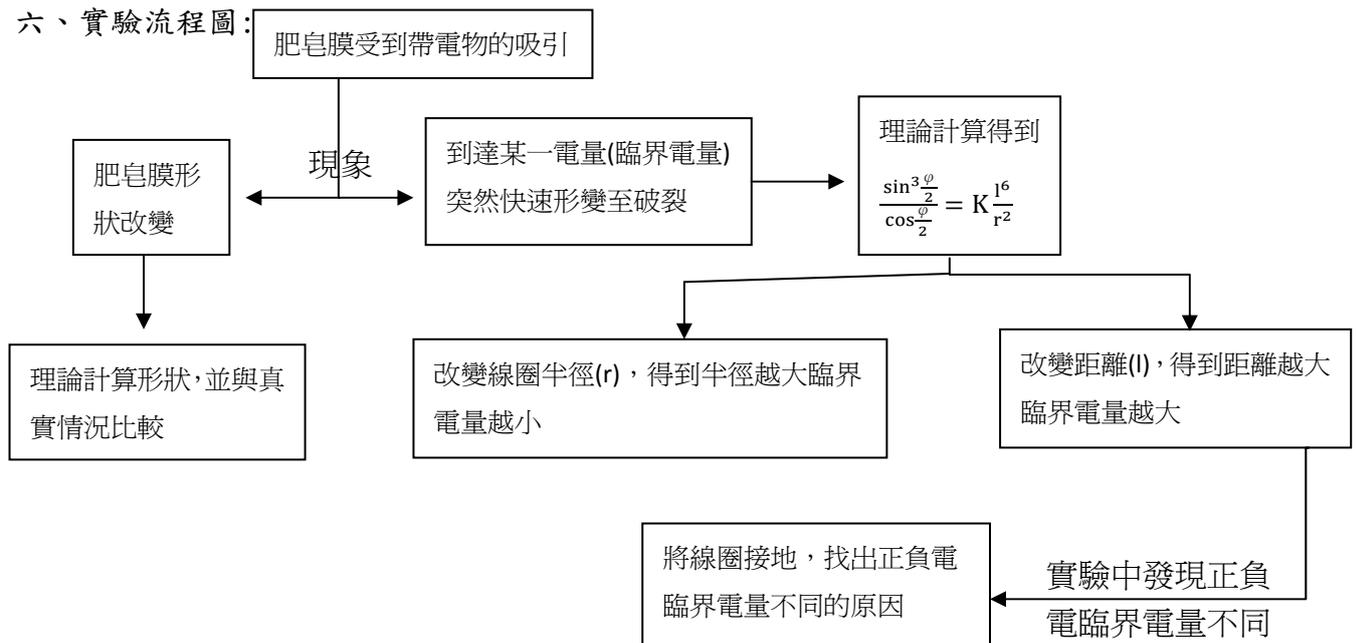
肥皂膜主要成分為水，當帶電物體靠近時，水分子會旋轉。水分子旋轉後較規則的排列使肥皂膜被極化，於是和帶電物產生一吸引力。本實驗主要研究肥皂膜受吸引時其形狀的變化，與肥皂膜在何種情況下會破裂。我們計算出肥皂膜受帶電物體的吸引力，並進一步算出當吸引力與肥皂膜表面張力平衡時的肥皂膜形狀，實驗結果顯示理論推算出的形狀與真實的變形相似。當帶電物體達到某一電量後，表面張力將無法抗衡電吸引力而導致肥皂膜破裂，我們稱該電量為臨界電量。理論與實驗結果顯示影響臨界電量的有肥皂膜與帶電物的距離、肥皂膜半徑的大小與帶電物帶的電性(正電或負電)。

## 壹、 研究動機：

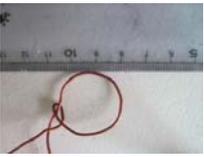
在化學競賽中，曾經碰過一道實驗題目，要求我們鑑定幾種未知液體。其中一項檢測便是用帶電物靠近正在向下流的液體，若該未知液為極性物質，則該液體流會偏向帶電物的方向。水為極性物質，故也會產生該偏向效應。於是一個想法閃過我的腦中：由水產生的肥皂膜是不是也會受到帶電物體的影響，而改變形狀？這個問題令我十分感興趣，於是決定設計實驗深入探討。

## 貳、 研究目的：

- 一、探討肥皂膜受帶電物吸引時的形狀變化。
- 二、探討使肥皂膜破裂所需的電量大小(臨界電量)與距離的關係。
- 三、探討臨界電量與線圈半徑的關係。
- 四、探討正負電對臨界電量的影響。
- 五、探討形成肥皂膜的線圈接地對臨界電量的影響。
- 六、實驗流程圖：



### 參、 實驗器材：

漆包線圈	韋氏起電機	聖誕節裝飾球	鋁箔
			

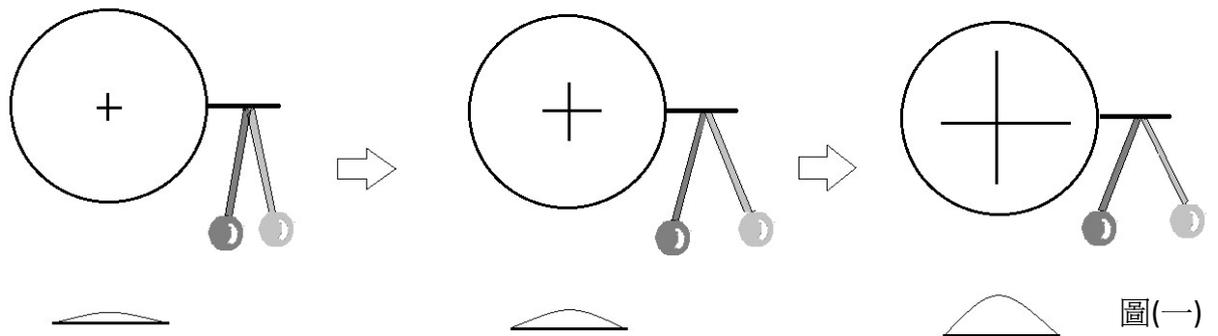
沙拉托	水	相機
		

### 肆、 研究方法

#### 一、 實驗測量

##### (一) 實驗方法

1. 將圓形線圈浸泡溶液製造肥皂膜。
2. 將肥皂膜置於金屬球底下。
3. 轉動韋氏起電機讓金屬球帶電。
4. 錄影紀錄肥皂膜形狀的變化情形及鋁箔驗電器角度的變化。
5. 改變線圈與金屬球的距離，並重複上述步驟。
6. 將電荷正負電改變，並重複上述步驟。



圖(一)轉動韋氏起電機時金屬球上的帶電量隨之增加，造成肥皂膜形狀改變，同時鋁箔驗電器的夾角增加。藉由錄影同時記錄驗電器夾角及肥皂膜形狀，即可分析金屬球帶電量與肥皂膜形狀的關係。

## (二) 實驗器材的選擇

### 1. 帶電物體的選擇

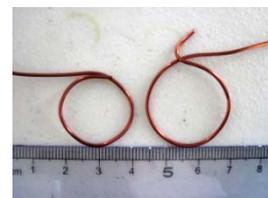
- (1) 剛開始嘗試使用球型電容接上電源器提供之一定電壓(12V)(圖二),然而這種方法帶電量太少(約 $1 \times 10^{-10} \text{C}$ ),無法看到肥皂膜形變,所以改用韋氏起電機,以靜電方式製造帶電物體。
- (2) 原本採用小金屬球(直徑約 2cm)作為帶電物,但金屬球半徑太小時電場過大,造成金屬球對肥皂膜放電,故後來改用較大的金屬球殼(半徑約 7cm)。



圖(二)

### 2. 線圈半徑的選擇

- (1) 實驗發現發生肥皂膜形變的範圍十分小,所以線圈半徑可以不用太大(3cm 以下)
- (2) 較小的肥皂膜可以維持較久,較穩定。(半徑 20 公分的肥皂膜平均維持 20 秒,半徑 1 公分的肥皂膜可維持超過 2 分鐘)



圖(三)

### 3. 驗電器的製作:

- (1) 由於韋氏起電機需不停轉動才能產生電荷,而帶電物又容易以尖端放電等方式流失電荷,所以帶電物無法長時間維持相同電量。故製作一鋁箔驗電器(圖四),以便隨時掌握帶電物的電量。
- (2) 驗電器由兩片末端為鋁箔球的長條鋁箔組成,其轉軸用一根長針固定,使鋁箔片可以自由轉動。



圖(四)

## 二、理論推導與比較

1. 由理論計算肥皂膜形狀及破裂條件，並與實驗結果相比較。

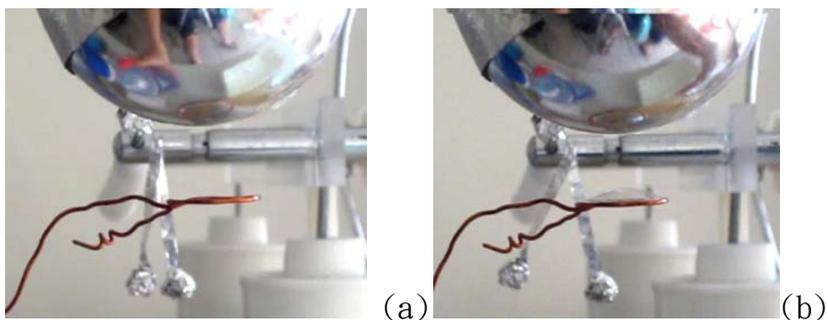
計算用到的數值：

- (1)  $\kappa$ : 水的介電常數
- (2)  $\varepsilon_0$ : 真空介電常數
- (3)  $q$ : 金屬球帶電量
- (4)  $l$ : 金屬球與肥皂膜距離
- (5)  $r$ : 線圈半徑
- (6)  $\theta$ : 肥皂膜與線圈接觸處的夾角
- (7)  $\sigma$ : 水的表面張力
- (8)  $R$ : 驗電器鋁箔長度
- (9)  $\Phi$ : 驗電器張角

## 伍、實驗結果與探討

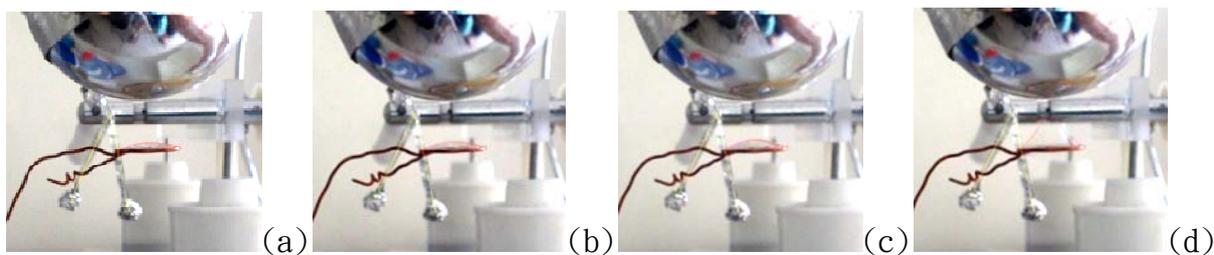
一、實驗中觀察到的現象：

(一) 當帶電物體靠近肥皂膜時，不論正負電，肥皂膜都會產生形狀改變。圖顯示肥皂膜向上形變，可知正負電荷對金屬球皆產生吸引力。



圖(五)(a)金屬球不帶電時，肥皂膜形狀為平行線圈的平面，可由驗電器看出金屬球幾乎不帶電。(b)金屬球帶電時，肥皂膜產生形狀變化，驗電器角度較圖(a)為大。

(二) 當肥皂膜與金屬球距離固定時，發現當金屬球電量增加到一定值時，肥皂膜形狀會突然快速改變，最後導致破裂。



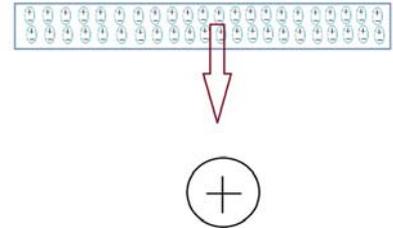
圖(六)如以上所示，由(a)到(d)在短時間內發生，驗電器張角改變不大，但肥皂膜形狀卻由幾乎沒變形(a)，快速變化直到破裂(d)。

## 二、肥皂膜形狀的探討：

由理論推導著手，解釋為何肥皂膜會變形。接著以理論估算肥皂膜的形狀，並與實際的形狀進行比較。

### (一) 肥皂膜形變的原因：

肥皂膜主要成分為水，當帶電物體靠近時，水分子會旋轉。水分子旋轉後的較具規則的排列使肥皂膜極化，於是與帶電物產生一吸引力。故由此推論不論正負電的帶電物皆會對肥皂膜產生引力。



圖(七) 帶電物靠近時水分子旋轉，使肥皂膜極化

### (二) 變因的探討：

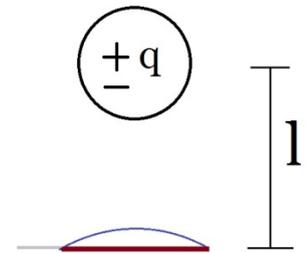
有以下幾個變因會影響肥皂膜的形狀：

#### 1. 帶電物的性質：

- (1) 電性為正電或負電(+或-)
- (2) 帶電量(q)

#### 2. 帶電物的位置

金屬球球心到肥皂膜的距離。(l)



圖(八)各項變因示意圖

### (三) 理論推導肥皂膜受到的電吸引力：

#### 1. 利用水的介電常數( $\kappa$ )，計算兩側極化產生的電荷量。

(1) 帶電物在肥皂膜附近產生的電場： $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{l^2}$

(2) 在肥皂膜兩側產生的感應電荷( $q'$ ):(由高斯定律計算，參考圖(九))

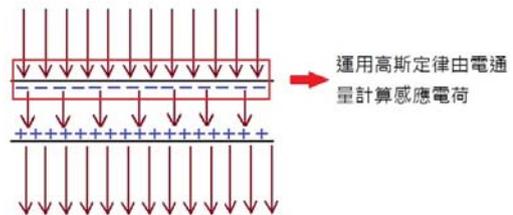
假設金屬球與肥皂膜距離(l)遠

大於線圈半徑(r)。

將肥皂膜一側以假想框圍住(如圖)，計算其電通量。

肥皂膜外側電場： $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{l^2}$

肥皂膜內部電場： $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{l^2} \frac{1}{\kappa}$



圖(九)用高斯定理計算肥皂膜產生的感應電荷。

框內的電通量總和(如圖所示)： $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{l^2} (1 - \frac{1}{\kappa})$

其中一面上的感應電荷 $q' = \epsilon_0 \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{l^2} (1 - \frac{1}{\kappa}) \right] \times \pi r^2$

$$\therefore q' = \frac{qr^2}{4l^2} \left(1 - \frac{1}{\kappa}\right)$$

( $\kappa$  為水的介電常數， $\epsilon_0$  為真空介電常數， $q$  為金屬球帶電量， $l$  為金屬球與肥皂膜距離， $q'$  為感應電量)

2. 利用肥皂膜的厚度( $d$ )，計算帶電物對兩面感應電荷( $q'$ )產生的作用力合( $F$ ):

(1) 距帶電物遠側的同性電荷產生的排斥力:  $\frac{qq'}{4\pi\epsilon_0\left(1+\frac{d}{2}\right)^2}$

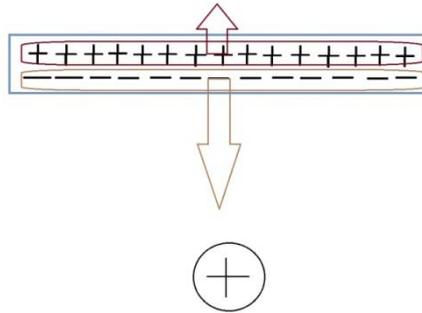
(2) 距帶電物較近側異性電荷的吸引力:  $\frac{qq'}{4\pi\epsilon_0\left(1-\frac{d}{2}\right)^2}$

(3) 合力:  $\frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{\left(1-\frac{d}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(1+\frac{d}{2}\right)^2} \right) = \frac{r^2q^2d}{8\pi\epsilon_0l^5} \left(1 - \frac{1}{\kappa}\right)$

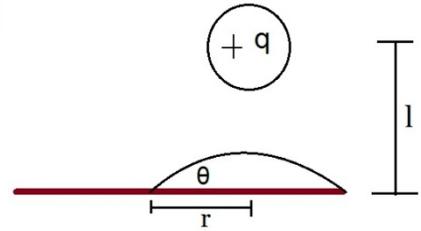
$$\therefore F = \frac{r^2q^2d}{8\pi\epsilon_0l^5} \left(1 - \frac{1}{\kappa}\right)$$

( $r$  為線圈半徑， $q$  為金屬球電量， $d$  為肥皂膜厚度， $l$  為金屬球與肥皂膜距離)

(4) 近側的吸引力大於遠側的排斥力，故合力為吸引力。(如圖十所示)



圖(十)



圖(十一)

(四) 理論推算肥皂膜的形狀:

1. 利用水的表面張力( $\sigma$ )，計算肥皂膜形變多少時，表面張力合力會與電吸引力達到平衡。

$$\text{表面張力合力} = 2\pi r\sigma \sin\theta$$

( $\theta$  為肥皂膜與線圈接觸處的夾角(如圖十一)， $\sigma$  為水的表面張力)

2. 計算整個肥皂膜的受力，達到平衡時電吸引力與表面張力合力相等。

3. 當表面張力合力與電吸引力平衡，得到肥皂膜形狀公式:

$$\frac{r^2q^2d}{8\pi\epsilon_0l^5} \left(1 - \frac{1}{\kappa}\right) = 2\pi r\sigma \sin\theta$$

$$\sin\theta = \frac{rq^2d}{16\pi^2\sigma\epsilon_0l^5} \left(1 - \frac{1}{\kappa}\right)$$

$$\sin\theta \propto \frac{rq^2}{l^5}$$

( $\theta$  為肥皂膜與線圈接觸處的夾角， $r$  為線圈半徑， $q$  為金屬球電量， $l$  為金

屬球與肥皂膜距離)

4. 利用此公式用 excel 畫出肥皂膜理論上的形狀。

畫法:

(1) 計算不同  $r$  處的  $\sin \theta$  值

(2) 由  $\sin \theta$  算出  $\tan \theta$  值

(3) 由線圈平面角度觀察實，線圈由半徑  $r$  增加到  $r+dr$  時，肥皂膜垂直方向的距離變化為  $\tan \theta dr$ 。

(4) 將所以在  $r$  處，肥皂膜離線圈平面的高度為  $\int_0^r \tan \theta dr$

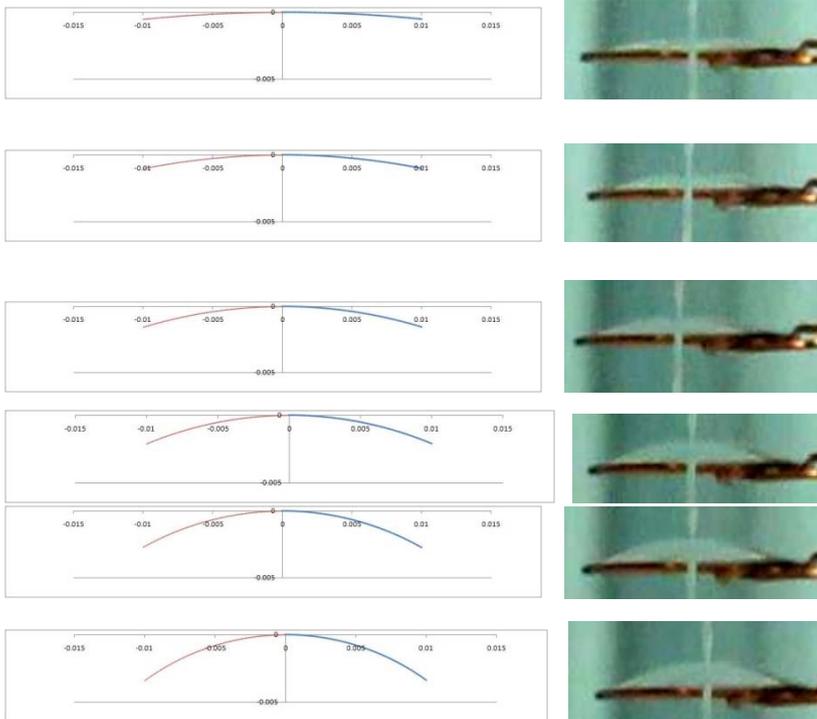
(5) 用 excel 逼近  $\int_0^r \tan \theta dr$  值

(五) 理論推算出的形狀與實際形狀做比較。

此圖為肥皂膜的側截面圖，實際形狀為延中央對稱軸繞一圈所得的圖形。

理論形狀(由 excel)

實際形狀(實驗結果)



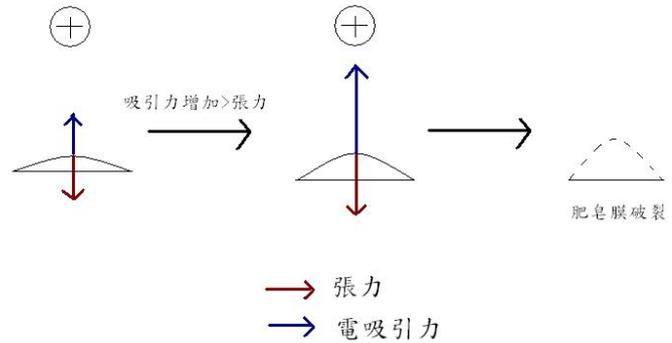
肥皂膜有不同程度的變形時，實際實驗中的形狀與理論計算出的形狀皆十分相近。理論的圖由上而下為帶入不同  $q$  值的計算結果；右邊實際圖則為增加金屬球電量時拍攝的一系列照片。

### 三、肥皂膜的破裂條件:

因為電荷容易由空氣中放電流失，故金屬球的電量十分不穩定，肥皂膜的形狀無法長時間維持固定。於是發現除了觀察肥皂膜靜態的形狀，觀察其動態下什麼條件會造成肥皂膜的破裂也是一個不錯的選擇。

(一) 實驗中發現當金屬球帶電量達到一定量以上時，肥皂膜會再也無法取得平衡狀態，而會持續形變直到破裂。(如圖十二所示)

1. 當肥皂膜形變時，肥皂膜上端與帶電物的距離縮小。
2. 距離縮小造成電吸引力的增加。
3. 若形變時肥皂膜表面張力合力的增加小於電吸引力的增加，則肥皂膜會持續變形直到破裂。
4. 定義**臨界電量**為使肥皂膜持續變形直到破裂的最小電量。



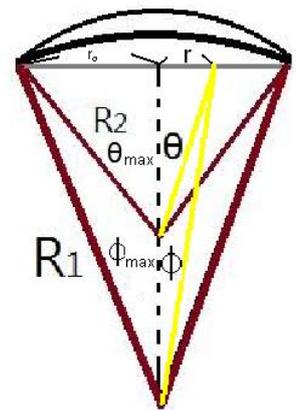
圖(十二)超過臨界電量時，肥皂膜變形時電吸引力增加大於表面張力合力增加，造成肥皂膜形狀不斷改變直到破裂。

(二) 臨界電量的理論計算：

觀察到此現象後，我們決定試著用理論推導使肥皂膜破裂的條件。

當肥皂膜稍稍變形時，表面張力會增加，而肥皂膜各點與金屬球的距離會減少，造成電吸引力的增加。在臨界電量時肥皂膜變形時表面張力增加與電吸引力增加相等，故計算肥皂膜分別計算肥皂膜變形時二力的變化，在求出何時兩力會平衡，即為臨界電量。

1. 由二. 的推導可得電荷吸引力  $= \frac{r^2 q^2 d}{8\pi \epsilon_0 l^5} (1 - \frac{1}{\kappa})$
2. 假設肥皂膜為一圓弧，原本曲率半徑  $R_1$ ，再些微變形後曲率半徑變為  $R_2$ ：(如圖(十三))  
 ( $\phi_{\max}$  為曲率半徑  $R_1$  時肥皂膜最外圍與中心到曲率中心的夾角，亦為原來肥皂膜與線圈平面接觸處夾角；  
 $\theta_{\max}$  為曲率半徑  $R_2$  時肥皂膜最外圍與中心到曲率中心的夾角，亦為變形後肥皂膜與線圈平面接觸處夾角；  
 $\phi$  為曲率半徑  $R_1$  時距肥皂膜中心  $r$  處與肥皂膜中心到曲率中心的夾角， $\theta$  為曲率半徑  $R_2$  距肥皂膜中心  $r$  處與肥皂膜中心到曲率中心的夾角)



圖(十三)變形前變形後曲率半徑分別為  $R_1$ 、 $R_2$

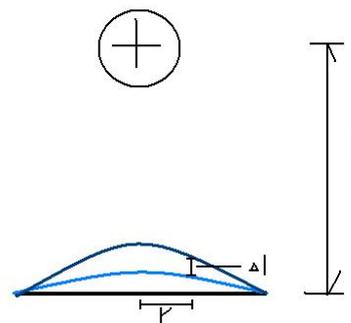
由幾何關係可知，肥皂膜與線圈平面接觸處夾角與圓弧圓心角的一半相等。

$$R_1 \sin \phi_{\max} = r_0, R_1 \sin \phi = r$$

$$R_2 \sin \theta_{\max} = r_0, R_2 \sin \theta = r$$

$$\text{定義 } \Delta \theta = \theta_{\max} - \phi_{\max}$$

3. 當肥皂膜與線圈接觸處角度變化  $\Delta \theta$ ，距中心  $r$  處與金屬球的距離縮小  $\Delta l$  (如圖十四)



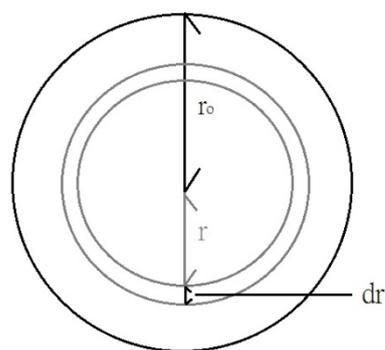
圖(十四)距中心  $r$  處的  $\Delta l$

$$\begin{aligned} \Delta l &= R_1(\cos\phi - \cos\phi_{\max}) - R_2(\cos\theta - \cos\theta_{\max}) \\ &= R_1\left(\sqrt{1 - \frac{r^2}{R_1^2}} - \sqrt{1 - \frac{r_0^2}{R_1^2}}\right) - R_2\left(\sqrt{1 - \frac{r^2}{R_2^2}} - \sqrt{1 - \frac{r_0^2}{R_2^2}}\right) \\ &= R_1 \times \frac{r_0^2 - r^2}{2R_1^2} - R_2 \times \frac{r_0^2 - r^2}{2R_2^2} \\ &= \frac{(r_0^2 - r^2)}{2} \times \left(\frac{1}{2R_1} - \frac{1}{2R_2}\right) \\ &= \frac{(r_0^2 - r^2)}{2} \left(\frac{\phi_{\max}}{r_0} - \frac{\theta_{\max}}{r_0}\right) = \frac{(r_0^2 - r^2)}{2r_0} \Delta \theta \end{aligned}$$

10

所以在距離中心  $r$  處， $\Delta l = \frac{(r_0^2 - r^2)}{2r_0} \Delta \theta$

4. 考慮半徑  $r$ ，寬度  $dr \approx 0$  的一個環(如圖十五)，在肥皂膜兩面產生的感應電荷由高斯定律可得：



圖(十五)半徑  $r$ ，寬度  $dr$  的環

$$\text{該環產生的感應電荷 } q' = \epsilon_0 \left[ 2\pi r dr \frac{1}{4\pi \epsilon_0 l^2} \left(1 - \frac{1}{\kappa}\right) \right]$$

$$q' = \frac{rq}{2l^2} \left(1 - \frac{1}{\kappa}\right) dr$$

5. 帶電物對此圓環的吸引力:

$$dF = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} = \frac{rq^2d}{4\pi\epsilon_0l^5} \left(1 - \frac{1}{\kappa}\right) dr$$

當距離改變  $\Delta l$  時，該環受的吸引力改變:

$$d\Delta F = \frac{-5q^2d}{4\pi\epsilon_0} \left(1 - \frac{1}{\kappa}\right) \frac{1}{l^6} r dr \Delta l$$

6. 代入 3. 的結果:  $\Delta l = \frac{(r_0^2 - r^2)}{2r_0} \Delta \theta$

$$\Delta dF = \left[ \frac{5q^2d}{8\pi\epsilon_0 r_0 l^6} \left(1 - \frac{1}{\kappa}\right) \Delta \theta \right] (r_0^2 - r^2) r dr$$

將所有環積分起來，得到電吸引力的增加:

$$\int_0^F d\Delta F = \int_0^{r_0} \left[ \frac{5q^2d}{8\pi\epsilon_0 r_0 l^6} \left(1 - \frac{1}{\kappa}\right) \Delta \theta \right] (r_0^2 - r^2) r dr$$

$$\Delta F = \frac{5q^2 dr_0^3}{32\pi\epsilon_0 l^6} \left(1 - \frac{1}{\kappa}\right) \Delta \theta$$

7. 表面張力的增加:

$$\Delta(2\pi r \sin \theta) = 2\pi r \sigma \cos \theta \Delta \theta$$

8. 表面張力增加與電吸引力增加相等:

$$\frac{5q^2 dr_0^3}{32\pi\epsilon_0 l^6} \left(1 - \frac{1}{\kappa}\right) \Delta \theta = 2\pi r \sigma \cos \theta \Delta \theta$$

$$\therefore q^2 = \frac{64\pi^2 \epsilon_0 \sigma \cos \theta}{5dr_0^2 \left(1 - \frac{1}{\kappa}\right)} l^6$$

9. 當  $\theta$  不大， $\cos \theta \approx 1$

$$\therefore q^2 \propto \frac{l^6}{r_0^2}$$

$$q \propto \frac{l^3}{r_0}$$

此公式為臨界電量與距離、線圈半徑的關係。

10. 驗電器夾角( $\varphi$ )與帶電量( $q$ )關係:

因為無法直接得到金屬球的電量，故須藉由驗電器的張角來計算金屬球帶電量。

(1) 假設電荷集中於底部的鋁箔球上:

$$F \propto \frac{q^2}{(2R \sin \frac{\varphi}{2})^2}$$

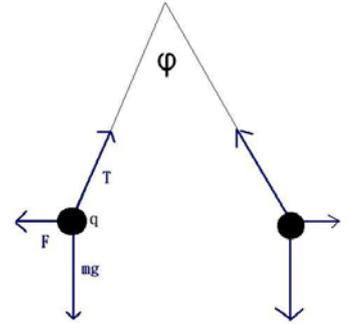
( $F$  為電排斥力， $q$  金屬球帶電量， $R$  為驗電器鋁箔長度。 $\varphi$  為驗電器張角。)

(2) 重力、鋁箔張力與電力達到平衡，如圖(十六):

$$mg \tan \frac{\varphi}{2} = F$$

$$mg \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\cos \frac{\varphi}{2}} = k_3 \frac{q^2}{R^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \quad (k_3 \text{ 為常數})$$

$$\frac{R^2 mg \sin^3 \frac{\varphi}{2}}{k_3 \cos \frac{\varphi}{2}} = q^2$$



圖(十六)驗電器示意圖

11. 臨界電量時，驗電器夾角( $\varphi$ )與距離( $l$ )關係:

將 9. 與 10. 的結果合起來得: ( $K$  為常數)

( $\varphi$  為驗電器夾角， $l$  為帶電物與肥皂膜距離， $r$  為線圈半徑， $K$  為常數)

$$\therefore \frac{\sin^3 \frac{\varphi}{2}}{\cos \frac{\varphi}{2}} = K \frac{l^6}{r^2}$$

此式特別的地方在於驗電器張角( $\varphi$ )與金屬球和肥皂膜距離( $l$ )皆可於實驗中測量。

依照前述的理論推導， $\frac{\sin^3 \frac{\varphi}{2}}{\cos \frac{\varphi}{2}}$  與  $\frac{l^6}{r^2}$  應會有正比的關係，我們將於實驗中驗證此理論結果是否正確。

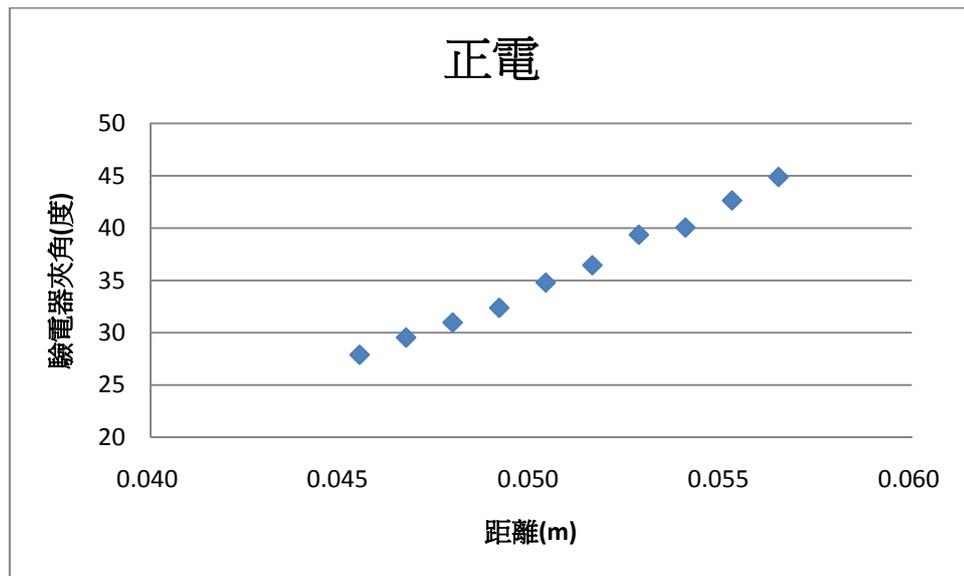
#### 四、臨界電量與距離關係：

##### (一) 實驗方法：

1. 每次測量前先將帶電物接地確定其不帶電。
2. 將線圈浸入溶液形成肥皂膜，並將其至於帶電物底下。
3. 轉動韋氏起電機使金屬球帶電，並錄影紀錄驗電器夾角與肥皂膜形變狀況。
4. 截取肥皂膜破裂之瞬間的圖片，以軟體 Image J 測量驗電器夾角。
5. 重複 1.~3. 步驟多次，求取平均值。
6. 改變帶電金屬球與線圈的距離，並重複 1.~5. 的步驟。

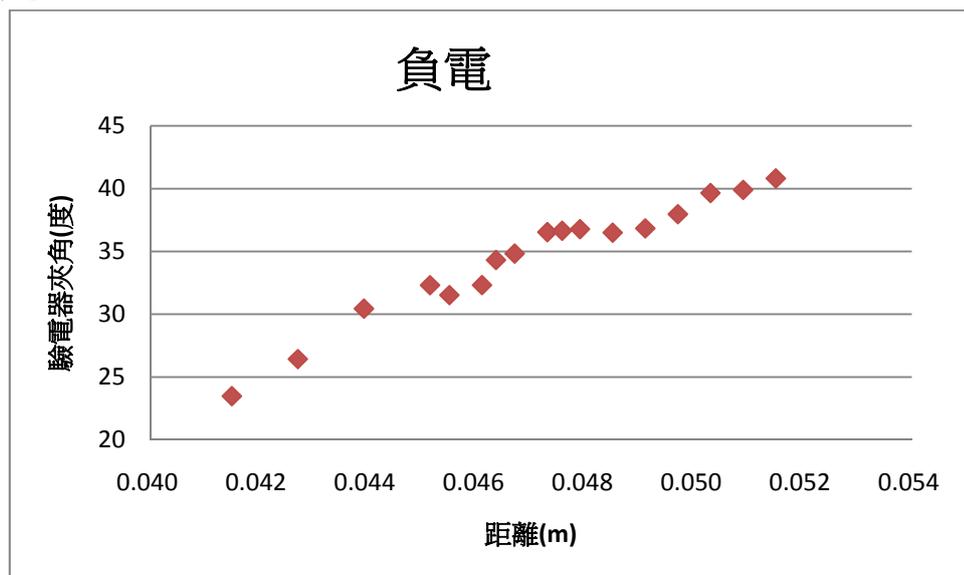
##### (二) 臨界電量下驗電器夾角與距離關係：

###### 1. 正電：



圖(十七)(a)帶電物為正電時，臨界電量下距離與驗電器夾角關係。

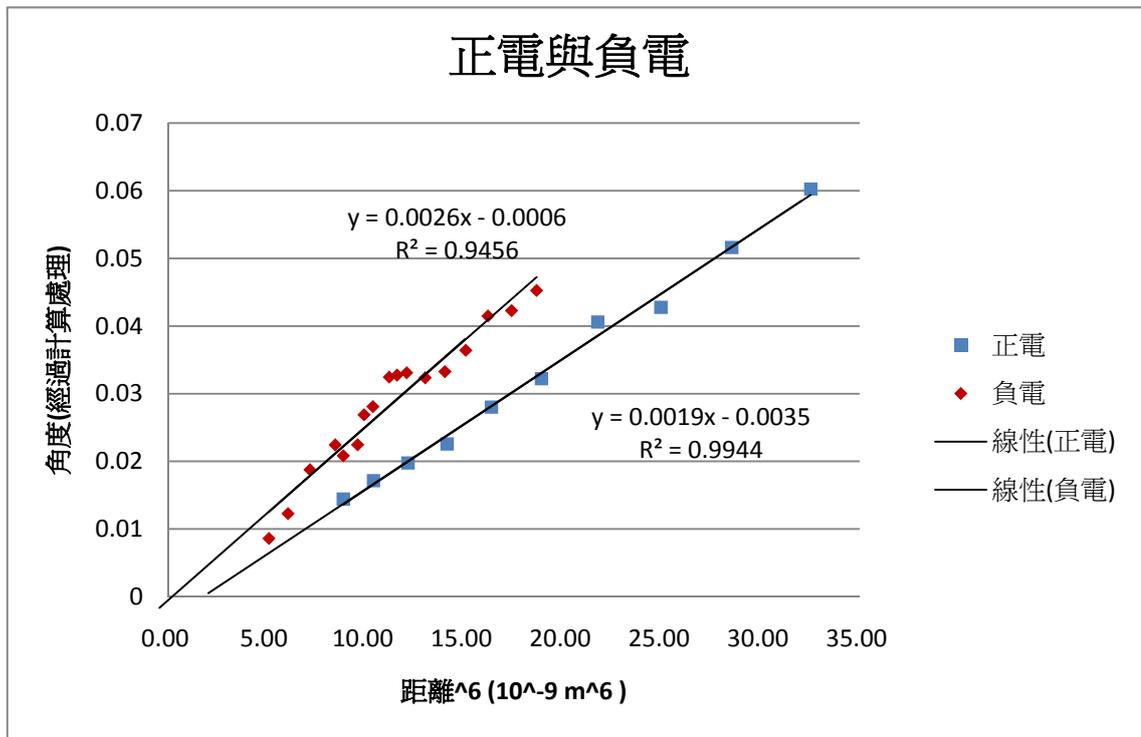
###### 2. 負電：



圖(十七)(b) 帶電物為負電時，臨界電量下距離與驗電器夾角關係。

3. 由(圖十七)(a)(b)可知不論電性為正電或負電，在臨界電量時線圈與帶電物距離越小驗電器夾角越小。驗電器夾角與電量成正相關，故知距離越小臨界電量越小。

(三)  $\frac{\sin^3 \frac{\varphi}{2}}{\cos \frac{\varphi}{2}} = K \frac{l^6}{r^2}$  式的驗證



圖(十八)橫軸為距離的六次方( $l_0^6$ )，縱軸為 $\frac{\sin^3 \frac{\varphi}{2}}{\cos \frac{\varphi}{2}}$ 。兩線都接近通過原點，負電的斜率大於正電。

(1) 由(圖十八)可知 $\frac{\sin^3 \frac{\varphi}{2}}{\cos \frac{\varphi}{2}}$ 與 $l^6$ 做圖結果以最小平方方法所得的回歸直線幾乎通過

原點(截距很小)，表示 $r$ 相同時式 $\frac{\sin^3 \frac{\varphi}{2}}{\cos \frac{\varphi}{2}} = K \frac{l^6}{r^2}$ 在金屬球帶正電或負電時皆成立，支持臨界電量與驗電器的理論。

(2) 由驗電器得計算可知， $\frac{\sin^3 \frac{\varphi}{2}}{\cos \frac{\varphi}{2}}$ 代表的意義為 $q^2$ ，所以可得 $q \propto l^3$ 。

( $q$ 為臨界電量， $l$ 為金屬球與肥皂膜距離)

(3) 負電的回歸直線斜率較正電者為大，推測原因是當金屬球帶負電時，其上部分電子噴出至肥皂膜上，故帶些微負電的肥皂膜須被極化的更厲害才能被吸引至破裂；而當金屬球帶正電時，肥皂膜維持電中性，故臨界電量較小。

#### 五、線圈半徑對臨界電量的影響：

(一)理論推算：

由式子 $\frac{\sin^3 \frac{\varphi}{2}}{\cos \frac{\varphi}{2}} = K \frac{l^6}{r^2}$ 推測以 $\frac{\sin^3 \frac{\varphi}{2}}{\cos \frac{\varphi}{2}}$ 對 $l^6$ 做圖時，斜率會與 $r^2$ 成反比，所以線圈半徑( $r$ )越大，斜率應越小。

(二)實驗方法:

1. 製作一半徑較原線圈稍大的線圈。
2. 已游標尺測量兩線圈的內徑與外徑，並求取平均值。
3. 測量此線圈產生的肥皂膜在不同距離下的臨界電量。(方法與前面實驗相同)

(三)實驗結果:

1. 測量兩種不同半徑線圈的臨界電量:(如圖(十九))  
其中較小的線圈即為其他實驗中所用的線圈。



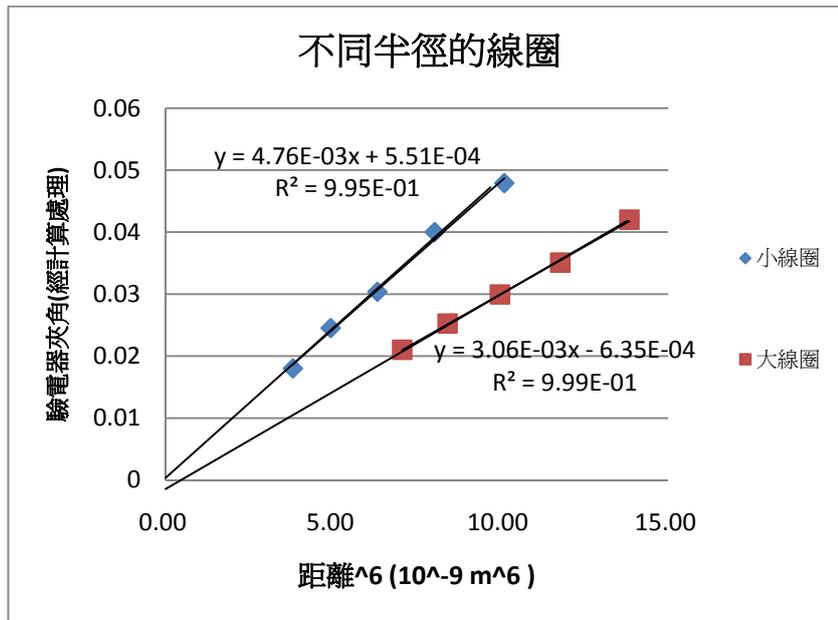
圖(十九)

2. 以游標測量線圈之內外直徑，因線圈非標準正圓，故取二垂直方向測量再取平均。

線圈半徑測量		第一次(cm)	第二次(cm)	平均(cm)	內外徑平均 (cm)
小	外徑	2.135	2.14	2.1375	2.0575
	內徑	1.99	1.965	1.9775	
大	外徑	2.48	2.58	2.53	2.452
	內徑	2.463	2.285	2.374	

表(一)

3. 在正電的臨界電量下，兩個線圈分別以  $\frac{\sin^3 \frac{\varphi}{2}}{\cos \frac{\varphi}{2}}$  對  $l^6$  做圖:



圖(二十)橫軸為距離的六次方( $l_0^6$ )，縱軸為  $\frac{\sin^3 \frac{\varphi}{2}}{\cos \frac{\varphi}{2}}$  線圈半徑越大，斜率越小。

- (1) 半徑大的線圈，回歸直線的斜率較小，與理論相同。代表相同距離下，線圈半徑越大臨界電量越小。

(2) 結果比較

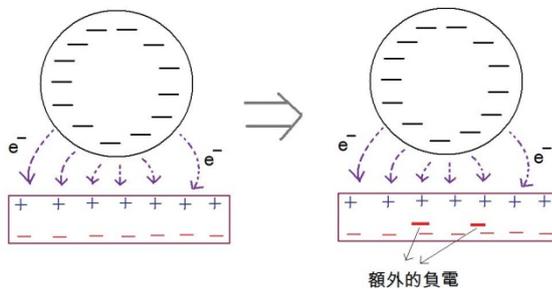
	斜率(m)	平均半徑(r)	m x r <sup>2</sup>
小半徑	4.76x10 <sup>-3</sup>	2.06cm	0.0202
大半徑	3.06 x10 <sup>-3</sup>	2.45cm	0.0184

表(二) 斜率(m) x 半徑(r)的平方約為定值，斜率約與 r<sup>2</sup>成反比，支持理

論推導出的  $\frac{\sin^3 \frac{\varphi}{2}}{\cos \frac{\varphi}{2}} = K \frac{l^6}{r^2}$ 。

六、將線圈接地：

(一)在 實驗與結果討論 四. 臨界電量與距離關係 中，正電負電在相同條件下回歸直線擁有不同的斜率，推測是肥皂膜被不同程度的感應了與帶電物相同的電荷。帶電物帶負電時，其上的電子比較容易脫離而噴發出去，如圖(二十一)所示，噴發出去的電子部分被肥皂膜所接收，於是肥皂膜帶一淨負電荷。



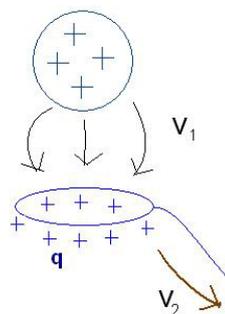
圖(二十一)肥皂膜因接收到金屬球噴發出的電子，帶了額外的電荷。

(二)達平衡時，如圖(二十二)，電荷由帶電物轉移至肥皂膜上的速率(v<sub>1</sub>)與電荷經由線圈或其他方式流失的速率(v<sub>2</sub>)相同，此時肥皂膜帶一額外的負電(q)，所以帶電物須帶更大量的電量方能達到使肥皂膜破裂的臨界電量。

$$\frac{dq}{dt} = v_1 - v_2$$

假設v<sub>2</sub>與膜帶電量成正比，即v<sub>2</sub> = kv (k為常數)

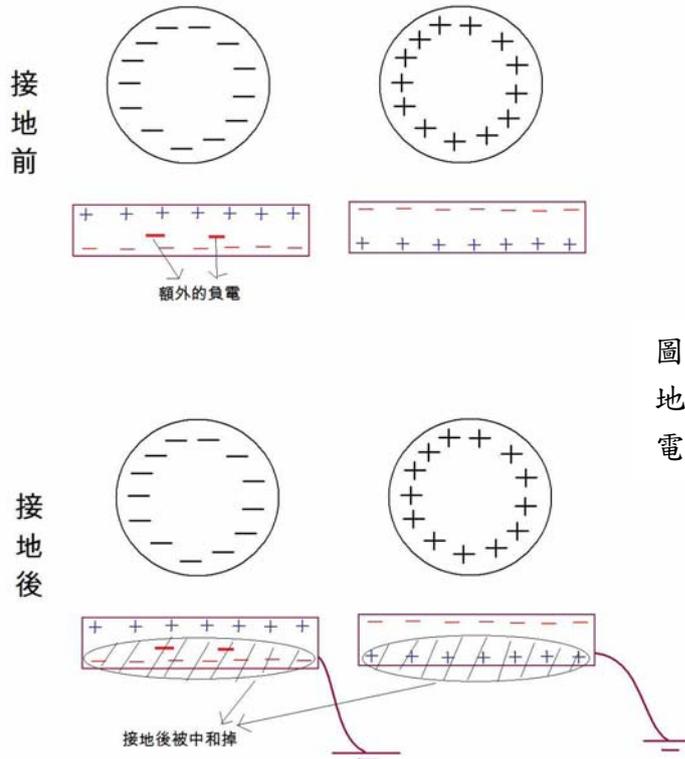
達平衡時  $\frac{dq}{dt} = 0$  , ∴ v<sub>1</sub> = v<sub>2</sub> ⇒ q =  $\frac{v_1}{k}$



圖(二十二)接地前的線圈，肥皂膜接收到電荷的速率與流失電荷的速率達平衡。

(三)若將線圈接地如圖(二十三)，肥皂膜下端被排斥的同性電荷因接地而被中和掉，只剩下上層異性電荷，所以此時因為電子噴出而產生的差異被消除了。若前面推論是正確的，接地後同條件下臨界電量應較未接地時為小，亦即以  $\frac{\sin^3 \frac{\varphi}{2}}{\cos \frac{\varphi}{2}}$  對 l<sup>6</sup> 做圖時斜率會變小。另外因為接地後正負電的差異被消除了，所以金屬球帶正電與帶

負電應具有相同的效應，有相同的臨界電量，正負電的斜率的差異應會消失。



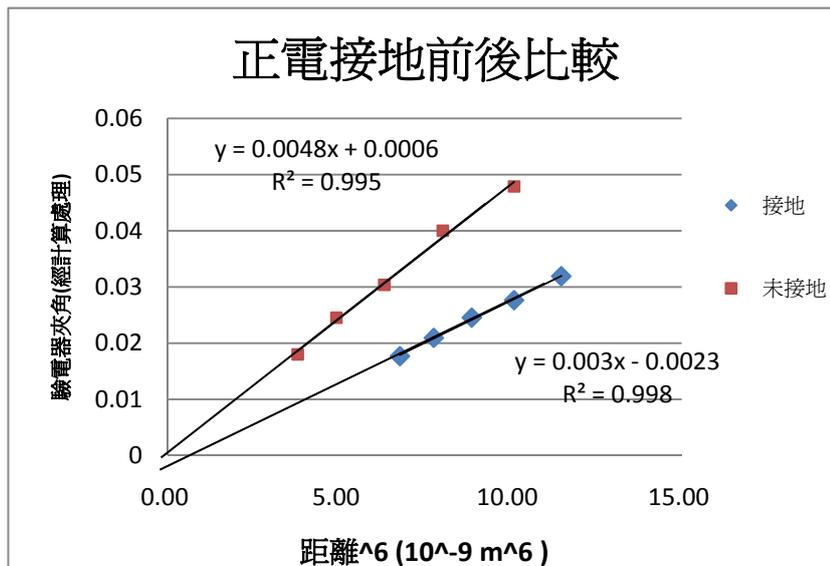
圖(二十三)線圈接地後，肥皂膜下端的電荷被中和掉。

(四)實驗方法:

1. 將線圈絕緣，在不同距離下測量臨界電量時驗電器夾角(同前面實驗)
2. 將線圈以鱷魚夾連接至一大金屬導體(接觸點先以砂紙磨過,確保其導電良好),使線圈接地。
3. 在接地的情況下重複步驟 1. 的測量。

(五)實驗結果:

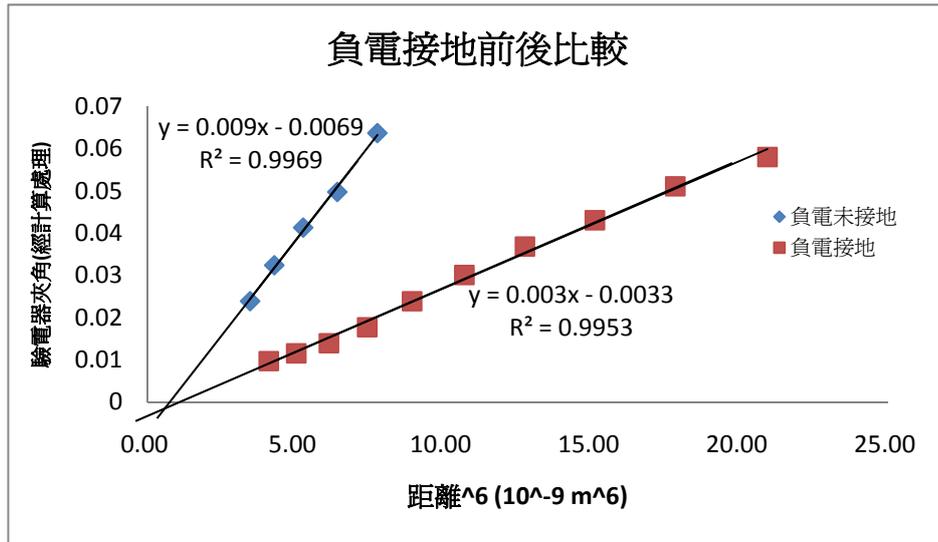
1. 正電接地前後比較:



圖(二十四) 橫軸為距離的六次方( $l_0^6$ )，縱軸為 $\frac{\sin^3 \frac{\varphi}{2}}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}}$ ，金屬球帶正電。

- (1) 接地後回歸直線斜率降低，表示相同距離下臨界電量降低。

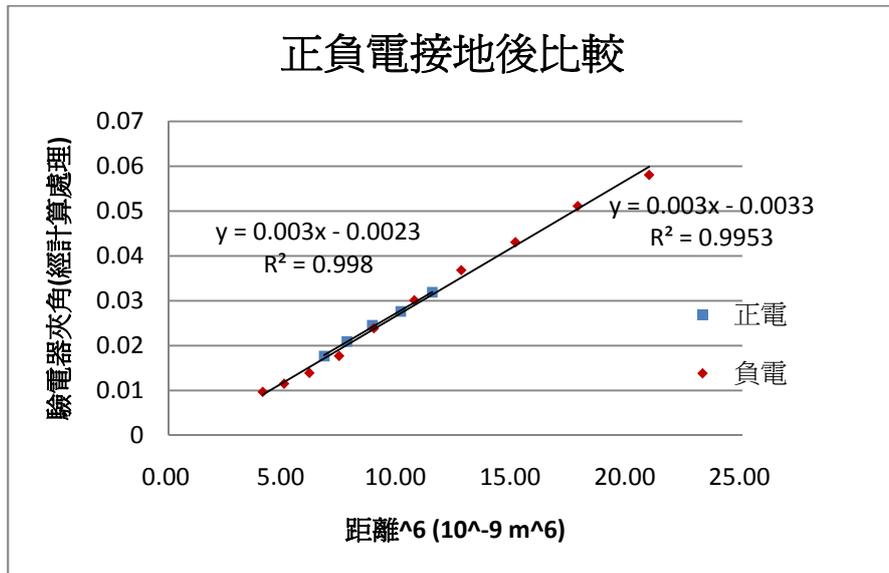
2. 負電接地前後比較：



圖(二十五) 橫軸為距離的六次方( $l_0^6$ )，縱軸為 $\frac{\sin^3 \frac{\phi}{2}}{\cos \frac{\phi}{2}}$ 。金屬球帶負電。

- (1) 接地後回歸直線斜率降低，與正電時的效應相似。
- (2) 正負電接地後斜率皆降低，支持接地後肥皂膜下方同性感應電荷被消除的理論。

3. 接地後正負電效應比較：



圖(二十六) 線圈接地，金屬球帶正電與負電的比較。橫軸為距離的六次方( $l_0^6$ )，

縱軸為 $\frac{\sin^3 \frac{\phi}{2}}{\cos \frac{\phi}{2}}$ 。

- (1) 正電負電之回歸線幾乎重合，斜率相等，顯示正負電接地後對肥皂膜的吸引效應幾乎一樣。
- (2) 接地後肥皂膜遠離帶電物一側的感應電荷被中和掉，去除掉金屬球噴發出的電子的影響後，正負電荷對肥皂膜的臨界電量相同，支持前面對正負電斜率差異的解釋。

## 陸、 結論

- 一、 不論正負電，肥皂膜皆會受帶電物吸引。
- 二、 由理論可推導出肥皂膜形狀的公式，由 excel 畫出形狀後，發現與實驗中的真實形狀相近。
- 三、 當帶電物電量達到一定量時，肥皂膜的張力將無法抵抗電吸引力，於是肥皂膜會持續變形直到破裂，稱此電量為臨界電量。
- 四、 不論正負電，距離越近，臨界電量越小(驗電器角度越小)。
- 五、 臨界電量時， $\frac{\sin^3 \frac{\phi}{2}}{\cos \frac{\phi}{2}}$ ( $\phi$  為驗電器夾角)與距離六次方( $l^6$ )成正比。
- 六、 臨界電量與距離三次方成正比( $q \propto l^3$ )。
- 七、 以 $\frac{\sin^3 \frac{\phi}{2}}{\cos \frac{\phi}{2}}$ (代表意義為  $q^2$ )對 $l^6$ 做圖時，負電斜率較正電為大，亦即負電臨界電量較大。  
原因可能與負電較亦傳至肥皂膜所造成。
- 八、 臨界電量約略與  $r^2$  成反比。亦即線圈半徑越大，臨界電量越小。
- 九、 將線圈接地後，不論正電或負電，臨界電量都減小。
- 十、 線圈接地後，正負電在相同條件下臨界電量幾乎一樣。

## 柒、 未來展望:

- 一、 未來可嘗試使用不同液體(例如酒精)來製作肥皂膜，理論上不同液體有不同介電常數值，應會有不同的臨界電量。
- 二、 理論推導方面有些部分過於簡化，未來可將其改進，以期能更加符合實驗結果。

## 捌、 參考資料:

- 一、 <普通物理(Halliday 著)>，第 22 章電場。
- 二、 <普通物理(Halliday 著)>，第 23 章高斯定律。
- 三、 <普通物理(Halliday 著)>，第 25 章電容。(關於介電常數的部分)
- 四、 <微積分(James Steward 著)>，第五章積分。
- 五、 <啟發性物理學力學—牛頓力學、彈性、流體和熱力學>有關表面張力的部分。
- 六、 <Instructions & Applications for Van De Graff Generator>  
([www.rmcybernetics.com/files/pdf/vdg.pdf](http://www.rmcybernetics.com/files/pdf/vdg.pdf))

## 玖、 備註

### 一、 實驗數據：

#### (一) 臨界電量與距離關係：

##### 1. 正電

墊紙張數	距離(公分)	與球心距離(m)	$l^6$ $10^9$	$l^6 \times$ $10^9$	1(度)	2(度)	3(度)	4(度)	5(度)	6(度)	平均(度)	$\frac{\sin^3 \frac{\phi}{2}}{\cos \frac{\phi}{2}}$
18	1.2	0.046	8.9E-09	8.87	26.19	27.82	27.96	29.58			27.8875	0.014417
16	1.32	0.047	1.0E-08	10.40	28.21	30.28	30.58	29.1			29.5425	0.01714
14	1.44	0.048	1.2E-08	12.15	29.39	32.49	31.05				30.97667	0.019761
12	1.56	0.049	1.4E-08	14.13	31.08	33.34	32.16	32.92			32.375	0.022561
10	1.69	0.050	1.6E-08	16.37	35.89	34.1	34.29	34.9			34.795	0.028012
8	1.81	0.052	1.9E-08	18.90	36.74	36.4	36.11	36.57			36.455	0.03222
6	1.93	0.053	2.2E-08	21.75	39	40.54	39.48	38.47			39.3725	0.040601
4	2.056	0.054	2.5E-08	24.95	39.11	40.76	40.23	40.14			40.06	0.042769
2	2.18	0.055	2.9E-08	28.53	41.8	42.6	42.61	43.57	41.75	42.69	42.645	0.051609
0	2.3	0.057	3.3E-08	32.53	44.29	45.87	43.99	45.44			44.8975	0.060246

##### 2. 負電

紙張數	距離(公分)	與球心距離(m)	$l^6$	$l^6 \times$ $10^9$	1	2	3	4	5	6	平均角度	$\frac{\sin^3 \frac{\phi}{2}}{\cos \frac{\phi}{2}}$
16	1.2	0.046	8.9E-09	8.87	31.52						31.52	0.0208
15	1.26	0.046	9.6E-09	9.60	32.32						32.32	0.0224
14	1.32	0.047	1.0E-08	10.37	36.56	34	33.92				34.83	0.0280
13	1.38	0.047	1.1E-08	11.20	36.54						36.54	0.0324
12	1.44	0.048	1.2E-08	12.08	36.78						36.78	0.0331
11	1.5	0.049	1.3E-08	13.02	36.5						36.5	0.0323
10	1.56	0.049	1.4E-08	14.01	37.11	36.99	36.42				36.84	0.0333
9	1.62	0.050	1.5E-08	15.07	37.6	38.27	37.86	38.15			37.97	0.0364
8	1.68	0.050	1.6E-08	16.20	39.44	39.9	39.63				39.656	0.0415
7	1.74	0.051	1.7E-08	17.39	40.18	39.65	39.89				39.91	0.0423
6	1.8	0.052	1.9E-08	18.66	39.64	40.72	41.53	41.4			40.83	0.0453

#### (二) 線圈半徑對臨界電量的影響的實驗：

##### 1. 大半徑：

紙張數	距離(公分)	與球心距離	$l^6$	$l^6 \times$ $10^9$	1	2	3	4	5	平均角度	$\frac{\sin^3 \frac{\phi}{2}}{\cos \frac{\phi}{2}}$
16	0.51	0.039	3.3E-09	3.31	18.88					18.88	0.0045
14	0.64	0.040	4.0E-09	4.03	19.61	23.72				21.67	0.0068
12	0.77	0.041	4.9E-09	4.89	25.29	23.89	23.32			24.17	0.0094

10	0.9	0.043	5.9E-09	5.89	24.02	27.02	26.59			25.88	0.0115
8	1.03	0.044	7.1E-09	7.06	31.77	31.99	30.98	30.89	32.46	31.62	0.0210
6	1.16	0.045	8.4E-09	8.42	33.91	34.8	32.14			33.62	0.0253
4	1.29	0.046	1.0E-08	9.98	34.47	36.47	36.42	34.94		35.58	0.0299
2	1.42	0.048	1.2E-08	11.78	37.02	37.98				37.50	0.0351
0	1.55	0.049	1.4E-08	13.84	39.91	39.71	39.84			39.82	0.0420

(三) 接地實驗:

1. 正電接地:

	距離 (公分)	與球 心距 離	1 <sup>6</sup>	1 <sup>6</sup> x 10 <sup>9</sup>	1	2	3	4	5	6	平均 角度	$\frac{\sin^3 \frac{\phi}{2}}{\cos \frac{\phi}{2}}$
18	1	0.044	6.8E-09	6.78	30.62	29.53	29.38				29.8	0.0177
16	1.1	0.045	7.8E-09	7.77	31.89	31.3	31.16	31.95			31.58	0.0210
14	1.2	0.046	8.9E-09	8.87	32.93	34.26	32.68				33.29	0.0245
12	1.3	0.047	1.0E-08	10.11	33.52	34.97	35.42				34.64	0.0276
10	1.4	0.048	1.1E-08	11.49	36.25	36.61	36.59	35.88	36.35		36.34	0.0319

2. 負電接地:

	距離 (公分)	與球心 距離(m)	1 <sup>6</sup>	1 <sup>6</sup> x 10 <sup>9</sup>	1	2	3	4	5	6	平均 角度	$\frac{\sin^3 \frac{\phi}{2}}{\cos \frac{\phi}{2}}$
18	0.65	0.040	4.1E-09	4.10	24.19	24.68					24.435	0.0097
16	0.79	0.041	5.0E-09	5.03	24.5	27.26					25.880	0.0115
14	0.93	0.043	6.1E-09	6.13	27.72	27.42					27.570	0.0139
12	1.07	0.044	7.4E-09	7.42	30.18	29.05	30.37				29.867	0.0177
10	1.21	0.046	8.9E-09	8.94	33.58	32.41					32.995	0.0239
8	1.34	0.047	1.1E-08	10.70	36.86	34.3	35.77				35.643	0.0301
6	1.48	0.048	1.3E-08	12.75	38.32	39.83	35.49	38.72	38.22		38.116	0.0368
4	1.62	0.050	1.5E-08	15.11	37.41	41.35	40.96	40.9			40.155	0.0431
2	1.76	0.051	1.8E-08	17.83	42.18	41.83	43.52				42.510	0.0511
0	1.90	0.053	2.1E-08	20.94	44.35						44.350	0.0581

3. 正電未接地

	距離 (公分)	與球心 距離	1 <sup>6</sup>	1 <sup>6</sup> x 10 <sup>9</sup>	1	2	3	4	5	6	平均角 度	
8	0.6	0.040	3.8E-09	3.80	31.06	28.99					30.03	0.018
6	0.775	0.041	4.9E-09	4.93	31.12	35.45					33.29	0.025
4	0.95	0.043	6.3E-09	6.32	33.79	37.06	36.38				35.74	0.030
2	1.125	0.045	8.0E-09	8.03	36.18	37.68	42.55	40.31			39.18	0.040

0	1.3	0.047	1.0E-08	10.11	41.64	41.31	41.2	42.25			41.60	0.048
---	-----	-------	---------	-------	-------	-------	------	-------	--	--	-------	-------

4. 負電未接地:

	距離 (公分)	與球心 距離	$I^6$	$I^6 \times 10^9$	1	2	3	4	5	平均角 度	
10	0.4	0.038	2.8E-09	2.78			24.36	25.86		25.110	0.011
8	0.54	0.039	3.5E-09	3.46	32.8	33.7	32.48			32.993	0.024
6	0.68	0.040	4.3E-09	4.28	36.91	36.14				36.525	0.032
4	0.82	0.042	5.3E-09	5.26	35.03	35.55	42.02	44.01	41.43	39.608	0.041
2	0.96	0.043	6.4E-09	6.41	40.32		43.94			42.130	0.050