第九屆旺宏科學獎

成果報告書

參賽編號：SA9-332

作品名稱：十八啦！擲骰子，求組合數

姓名：黃舒欣

關鍵字：矩陣、組合數、骰子和

十八啦！擲骰子，求組合數

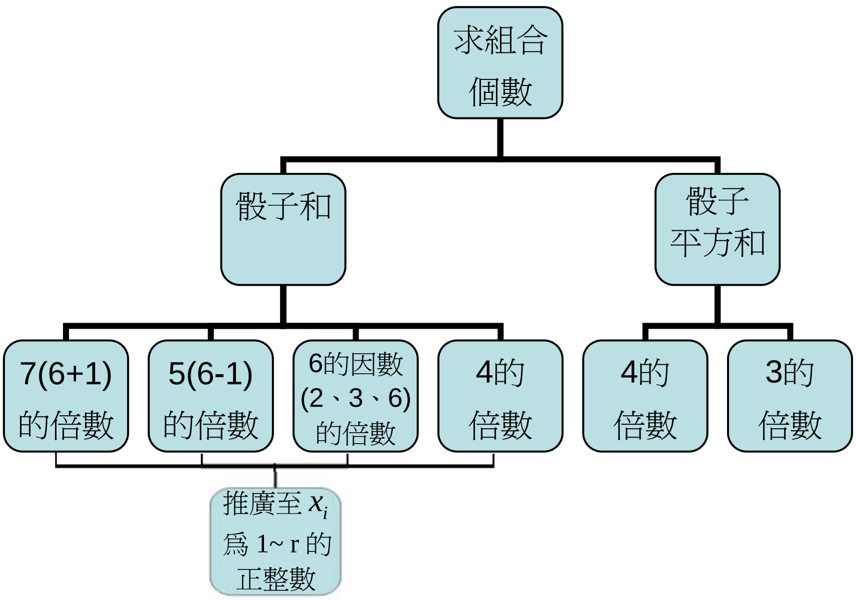
摘要

我所研究的問題是由許志農教授在「高中數學大賞」書中所提出的問題：設一骰子連續投擲 n 次出現的點數依序爲 x_1，x_2，⋯，x_n，令 $Y_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$，試求 Y_n 爲 7、5、3 的倍數之機率爲 P_n。突破以往使用機率方式求解，我改採用矩陣列出餘數爲 0、1、2⋯的所有組合個數，透過矩陣的運算，觀察到各元素間的關係，進而解決上述問題。延續這個技巧，我再次處理骰子平方和爲 4、3 的倍數的組合個數。

壹、研究動機

在一堂數學課中，老師拿了一本許志農教授寫的「高中數學大賞」給我研讀，我對書中的某一題題目很感興趣(設一骰子連續投擲 n 次出現的點數依序爲 x_1，x_2，⋯，x_n，令 $Y_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$，試求 Y_n 爲 7 的倍數之機率爲 P_n)，一開始我以樹狀圖列出滿足條件的所有可能性，並觀察其特性，發現數字間似乎存在某種規律，讓我感到非常雀躍。經過許多次的嘗試後，發現矩陣非常符合我的需求，因此我開始深入的學習矩陣並利用其解決相關問題。

貳、研究目的



一、設一骰子連續投擲 n 次出現的點數依序爲 x_1，x_2，⋯，x_n，令 $Y_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ 爲 7 的倍數時，組合個數 a_n 的一般解。遵循著七的倍數的方法，討論 Y_n 爲五、六、三的倍數時，試求 Y_n 組合個數。

二、設 x_i 爲 1~r 的正整數，令 $Y_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ 爲(r+1)的倍數時，組合個數 a_n 的一般解。接著討論 Y_n 爲(r-1)、(r 的因數)的倍數時的組合個數 a_n。

三、設一骰子連續投擲 n 次出現的點數依序爲 x_1，x_2，⋯，x_n，令 $Y_n = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$，試求 Y_n 爲 4 的倍數時，組合個數 a_n 的一般解。接著討論 Y_n 爲 3 的倍數時的組合個數 a_n。

參、研究設備器材

Math type 軟體、Maple 軟體、筆、紙

肆、研究過程或方法

一、 名詞定義與基本性質

(一)、轉換矩陣 $A=\left[a_{ij}\right]$，其中 a_{ij} 表示使 $Y_{n\text{-}1}\equiv(j\text{-}1)(\bmod r)$ 轉變爲 $Y_n\equiv(i\text{-}1)(\bmod r)$ 的 x_n 所有可能情形個數

例：設骰子連續投擲n次後，討論 Y_n 爲五的倍數時，所對應的轉換矩陣A，其中 a_{11} 爲使 $Y_{n\text{-}1}\equiv(1\text{-}1)(\bmod 5)\equiv 0(\bmod 5)$ 轉變爲 $Y_n\equiv(1\text{-}1)(\bmod 5)\equiv 0(\bmod 5)$，不論n爲任意正整數，此情形皆發生在 $x_n=5$ 一種而已，所以 a_{11}=1；而 a_{15} 爲使 $Y_{n\text{-}1}\equiv(5\text{-}1)(\bmod 5)\equiv 4(\bmod 5)$ 轉變爲 $Y_n\equiv(1\text{-}1)(\bmod 5)\equiv 0(\bmod 5)$ 發生在 $x_n=1,6$ 兩種情形，所以 a_{15}=2。

列出所對應的轉換矩陣 A：$\begin{bmatrix}1&1&1&1&2\\2&1&1&1&1\\1&2&1&1&1\\1&1&2&1&1\\1&1&1&2&1\end{bmatrix}$

(二)、行矩陣 $Y^{(n)}=\begin{bmatrix}y_1^{(n)}\\y_2^{(n)}\\\vdots\\y_r^{(n)}\end{bmatrix}$，$y_i^{(n)}$ 爲 $Y_n\equiv(i\text{-}1)(\bmod r)$ 的組合個數。其中 $Y^{(0)}=\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$。

(三)、$\left[t\right]$ 代表小於等於 t 的最大整數值。

(四)、基本性質：$Y^{(n)}=AY^{(n\text{-}1)}$，$Y^{(n)}=A^nY^{(0)}=A^n{}_{*1}$，(其中 $Y^{(0)}=\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$，$A^n{}_{*1}$ 表示 A^n 的第一行。)

二、 擲骰子求和爲七的倍數

(一)、遊戲規則

設一骰子連續投擲 n 次出現的點數依序爲 x_1，x_2，⋯，x_n，令 $Y_n=x_1+x_2+\cdots+x_n$，試求 Y_n 爲 7 的倍數時，組合個數 a_n 的一般解。

(二)、利用矩陣列出每項數字並觀察其規律

利用矩陣，不僅能幫助我看到所求 a_n 的變化規律，且能一併處理其他餘數的情形，甚至它們之間的關聯，因此我採用矩陣，來解決這個問題。

根據所定義的轉換矩陣，列出

$$A=\begin{bmatrix}0&1&1&1&1&1&1\\1&0&1&1&1&1&1\\1&1&0&1&1&1&1\\1&1&1&0&1&1&1\\1&1&1&1&0&1&1\\1&1&1&1&1&0&1\\1&1&1&1&1&1&0\end{bmatrix}$$

再藉由$Y^{(n)}=AY^{(n\text{-}1)}$的關係式及$Y^{(0)}=\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$列出$Y^{(n)}$:

$$\overset{Y^{(1)}}{\begin{bmatrix}\boxed{0}\\1\\1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}}\overset{Y^{(2)}}{\begin{bmatrix}\boxed{6}\\5\\5\\5\\5\\5\\5\end{bmatrix}}\overset{Y^{(3)}}{\begin{bmatrix}\boxed{30}\\31\\31\\31\\31\\31\\31\end{bmatrix}}\overset{Y^{(4)}}{\begin{bmatrix}\boxed{186}\\185\\185\\185\\185\\185\\185\end{bmatrix}}\overset{Y^{(5)}}{\begin{bmatrix}\boxed{1110}\\1111\\1111\\1111\\1111\\1111\\1111\end{bmatrix}}$$

所以a_1=0，a_2=6，a_3=30，a_4=186，a_5=1110

(三)、猜測$a_n=\dfrac{6^n+(-1)^{n-1}}{7}+(-1)^n=\dfrac{6}{7}\left[6^{n-1}-\left(-1\right)^{n-1}\right]$)並加以證明

性質
(1). $y_2^{(n)}=y_3^{(n)}=y_4^{(n)}=y_5^{(n)}=y_6^{(n)}=y_7^{(n)}$
(2). $y_1^{(n)}-y_2^{(n)}=\left(-1\right)^n$

證明：

(1)、

I. 當 n=1 時，$y_2^{(1)}=y_3^{(1)}=y_4^{(1)}=y_5^{(1)}=y_6^{(1)}=y_7^{(1)}=1$

II. 設$y_2^{(k)}=y_3^{(k)}=y_4^{(k)}=y_5^{(k)}=y_6^{(k)}=y_7^{(k)}$成立

則由 $Y^{(n)}=AY^{(n-1)}$推得

$$y_2^{(k+1)}=\sum_{i=1}^{7}y_i^{(k)}-y_2^{(k)}$$

$$y_3^{(k+1)}=\sum_{i=1}^{7}y_i^{(k)}-y_3^{(k)}$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$y_7^{(k+1)} = \sum_{i=1}^{7} y_i^{(k)} - y_7^{(k)}$$

$$\because y_2^{(k)} = y_3^{(k)} = y_4^{(k)} = y_5^{(k)} = y_6^{(k)} = y_7^{(k)}$$

$$\therefore y_2^{(k+1)} = y_3^{(k+1)} = y_4^{(k+1)} = y_5^{(k+1)} = y_6^{(k+1)} = y_7^{(k+1)}$$

(2)、

由(1) 及$Y^{(n)} = AY^{(n-1)}$ ，可推得 $\begin{cases} y_1^{(n+1)} = 6y_2^{(n)} \\ y_2^{(n+1)} = 5y_2^{(n)} + y_1^{(n)} \end{cases}$

$$\therefore y_1^{(n+1)} - y_2^{(n+1)} = y_2^{(n)} - y_1^{(n)} = -(y_1^{(n)} - y_2^{(n)})$$

又因爲$y_1^{(0)} - y_2^{(0)} = 1$

故可得$y_1^{(n)} - y_2^{(n)} = (-1)^n$

$\boxed{\text{推導一般式}}$

因爲投擲骰子 n 次後，共有6^n種組合情形，所以$Y^{(n)}\left[y_i^{(n)}\right]$內所有元素和爲

6^n 即$6^n = y_1^{(n)} + y_2^{(n)} + y_3^{(n)} + y_4^{(n)} + y_5^{(n)} + y_6^{(n)} + y_7^{(n)}$

$=y_1^{(n)}+6y_2^{(n)} \cdots$①

($\because y_2^{(n)} = y_3^{(n)} = y_4^{(n)} = y_5^{(n)} = y_6^{(n)} = y_7^{(n)}$)

將性質(2) $y_1^{(n)} - (-1)^n = y_2^{(n)}$帶入式子①

$6^n=7y_1^{(n)}-6(-1)^n$

所以$a_n=y_1^{(n)}=\dfrac{6^n+6(-1)^n}{7}=\dfrac{6}{7}\left[6^{n-1}-(-1)^{n-1}\right]$ 得證。

三、 擲骰子求和爲五的倍數

(一)、遊戲規則

設一骰子連續投擲 n 次出現的點數依序爲x_1，x_2，⋯，x_n，令$Y_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$，試求$Y_n$爲 5 的倍數時，組合個數$a_n$的一般解。

(二)、利用所定義的轉換矩陣列出每項數字並觀察其規律

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccc} Y^{(1)} & Y^{(2)} & Y^{(3)} & Y^{(4)} & Y^{(5)} \\ \begin{bmatrix} 1 \\ \boxed{2} \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \\ \boxed{8} \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 43 \\ 43 \\ 43 \\ \boxed{44} \\ 43 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 259 \\ 259 \\ 259 \\ 259 \\ \boxed{260} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \boxed{1556} \\ 1555 \\ 1555 \\ 1555 \\ 1555 \end{bmatrix} \end{array}$$

$a_1=1$，$a_2=7$，$a_3=43$，$a_4=259$，$a_5=1556$⋯⋯

(三)、

性質：當 n = 5t 時， $y_1^{(n)}$會比$Y^{(n)}$中的其他元素多 1；當 n = 5t+ℓ,$1 \le l \le 4$時，$y_{\ell+1}^{(n)}$會比$Y^{(n)}$中的其他元素多 1。

證明:

由$Y^{(n+1)}=AY^{(n)}$的關係，可推得$Y^{(n)}$與$Y^{(n+1)}$元素之間有下列關係：

$$\begin{cases} y_1^{(n+1)}=\sum_{i=1}^{5} y_i^{(n)}+y_5^{(n)} \\ y_2^{(n+1)}=\sum_{i=1}^{5} y_i^{(n)}+y_1^{(n)} \\ y_3^{(n+1)}=\sum_{i=1}^{5} y_i^{(n)}+y_2^{(n)} \\ y_4^{(n+1)}=\sum_{i=1}^{5} y_i^{(n)}+y_3^{(n)} \\ y_5^{(n+1)}=\sum_{i=1}^{5} y_i^{(n)}+y_4^{(n)} \end{cases}$$

其中$Y^{(0)}=\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$，依序代入正整數，即可推得此規律。

$\boxed{\text{試求一般解}}$

由上述性質可知：每五個矩陣會循環一次，且其中有一個元素會比其他項多 1。根據這樣的特性，我可以列出$y_1^{(n)}=\frac{(6^n-1)}{5}+f(n)$，以 f(n)來決定是否要比其他項多 1。

下一步來討論 f(n)，$f(n)=\begin{cases}1, & n\text{=5k}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$。我利用高斯記號的特性，將其改寫為

$f(n)=\left[\frac{n}{5}\right]-\left[\frac{n-1}{5}\right]$。最後兩部分合併成為$a_n=y_1^{(n)}=\frac{\left(6^n\text{-}1\right)}{5}+\left[\frac{n}{5}\right]-\left[\frac{n-1}{5}\right]$

四、 擲骰子求和為三的倍數

(一)、遊戲規則：

設一骰子連續投擲 n 次出現的點數依序為x_1，x_2，⋯，x_n，令$Y_n=x_1+x_2+\cdots+x_n$，試求Y_n為 3 的倍數時，組合個數a_n的一般解。

(二)、利用所定義的轉換矩陣列出每項數字並觀察其規律

$A=\begin{bmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{bmatrix}$，矩陣 A 的每個元素都相等，因為要使$Y_{n\text{-}1}\equiv(j\text{-}1)(\text{mod}\,3)$轉變為$Y_n\equiv(i\text{-}1)(\text{mod}\,3)$的所有可能情形都相等(都是各 2 種方法)。所以$\mathrm{Y}^{(\mathrm{n})}\left[y_i^{(n)}\right](1\le i\le 3)$中的元素也都會相等，且

$$a_n=y_1^{(n)}=y_2^{(n)}=y_3^{(n)}=2\sum_{i=1}^{3}y_i^{(n-1)}=2\times 6^{(n-1)}$$

五、　擲骰子求和爲四的倍數

(一)、遊戲規則

設一骰子連續投擲 n 次出現的點數依序爲 x_1 ，x_2 ，⋯，x_n ，令 $Y_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ ，試求 Y_n 爲 4 的倍數時，組合個數 a_n 的一般解。

(二)、因爲 $Y^{(n)} = A^n Y^{(0)} = A^n{}_{*1}$ ，$A^n{}_{*1}$ 表示 A^n 的第一行，所以我也可以直接列出轉換矩陣 A 及其 n 次方後的結果，來觀察 a_n 的規律：

$$A=\begin{bmatrix}1&1&2&2\\2&1&1&2\\2&2&1&1\\1&2&2&1\end{bmatrix} A^2=\begin{bmatrix}9&10&9&8\\8&9&10&9\\9&8&9&10\\10&9&8&9\end{bmatrix} A^3=\begin{bmatrix}55&53&53&55\\55&55&53&53\\53&55&55&53\\53&53&55&55\end{bmatrix}$$

$$A^4=\begin{bmatrix}322&324&326&324\\324&322&324&326\\326&324&322&324\\324&326&324&322\end{bmatrix} A^5=\begin{bmatrix}1946&1946&1942&1942\\1942&1946&1946&1942\\1942&1942&1946&1946\\1946&1942&1942&1946\end{bmatrix}$$

a_1=1，a_2=9，a_3=55，a_4=322，a_5=1946⋯⋯

從上述我可以發現第一行的元素兩兩相同，且數值差 1 或 2，但是因爲矩陣裡的數字愈乘愈大，並不容易找出更多的規律，因此我改用代數 x、d 的方式，重新列出矩陣 B，取代數字的複雜性，更可以一窺若矩陣中的元素具有兩兩相等的關係，其 n 次後的一般式：

B^1	$\begin{bmatrix}x&x&x+d&x+d\\x+d&x&x&x+d\\x+d&x+d&x&x\\x&x+d&x+d&x\end{bmatrix}$
B^2	$\begin{bmatrix}4\left(x+\frac{1}{2}d\right)^2&4\left(x+\frac{1}{2}d\right)^2+d^2&4\left(x+\frac{1}{2}d\right)^2&4\left(x+\frac{1}{2}d\right)^2-d^2\\4\left(x+\frac{1}{2}d\right)^2-d^2&4\left(x+\frac{1}{2}d\right)^2&4\left(x+\frac{1}{2}d\right)^2+d^2&4\left(x+\frac{1}{2}d\right)^2\\4\left(x+\frac{1}{2}d\right)^2&4\left(x+\frac{1}{2}d\right)^2-d^2&4\left(x+\frac{1}{2}d\right)^2&4\left(x+\frac{1}{2}d\right)^2+d^2\\4\left(x+\frac{1}{2}d\right)^2+d^2&4\left(x+\frac{1}{2}d\right)^2&4\left(x+\frac{1}{2}d\right)^2-d^2&4\left(x+\frac{1}{2}d\right)^2\end{bmatrix}$
B^3	$\begin{bmatrix}16\left(x+\frac{1}{2}d\right)^3+d^3&16\left(x+\frac{1}{2}d\right)^3-d^3&16\left(x+\frac{1}{2}d\right)^3-d^3&16\left(x+\frac{1}{2}d\right)^3+d^3\\16\left(x+\frac{1}{2}d\right)^3+d^3&16\left(x+\frac{1}{2}d\right)^3+d^3&16\left(x+\frac{1}{2}d\right)^3-d^3&16\left(x+\frac{1}{2}d\right)^3-d^3\\16\left(x+\frac{1}{2}d\right)^3-d^3&16\left(x+\frac{1}{2}d\right)^3+d^3&16\left(x+\frac{1}{2}d\right)^3+d^3&16\left(x+\frac{1}{2}d\right)^3-d^3\\16\left(x+\frac{1}{2}d\right)^3-d^3&16\left(x+\frac{1}{2}d\right)^3-d^3&16\left(x+\frac{1}{2}d\right)^3+d^3&16\left(x+\frac{1}{2}d\right)^3+d^3\end{bmatrix}$
B^4	$\begin{bmatrix}64\left(x+\frac{1}{2}d\right)^4-2d^4&64\left(x+\frac{1}{2}d\right)^4&64\left(x+\frac{1}{2}d\right)^4+2d^4&64\left(x+\frac{1}{2}d\right)^4\\64\left(x+\frac{1}{2}d\right)^4&64\left(x+\frac{1}{2}d\right)^4-2d^4&64\left(x+\frac{1}{2}d\right)^4&64\left(x+\frac{1}{2}d\right)^4+2d^4\\64\left(x+\frac{1}{2}d\right)^4+2d^4&64\left(x+\frac{1}{2}d\right)^4&64\left(x+\frac{1}{2}d\right)^4-2d^4&64\left(x+\frac{1}{2}d\right)^4\\64\left(x+\frac{1}{2}d\right)^4&64\left(x+\frac{1}{2}d\right)^4+2d^4&64\left(x+\frac{1}{2}d\right)^4&64\left(x+\frac{1}{2}d\right)^4-2d^4\end{bmatrix}$

B^5	$\begin{bmatrix} 256\left(x+\frac{1}{2}d\right)^5+2d^5 & 256\left(x+\frac{1}{2}d\right)^5+2d^5 & 256\left(x+\frac{1}{2}d\right)^5-2d^5 & 256\left(x+\frac{1}{2}d\right)^5-2d^5 \\ 256\left(x+\frac{1}{2}d\right)^5-2d^5 & 256\left(x+\frac{1}{2}d\right)^5+2d^5 & 256\left(x+\frac{1}{2}d\right)^5+2d^5 & 256\left(x+\frac{1}{2}d\right)^5-2d^5 \\ 256\left(x+\frac{1}{2}d\right)^5-2d^5 & 256\left(x+\frac{1}{2}d\right)^5-2d^5 & 256\left(x+\frac{1}{2}d\right)^5+2d^5 & 256\left(x+\frac{1}{2}d\right)^5+2d^5 \\ 256\left(x+\frac{1}{2}d\right)^5+2d^5 & 256\left(x+\frac{1}{2}d\right)^5-2d^5 & 256\left(x+\frac{1}{2}d\right)^5-2d^5 & 256\left(x+\frac{1}{2}d\right)^5+2d^5 \end{bmatrix}$

由上述矩陣可觀察出 $y_1^{(n)}+y_3^{(n)}=y_2^{(n)}+y_4^{(n)}=2(4)^{n-1}\left(x+\frac{1}{2}d\right)^n$，且每隔四個矩陣皆有特殊的關係式，分別條列如下(證明請見(三))

當 $n=4\ell$ 時的一般解($\ell\geq 0$)	當 $n=4\ell+1$ 時的一般解
性質：$\begin{cases} y_2^{(n)}+y_4^{(n)}=2\times 4^{n-1}(x+\frac{1}{2}d)^n \\ y_2^{(n)}=y_4^{(n)} \\ y_1^{(n)}-y_2^{(n)}=\frac{(-4)^{\ell}}{2}d^{4\ell} \end{cases}$ $\Rightarrow y_1^{(n)}=y_2^{(n)}+\frac{(-4)^{\ell}}{2}d^{4\ell}$ $=4^{n-1}(x+\frac{1}{2}d)^n-2(-4)^{\ell-1}d^{4\ell}$ $=4^{n-1}(x+\frac{1}{2}d)^n-2(-4)^{\frac{n-4}{4}}d^n$	性質：$\begin{cases} y_1^{(n)}=y_4^{(n)} \\ y_2^{(n)}=y_3^{(n)} \\ y_1^{(n)}-y_3^{(n)}=-(-4)^{\ell}d^{4\ell+1} \\ y_1^{(n)}+y_3^{(n)}=2\times 4^{n-1}(x+\frac{1}{2}d)^n \end{cases}$ $\Rightarrow y_1^{(n)}=\frac{2\times 4^{n-1}(x+\frac{1}{2}d)^n+\left(-(-4)^{\ell}d^{4\ell+1}\right)}{2}$ $=4^{n-1}(x+\frac{1}{2}d)^n+2(-4)^{\ell-1}d^{4\ell+1}$ $=4^{n-1}(x+\frac{1}{2}d)^n+2(-4)^{\frac{n-5}{4}}d^n$
當 $n=4\ell+2$ 時的一般解	當 $n=4\ell+3$ 時的一般解
性質：$\begin{cases} y_1^{(n)}=y_3^{(n)} \\ y_1^{(n)}+y_3^{(n)}=2\times 4^{n-1}(x+\frac{1}{2}d)^n \end{cases}$ $\Rightarrow y_1^{(n)}=\frac{2\times 4^{n-1}(x+\frac{1}{2}d)^n}{2}$ $=4^{n-1}(x+\frac{1}{2}d)^n$	性質：$\begin{cases} y_1^{(n)}=y_2^{(n)} \\ y_3^{(n)}=y_4^{(n)} \\ y_1^{(n)}-y_3^{(n)}=2(-4)^{\ell}d^{4\ell+3} \\ y_1^{(n)}+y_3^{(n)}=2\times 4^{n-1}(x+\frac{1}{2}d)^n \end{cases}$ $\Rightarrow y_1^{(n)}=\frac{2\times 4^{n-1}(x+\frac{1}{2}d)^n+2(-4)^{\ell}d^{4\ell+3}}{2}$ $=4^{n-1}(x+\frac{1}{2}d)^n+(-4)^{\ell}d^{4\ell+3}$ $=4^{n-1}(x+\frac{1}{2}d)^n+(-4)^{\frac{n-3}{4}}d^n$

我發現 $y_1^{(n)}=4^{n-1}(x+\frac{1}{2}d)^n+s_nd^n$，因此只要求出 s_n 的一般式即可求出 $y_1^{(n)}$ 的一般式。

首先將上述關係，依序代入正整數 n，可得

$y_1^{(1)}=4^{1-1}(x+\frac{1}{2}d)^1-\frac{1}{2}d$	$y_1^{(5)}=4^{5-1}(x+\frac{1}{2}d)^5+2d^5$	$y_1^{(9)}=4^{9-1}(x+\frac{1}{2}d)^9-8d^9$
$y_1^{(2)}=4^{2-1}(x+\frac{1}{2}d)^2-0d^2$	$y_1^{(6)}=4^{6-1}(x+\frac{1}{2}d)^6+0d^6$	$y_1^{(10)}=4^{10-1}(x+\frac{1}{2}d)^{10}-0d^{10}$
$y_1^{(3)}=4^{3-1}(x+\frac{1}{2}d)^3+d^3$	$y_1^{(7)}=4^{7-1}(x+\frac{1}{2}d)^7-4d^7$	$y_1^{(11)}=4^{11-1}(x+\frac{1}{2}d)^{11}+16d^{11}$
$y_1^{(4)}=4^{4-1}(x+\frac{1}{2}d)^4-2d^4$	$y_1^{(8)}=4^{8-1}(x+\frac{1}{2}d)^8+8d^8$	$y_1^{(12)}=4^{12-1}(x+\frac{1}{2}d)^{12}-32d^{12}$

再來我將 s_n 拆成三個數列 p_n 、 q_n 、 r_n 、 t_n 的乘積

n	s_n	p_n	q_n	k_n	t_n
1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	-1
2	0	1	0	-1	1
3	1	1	1	1	1
4	-2	2	1	-1	1
5	2	2	1	1	1
6	0	4	0	-1	-1
7	-4	4	1	1	-1
8	8	8	1	-1	-1

下一步來討論 p_n 、 q_n 、 k_n 、 t_n 的一般式

(1). 將 p_n 視爲兩兩一組的等比數列，起始值爲 $\frac{1}{2}$ ，公比 2，再加上高斯記號的特性，調整項數，因此列出 $p_n=\frac{1}{2}(2)^{\left[\frac{n}{2}\right]}$ 。

(2). $q_n=\begin{cases}0, & n=4k+2\\ 1, & 其他\end{cases}$ ，將其改寫爲 $q_n=\left[\frac{n+1}{4}\right]-\left[\frac{n+2}{4}\right]+1$ 。

(3). 將 k_n 等比數列，起始值爲 1，公比-1， $k_n=(-1)^{n-1}$ 。

(4). 將數列〈 t_n 〉視爲 $\underset{第一項}{\underset{\Downarrow}{(-1)}},\quad \underset{第二項}{\underset{\Downarrow}{(1,1,1,1)}},\underset{第三項}{\underset{\Downarrow}{(-1,-1,-1,-1)}},\underset{第四項}{\underset{\Downarrow}{(1,1,1,1)}}\cdots$ ，其數值不是 1 就是-1，因此我以(-1)爲底數，以高斯記號調整項數，列出 $t_n=(-1)^{\left[\frac{n-2}{4}\right]}$ 。

所以 $s_n=\left(\frac{1}{2}(2)^{\left[\frac{n}{2}\right]}\right)\times\left(\left[\frac{n+1}{4}\right]-\left[\frac{n+2}{4}\right]+1\right)\times\left((-1)^{(n-1)}\right)\times\left((-1)^{\left[\frac{n-2}{4}\right]}\right)$ ，

接著兩部分合併成爲

$$y_1^{(n)}=4^{n-1}(x+\frac{1}{2}d)^n+\left(\frac{1}{2}(2)^{\left[\frac{n}{2}\right]}\right)\times\left(\left[\frac{n+1}{4}\right]-\left[\frac{n+2}{4}\right]+1\right)\times\left((-1)^{(n-1)}\right)\times\left((-1)^{\left[\frac{n-2}{4}\right]}\right)d^n$$

，最後將 $x=1$ ， $d=1$ 代入可求得組合個數

$$a_n=\frac{(6^n)}{4}+\left(\frac{1}{2}(2)^{\left[\frac{n}{2}\right]}\right)\times\left(\left[\frac{n+1}{4}\right]-\left[\frac{n+2}{4}\right]+1\right)\times\left((-1)^{(n-1)}\right)\times\left((-1)^{\left[\frac{n-2}{4}\right]}\right)$$

(三)、證明上述定理

(1). $\boxed{\text{定理：} y_1^{(n)}+y_3^{(n)}=y_2^{(n)}+y_4^{(n)}=2(4)^{n-1}\left(x+\frac{1}{2}d\right)^n}$

證明：

由矩陣 B 及 $Y^{(n)}=BY^{(n-1)}$ ，可推得各個 $y_i^{(n)}$ 的值，$1\le i\le 4$ ，

$$y_1^{(n)}=(x)y_1^{(n-1)}+(x)y_2^{(n-1)}+(x+d)y_3^{(n-1)}+(x+d)y_4^{(n-1)}\cdots\cdots①$$

$$y_2^{(n)}=(x+d)y_1^{(n-1)}+(x)y_2^{(n-1)}+(x)y_3^{(n-1)}+(x+d)y_4^{(n-1)}\cdots\cdots②$$

$$y_3^{(n)}=(x+d)y_1^{(n-1)}+(x+d)y_2^{(n-1)}+(x)y_3^{(n-1)}+(x)y_4^{(n-1)}\cdots\cdots③$$

$$y_4^{(n)}=(x)y_1^{(n-1)}+(x+d)y_2^{(n-1)}+(x+d)y_3^{(n-1)}+(x)y_4^{(n-1)}\cdots\cdots④$$

∴ ①+③=②+④

$$\Rightarrow y_1^{(n-1)}+y_3^{(n-1)}=y_2^{(n-1)}+y_4^{(n-1)}=(2x+d)\left(y_1^{(n-1)}+y_3^{(n-1)}=y_2^{(n-1)}+y_4^{(n-1)}\right)$$

$$=(2x+d)\left(4^{n-1}\left(x+\frac{1}{2}d\right)^{n-1}\right)$$

$$\left(\begin{aligned}\because y_1^{(n-1)}+y_2^{(n-1)}+y_3^{(n-1)}+y_4^{(n-1)}&=2(2x+d)\left(y_1^{(n-2)}+y_2^{(n-2)}+y_3^{(n-2)}+y_4^{(n-2)}\right)\\&=4^2\left(x+\frac{1}{2}d\right)^2\left(y_1^{(n-3)}+y_2^{(n-3)}+y_3^{(n-3)}+y_4^{(n-3)}\right)\\&\quad\vdots\\&\quad\vdots\\&=4^{n-2}\left(x+\frac{1}{2}d\right)^{n-2}\left(y_1^{(1)}+y_2^{(1)}+y_3^{(1)}+y_4^{(1)}\right)\\&=4^{n-2}\left(x+\frac{1}{2}d\right)^{n-2}(4x+2d)\\&=4^{n-1}\left(x+\frac{1}{2}d\right)^{n-1}\end{aligned}\right)$$

故 $y_1^{(n)}+y_3^{(n)}=y_2^{(n)}+y_4^{(n)}=2(4)^{n-1}\left(x+\frac{1}{2}d\right)^n$

(2). 因爲觀察到每隔四個行矩陣 $Y^{(n)}$ 會有相同的規律，例如 $Y^{(1)}$ 、 $Y^{(5)}$ 、

$Y^{(9)}\cdots Y^{(n)}$ ， $n=4\ell+1$ 時，都符合 $\begin{cases}y_1^{(n)}=y_4^{(n)}\\y_2^{(n)}=y_3^{(n)}\\y_1^{(n)}-y_3^{(n)}=-(-4)^{\ell}d^{4\ell+1}\end{cases}$ 的特質，我利用

$Y^{(n)}=(B)^4Y^{(n-4)}$ 的關係式及數學歸納法，分別證明當 $n=4\ell$ 、 $n=4\ell+1$ 、 $n=4\ell+2$ 、 $n=4\ell+3$ 四種情形。

(1)、 性質一：當$n=4\ell+1$時，$y_1^{(n)}=y_4^{(n)}$，$y_2^{(n)}=y_3^{(n)}$，且

$$y_1^{(n)}-y_3^{(n)}=-\left(-4\right)^{\ell}d^{4\ell+1}$$

證明：

I. 當$\ell=0$，$n=1$時，$y_1^{(1)}=y_4^{(1)}=x$，$y_2^{(1)}=y_3^{(1)}=x+d$，

$y_1^{(1)}-y_3^{(1)}=-d$=-(-4)$^0\times d^{(4\times0+1)}$成立

II. 設$Y^{(4\ell+1)}=\begin{bmatrix}p\\q\\q\\p\end{bmatrix}$，且 p-q = -(-4)$^{\ell}d^{4\ell+1}$ 則

$$Y^{(4(\ell+1)+1)}=\left(B\right)^4Y^{(4\ell+1)}=\begin{bmatrix}128(x+\frac{1}{2}d)^4(p+q)-2d^4(p-q)\\128(x+\frac{1}{2}d)^4(p+q)+2d^4(p-q)\\128(x+\frac{1}{2}d)^4(p+q)+2d^4(p-q)\\128(x+\frac{1}{2}d)^4(p+q)-2d^4(p-q)\end{bmatrix},$$

$\Rightarrow$ $y_1^{(4(\ell+1)+1)}=y_4^{(4(\ell+1)+1)},y_2^{(4(\ell+1)+1)}=y_3^{(4(\ell+1)+1)}$

且 $y_1^{(4(\ell+1)+1)}-y_3^{(4(\ell+1)+1)}$

$$\begin{aligned}&=-4\mathrm{d}^4(\mathrm{p}-\mathrm{q})\\&=-4d^4\left(-(-4)^{\ell}d^{4\ell+1}\right)\\&=-(-4)^{\ell+1}d^{4(\ell+1)+1}\end{aligned}$$ 得證

(2)、 性質二：當 $n=4\ell+2$時，$y_1^{(n)}=y_3^{(n)}$

證明：

I. 當$\ell=0$，$n=2$時，$y_1^{(2)}=y_3^{(2)}=4(x+\frac{1}{2}d)^2$成立

II. 設$Y^{(4\ell+2)}=\begin{bmatrix}p\\a\\p\\b\end{bmatrix}$，則$Y^{(4(\ell+1)+2)}=\left(B\right)^4Y^{(4\ell+2)}=\begin{bmatrix}64(x+\frac{1}{2}d)^4(2p+a+b)\\64(x+\frac{1}{2}d)^4(2p+a+b)-2d^4(a-b)\\64(x+\frac{1}{2}d)^4(2p+a+b)\\64(x+\frac{1}{2}d)^4(2p+a+b)+2d^4(a-b)\end{bmatrix}$，

所以$y_1^{(4(\ell+1)+2)}=y_3^{(4(\ell+1)+2)}$得證

(3)、 性質三：當 $n=4\ell+3$時，$y_1^{(n)}=y_2^{(n)}$，$y_3^{(n)}=y_4^{(n)}$，且

$$y_1^{(n)}-y_3^{(n)}=2(-4)^{\ell}d^{4\ell+3}$$

證明：

I. 當$\ell=0$，$n=3$時，$y_1^{(3)}=y_2^{(3)}=16(x+\frac{1}{2}d)^3+d^3$，

$y_3^{(3)}=y_4^{(3)}=16(x+\frac{1}{2}d)^3-d^3$，$y_1^{(3)}-y_3^{(3)}=2d^3=2(-4)^0d^{(4\times0+3)}$成立

II. 設$Y^{(4\ell+3)}=\begin{bmatrix} p \\ p \\ q \\ q \end{bmatrix}$，且 p-q $=2(-4)^{\ell}d^{4\ell+3}$，則

$$Y^{(4(\ell+1)+3)}=(B)^4Y^{(4\ell+3)}=\begin{bmatrix} 128(x+\frac{1}{2}d)^4(p+q)-2d^4(p-q) \\ 128(x+\frac{1}{2}d)^4(p+q)-2d^4(p-q) \\ 128(x+\frac{1}{2}d)^4(p+q)+2d^4(p-q) \\ 128(x+\frac{1}{2}d)^4(p+q)+2d^4(p-q) \end{bmatrix},$$

$\Rightarrow y_1^{(4(\ell+1)+3)}=y_2^{(4(\ell+1)+3)}$ 且 $y_3^{(4(\ell+1)+3)}=y_4^{(4(\ell+1)+3)}$

且 $$\begin{aligned} &y_1^{(4(\ell+1)+3)}-y_3^{(4(\ell+1)+3)} \\ &=-4\mathrm{d}^4(\mathrm{p}-\mathrm{q}) \\ &=-4\mathrm{d}^4\left(2(-4)^{\ell}d^{4\ell+3}\right) \\ &=2(-4)^{\ell+1}\mathrm{d}^{(4(\ell+1)+3)} \end{aligned}$$ 得證

(4)、 性質四：當$n=4\ell$時，$y_2^{(n)}=y_4^{(n)}$，$y_1^{(n)}=y_2^{(n)}+k$， $y_3^{(n)}=y_2^{(n)}-k$，且 $k=\dfrac{(-4)^{\ell}}{2}d^{4\ell}$

證明：

I. 當$\ell=1$，$n=4$時，$y_2^{(4)}=y_4^{(4)}=64(x+\frac{1}{2}d)^4$，$y_1^{(4)}=y_2^{(4)}+\left(-2d^4\right)$，$y_3^{(4)}=y_2^{(4)}-\left(-2d^4\right)$成立

II. 設$Y^{(4\ell)}=\begin{bmatrix} p+k \\ p \\ p-k \\ p \end{bmatrix}$，其中 k=$\dfrac{(-4)^{\ell}}{2}d^{4\ell}$，則

$$Y^{(4(\ell+1))}=(B)^4Y^{(4\ell)}=\begin{bmatrix} 256(x+\frac{1}{2}d)^4-4kd^4 \\ 256(x+\frac{1}{2}d)^4 \\ 256(x+\frac{1}{2}d)^4+4kd^4 \\ 256(x+\frac{1}{2}d)^4 \end{bmatrix},\Rightarrow y_2^{4(\ell+1)}=y_4^{4(\ell+1)}$$

且 $y_1^{4(\ell+1)}-y_2^{4(\ell+1)}=y_2^{4(\ell+1)}-y_3^{4(\ell+1)}=-4\mathrm{kd}^4=-4d^4\left(\dfrac{(-4)^{\ell}}{2}d^{4\ell}\right)=\dfrac{(-4)^{\ell+1}}{2}d^{4(\ell+1)}$

得證

六、 推廣至一般性

仿照上述的討論，將遊戲規則推廣成 x_i 為 1~r 的正整數，而不再侷限於骰子的情形。

(一)、 $\boxed{\text{問題}}$當 x_i 為 1~r 的正整數，試求 $Y_n = x_1 + x_2 + \cdots x_n \equiv 0(\mathrm{mod}(\mathrm{r}+1))$ 之組合個數 a_n 。

列出相對應的矩陣 $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$，並由 $Y^{(n+1)} = AY^{(n)}$，可得到下

列關係式 $\begin{cases} \mathrm{y}_1{}^{(\mathrm{k}+1)} = \sum\limits_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{r}+1} \mathrm{y}_\mathrm{i}{}^{(\mathrm{k})} - \mathrm{y}_1{}^{(\mathrm{k})} \\ \mathrm{y}_2{}^{(\mathrm{k}+1)} = \sum\limits_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{r}+1} \mathrm{y}_\mathrm{i}{}^{(\mathrm{k})} - \mathrm{y}_2{}^{(\mathrm{k})} \\ \mathrm{y}_3{}^{(\mathrm{k}+1)} = \sum\limits_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{r}+1} \mathrm{y}_\mathrm{i}{}^{(\mathrm{k})} - \mathrm{y}_3{}^{(\mathrm{k})} \\ \quad\vdots \\ \mathrm{y}_{(\mathrm{r}+1)}{}^{(\mathrm{k}+1)} = \sum\limits_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{r}+1} \mathrm{y}_\mathrm{i}{}^{(\mathrm{k})} - \mathrm{y}_{(\mathrm{r}+1)}{}^{(\mathrm{k})} \end{cases}$，其中 $Y^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$

因此可找出類似於研究方法二中關於 $Y^{(n)}$ 的性質：

(1). $y_2{}^{(n)} = y_3{}^{(n)} = y_4{}^{(n)} = \cdots\cdots = y_{(r+1)}{}^{(n)}$ ， $\mathrm{n} \in \mathrm{N}$
(2). $y_1{}^{(n)}$-$\mathrm{y}_2{}^{(n)}$=$(-1)^\mathrm{n}$

又已知 $\mathrm{Y}^{(\mathrm{n})}\left[y_i{}^{(n)}\right](1 \le i \le r+1)$ 內所有元素和為 r^n

即 $\mathrm{r}^\mathrm{n}=\mathrm{y}_1{}^{(\mathrm{n})}+\mathrm{y}_2{}^{(\mathrm{n})}+\mathrm{y}_3{}^{(\mathrm{n})}+\cdots\mathrm{y}_{(\mathrm{r})}{}^{(\mathrm{n})}+\mathrm{y}_{(\mathrm{r}+1)}{}^{(\mathrm{n})}$

$=\mathrm{y}_1{}^{(\mathrm{n})}+(\mathrm{n})\mathrm{y}_2{}^{(\mathrm{n})}\cdots$① $(\because y_2{}^{(n)} = y_3{}^{(n)} = y_4{}^{(n)} = \cdots\cdots = y_{(r+1)}{}^{(n)})$

將性質(2) $y_1{}^{(n)}$-$(-1)^\mathrm{n}$=$\mathrm{y}_2{}^{(n)}$ 帶入式子①

可得 $\mathrm{r}^\mathrm{n}=(\mathrm{r}+1)\mathrm{y}_{\mathrm{n}1}-\mathrm{r}(-1)^\mathrm{n}$ ，所以 $\mathrm{y}_1{}^{(\mathrm{n})}=\dfrac{\mathrm{r}^\mathrm{n}+\mathrm{r}(-1)^\mathrm{n}}{\mathrm{r}+1}=\dfrac{\mathrm{r}}{\mathrm{r}+1}\left[\mathrm{r}^{n-1}-(-1)^{n-1}\right]$ 。

(二)、$\boxed{\text{問題}}$當 x_i 為 1~r 的正整數，試求 $Y_n = x_1 + x_2 + \cdots x_n \equiv 0(\mathrm{mod}(\mathrm{r}\text{-}1))$ 之組合個數 a_n 。

列出相對應的矩陣 $A=\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & \cdots\cdots\cdots & 2 & \\ \hline 2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \ddots & & 1 & \vdots \\ 1 & 1\cdots & & 2 & 1 \end{array}\right]$，並由 $Y^{(n+1)} = AY^{(n)}$ ，可得到下列關係

式 $\begin{cases} y_1^{(n+1)} = \sum_{i=1}^{r-1} y_i^{(n)} + y_{r-1}^{(n)} \\ y_2^{(n+1)} = \sum_{i=1}^{r-1} y_i^{(n)} + y_1^{(n)} \\ \vdots \\ y_{r-1}^{(n+1)} = \sum_{i=1}^{r-1} y_i^{(n)} + y_{r-2}^{(n)} \end{cases}$ 其中 $Y^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$，

依序代入正整數，即可推得類似於研究方法三中關於 $Y^{(n)}$ 的性質：

當 n 爲(r-1)的倍數時， $y_1^{(n)}$ 會比 $Y^{(n)}$ 中的其他元素多 1；
當 $\text{n} = (r-1)\text{t}+\ell, 1 \le l < (r-1), t \in \mathbb{Z}$ 時， $y_{\ell+1}^{(n)}$ 會比 $Y^{(n)}$ 中的其他元素多 1。

由上述性質可知：每(r-1)個矩陣會循環一次，且其中有一個元素會比其他項多 1。根據這樣的特性，我可以列出 $y_1^{(n)} = \dfrac{(\text{r}^n - 1)}{r-1} + f(n)$ ，以 f(n)來決定是否要比其他項多 1。

下一步來討論 f(n)， $f(n) = \begin{cases} 1, & n\text{=(r-1)k} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ 。我利用高斯記號的特性，將其改寫爲 $f(n) = \left[\dfrac{n}{r-1}\right] - \left[\dfrac{n-1}{r-1}\right]$ 。

最後兩部分合併成爲 $y_1^{(n)} = \dfrac{\left(\text{r}^n\text{-1}\right)}{\text{r-1}} + \left[\dfrac{n}{\text{r-1}}\right] - \left[\dfrac{n-1}{\text{r-1}}\right]$

(三)、$\boxed{\text{問題}}$當 x_i 爲 1~r 的正整數，試求 $Y_n = x_1 + x_2 + \cdots x_n \equiv 0(\text{mod}(\text{r的因數}))$ 之組合個數 a_n 。

列出相對應的矩陣

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\text{r}}{\text{r的因數}} & \frac{\text{r}}{\text{r的因數}} & \cdots & \cdots & \frac{\text{r}}{\text{r的因數}} & \frac{\text{r}}{\text{r的因數}} \\ \frac{\text{r}}{\text{r的因數}} & \frac{\text{r}}{\text{r的因數}} & \cdots & \cdots & \frac{\text{r}}{\text{r的因數}} & \frac{\text{r}}{\text{r的因數}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\text{r}}{\text{r的因數}} & \frac{\text{r}}{\text{r的因數}} & \cdots & \cdots & \frac{\text{r}}{\text{r的因數}} & \frac{\text{r}}{\text{r的因數}} \\ \frac{\text{r}}{\text{r的因數}} & \frac{\text{r}}{\text{r的因數}} & \cdots & \cdots & \frac{\text{r}}{\text{r的因數}} & \frac{\text{r}}{\text{r的因數}} \end{bmatrix} = \frac{\text{r}}{\text{r的因數}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

矩陣 A 的每個元素都相等，因爲要使 $Y_{n\text{-}1} \equiv (j\text{-}1)(\text{mod}\, r\text{的因數})$ 轉變爲 $Y_n \equiv (i\text{-}1)(\text{mod}\, r\text{的因數})$ 的所有可能情形都相等(都是各 $\dfrac{r}{r\text{的因數}}$ 種方法)。所以 $\text{Y}^{(\text{n})}\left[y_i^{(n)}\right]$ 中的元素也都會相等，且

$$y_1^{(n)} = y_2^{(n)} = \cdots = y_{(\text{r的因數})}^{(n)} = \frac{\text{r}}{\text{r的因數}} \sum_{i=1}^{\text{r的因數}} y_i^{(n-1)} = \frac{\text{r}}{\text{r的因數}} \times \text{r}^{(n-1)}$$

七、 擲骰子求$\boxed{\text{平方和}}$為四的倍數

(一)、遊戲規則

記錄每次骰出的點數，將其數值依序命名為 x_1 、 x_2 、 $x_3 \cdots\cdots x_n$ ，令 $Y_n = {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + \cdots\cdots + {x_n}^2$ ，並且 a_n 是 Y_n 為四的倍數的所有可能情形個數。

(二)、利用矩陣列出每項數字並觀察其規律

偶數的平方除以 4 會被整除，奇數平方除以 4 會餘 1，現在有 1~6 六個數，所以平方後除以 4，會有 3 個數被整除，3 個數餘 1，因此每次擲出骰子後，有三種可能維持原狀，三種可能會是原狀加上 1，所以可以列出以下的轉換矩陣 $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$。

我發現 A 矩陣與研究過程五中所提及的 B 矩陣 $\begin{bmatrix} x & x & x+d & x+d \\ x+d & x & x & x+d \\ x+d & x+d & x & x \\ x & x+d & x+d & x \end{bmatrix}$ 有相似之處，若 $B = \left[b_{ij}\right]_{4\times4} = \begin{bmatrix} b_{1*} \\ b_{2*} \\ b_{3*} \\ b_{4*} \end{bmatrix}$ (b_{i*} 表示 B 的第 i 列)，則

$$A = \begin{bmatrix} b_{4*} \\ b_{1*} \\ b_{2*} \\ b_{3*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & x+d & x+d & x \\ x & x & x+d & x+d \\ x+d & x & x & x+d \\ x+d & x+d & x & x \end{bmatrix}$$ 其中 $x = 3$ ， $d = -3$ 。

性質：

若轉換矩陣 $B = \begin{bmatrix} b_{1*} \\ b_{2*} \\ b_{3*} \\ b_{4*} \end{bmatrix}$ ，且 $B^n = \begin{bmatrix} {b_{1*}}^{(n)} \\ {b_{2*}}^{(n)} \\ {b_{3*}}^{(n)} \\ {b_{4*}}^{(n)} \end{bmatrix}$ ，又 $A = \begin{bmatrix} b_{4*} \\ b_{1*} \\ b_{2*} \\ b_{3*} \end{bmatrix}$

則 $A^{4k+1} = \begin{bmatrix} {b_{4*}}^{(4k+1)} \\ {b_{1*}}^{(4k+1)} \\ {b_{2*}}^{(4k+1)} \\ {b_{3*}}^{(4k+1)} \end{bmatrix}$ ， $A^{4k+2} = \begin{bmatrix} {b_{3*}}^{(4k+2)} \\ {b_{4*}}^{(4k+2)} \\ {b_{1*}}^{(4k+2)} \\ {b_{2*}}^{(4k+2)} \end{bmatrix}$ ， $A^{4k+3} = \begin{bmatrix} {b_{2*}}^{(4k+3)} \\ {b_{3*}}^{(4k+3)} \\ {b_{4*}}^{(4k+3)} \\ {b_{1*}}^{(4k+3)} \end{bmatrix}$ ， $A^{4k+4} = \begin{bmatrix} {b_{1*}}^{(4k+4)} \\ {b_{2*}}^{(4k+4)} \\ {b_{3*}}^{(4k+4)} \\ {b_{4*}}^{(4k+4)} \end{bmatrix}$ ，

$\forall k \in \mathrm{N} \cup \{0\}$

詳細證明過程請見附錄。

由上述性質可推得當 $A = \begin{bmatrix} x & x+d & x+d & x \\ x & x & x+d & x+d \\ x+d & x & x & x+d \\ x+d & x+d & x & x \end{bmatrix}$ 時，

$$A^2=\begin{bmatrix} 4\left(x+\frac{1}{2}d\right)^2 & 4\left(x+\frac{1}{2}d\right)^2-d^2 & 4\left(x+\frac{1}{2}d\right)^2 & 4\left(x+\frac{1}{2}d\right)^2+d^2 \\ 4\left(x+\frac{1}{2}d\right)^2+d^2 & 4\left(x+\frac{1}{2}d\right)^2 & 4\left(x+\frac{1}{2}d\right)^2-d^2 & 4\left(x+\frac{1}{2}d\right)^2 \\ 4\left(x+\frac{1}{2}d\right)^2 & 4\left(x+\frac{1}{2}d\right)^2+d^2 & 4\left(x+\frac{1}{2}d\right)^2 & 4\left(x+\frac{1}{2}d\right)^2-d^2 \\ 4\left(x+\frac{1}{2}d\right)^2-d^2 & 4\left(x+\frac{1}{2}d\right)^2 & 4\left(x+\frac{1}{2}d\right)^2+d^2 & 4\left(x+\frac{1}{2}d\right)^2 \end{bmatrix},$$

$$A^3=\begin{bmatrix} 16\left(x+\frac{1}{2}d\right)^3+d^3 & 16\left(x+\frac{1}{2}d\right)^3+d^3 & 16\left(x+\frac{1}{2}d\right)^3-d^3 & 16\left(x+\frac{1}{2}d\right)^3-d^3 \\ 16\left(x+\frac{1}{2}d\right)^3-d^3 & 16\left(x+\frac{1}{2}d\right)^3+d^3 & 16\left(x+\frac{1}{2}d\right)^3+d^3 & 16\left(x+\frac{1}{2}d\right)^3-d^3 \\ 16\left(x+\frac{1}{2}d\right)^3-d^3 & 16\left(x+\frac{1}{2}d\right)^3-d^3 & 16\left(x+\frac{1}{2}d\right)^3+d^3 & 16\left(x+\frac{1}{2}d\right)^3+d^3 \\ 16\left(x+\frac{1}{2}d\right)^3+d^3 & 16\left(x+\frac{1}{2}d\right)^3-d^3 & 16\left(x+\frac{1}{2}d\right)^3-d^3 & 16\left(x+\frac{1}{2}d\right)^3+d^3 \end{bmatrix},$$

$$A^4=\begin{bmatrix} 64\left(x+\frac{1}{2}d\right)^4-2d^4 & 64\left(x+\frac{1}{2}d\right)^4 & 64\left(x+\frac{1}{2}d\right)^4+2d^4 & 64\left(x+\frac{1}{2}d\right)^4 \\ 64\left(x+\frac{1}{2}d\right)^4 & 64\left(x+\frac{1}{2}d\right)^4-2d^4 & 64\left(x+\frac{1}{2}d\right)^4 & 64\left(x+\frac{1}{2}d\right)^4+2d^4 \\ 64\left(x+\frac{1}{2}d\right)^4+2d^4 & 64\left(x+\frac{1}{2}d\right)^4 & 64\left(x+\frac{1}{2}d\right)^4-2d^4 & 64\left(x+\frac{1}{2}d\right)^4 \\ 64\left(x+\frac{1}{2}d\right)^4 & 64\left(x+\frac{1}{2}d\right)^4+2d^4 & 64\left(x+\frac{1}{2}d\right)^4 & 64\left(x+\frac{1}{2}d\right)^4-2d^4 \end{bmatrix}$$

$$A^5=\begin{bmatrix} 256\left(x+\frac{1}{2}d\right)^5+2d^5 & 256\left(x+\frac{1}{2}d\right)^5-2d^5 & 256\left(x+\frac{1}{2}d\right)^5-2d^5 & 256\left(x+\frac{1}{2}d\right)^5+2d^5 \\ 256\left(x+\frac{1}{2}d\right)^5+2d^5 & 256\left(x+\frac{1}{2}d\right)^5+2d^5 & 256\left(x+\frac{1}{2}d\right)^5-2d^5 & 256\left(x+\frac{1}{2}d\right)^5-2d^5 \\ 256\left(x+\frac{1}{2}d\right)^5-2d^5 & 256\left(x+\frac{1}{2}d\right)^5+2d^5 & 256\left(x+\frac{1}{2}d\right)^5+2d^5 & 256\left(x+\frac{1}{2}d\right)^5-2d^5 \\ 256\left(x+\frac{1}{2}d\right)^5-2d^5 & 256\left(x+\frac{1}{2}d\right)^5-2d^5 & 256\left(x+\frac{1}{2}d\right)^5+2d^5 & 256\left(x+\frac{1}{2}d\right)^5+2d^5 \end{bmatrix}$$

再來我發現 ${A^n}_{*1}$ 中的 ${y_1}^{(n)}$ 與 ${B^n}_{*1}$ 中的 ${y_1}^{(n)}$ 是相等的，所以我可以得知

$$a_n={y_1}^{(n)}=4^{n-1}(x+\frac{1}{2}d)^n+\left(\frac{1}{2}(2)^{\left[\frac{n}{2}\right]}\right)\times\left(\left[\frac{n+1}{4}\right]-\left[\frac{n+2}{4}\right]+1\right)\times\left((-1)^{(n-1)}\right)\times\left((-1)^{\left[\frac{n-2}{4}\right]}\right)d^n$$

當我在求骰子平方和爲 4 的倍數時，其所對應的矩陣爲 $A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$，因此將 $x=3$ ， $d=-3$ 代入可得到

$$a_n=\frac{(6^n)}{4}+\left(\frac{1}{2}(2)^{\left[\frac{n}{2}\right]}\right)\times\left(\left[\frac{n+1}{4}\right]-\left[\frac{n+2}{4}\right]+1\right)\times\left((-1)^{(n-1)}\right)\times\left((-1)^{\left[\frac{n-2}{4}\right]}\right)(-3)^n$$

八、擲骰子求平方和爲三的倍數

(一)、遊戲規則

記錄每次骰出的點數，將其數值依序命名爲 x_1 、 x_2 、 x_3 …… x_n ，令 $Y_n = x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} + x_3^{\ 2} + \cdots\cdots + x_n^{\ 2}$ ，並且 a_n 是 Y_n 爲三的倍數的所有可能情形個數。

(二)、我直接列出轉換矩陣 A 及 n 次方後的結果，來觀察 a_n 的規律：

$$A=\begin{bmatrix}2&0&4\\4&2&0\\0&4&2\end{bmatrix}\ A^2=\begin{bmatrix}4&16&16\\16&4&16\\16&16&4\end{bmatrix}\ A^3=\begin{bmatrix}72&96&48\\48&72&96\\96&48&72\end{bmatrix}$$

$$A^4=\begin{bmatrix}528&384&384\\384&528&384\\384&384&528\end{bmatrix}\ A^5=\begin{bmatrix}2592&2304&2880\\2880&2592&2304\\2304&2880&2592\end{bmatrix}$$

所以 a_1=2， a_2=4， a_3=72， a_4=528， a_5=2592……

從上述表格，我可以發現第一行的元素不是相同，就是會有等差的關係，但是因爲矩陣裡的數字愈乘愈大，並不容易找出更多的規律，因此我改用代數 x、d 的方式，重新列出矩陣 B，取代數字的複雜性，更可以一窺若矩陣中的元素具有等差關係，其 n 次後的一般式：

B^1	$\begin{bmatrix}x+d & x & x+2d\\ x+2d & x+d & x\\ x & x+2d & x+d\end{bmatrix}$
B^2	$\begin{bmatrix}3(x+d)^2-2d^2 & 3(x+d)^2+d^2 & 3(x+d)^2+d^2\\ 3(x+d)^2+d^2 & 3(x+d)^2-2d^2 & 3(x+d)^2+d^2\\ 3(x+d)^2+d^2 & 3(x+d)^2+d^2 & 3(x+d)^2-2d^2\end{bmatrix}$
B^3	$\begin{bmatrix}9(x+d)^3 & 9(x+d)^3+3d^3 & 9(x+d)^3-3d^3\\ 9(x+d)^3-3d^3 & 9(x+d)^3 & 9(x+d)^3+3d^3\\ 9(x+d)^3+3d^3 & 9(x+d)^3-3d^3 & 9(x+d)^3\end{bmatrix}$
B^4	$\begin{bmatrix}27(x+d)^4+6d^4 & 27(x+d)^4-3d^4 & 27(x+d)^4-3d^4\\ 27(x+d)^4-3d^4 & 27(x+d)^4+6d^4 & 27(x+d)^4-3d^4\\ 27(x+d)^4-3d^4 & 27(x+d)^4-3d^4 & 27(x+d)^4+6d^4\end{bmatrix}$
B^5	$\begin{bmatrix}81(x+d)^5 & 81(x+d)^5-9d^5 & 81(x+d)^5+9d^5\\ 81(x+d)^5+9d^5 & 81(x+d)^5 & 81(x+d)^5-9d^5\\ 81(x+d)^5-9d^5 & 81(x+d)^5+9d^5 & 81(x+d)^5\end{bmatrix}$
B^6	$\begin{bmatrix}243(x+d)^6-18d^6 & 243(x+d)^6+9d^6 & 243(x+d)^6+9d^6\\ 243(x+d)^6+9d^6 & 243(x+d)^2-18d^6 & 243(x+d)^6+9d^6\\ 243(x+d)^6+9d^6 & 243(x+d)^6+9d^6 & 243(x+d)^6-18d^6\end{bmatrix}$

(三)、觀察上述表格規律推測以下性質:

(1). $$B^{2k+1}=\begin{bmatrix} 3^{2k}(x+d)^{2k+1} & 3^{2k}(x+d)^{2k+1}-(-3)^k(d)^{2k+1} & 3^{2k}(x+d)^{2k+1}+(-3)^k(d)^{2k+1} \\ 3^{2k}(x+d)^{2k+1}+(-3)^k(d)^{2k+1} & 3^{2k}(x+d)^{2k+1} & 3^{2k}(x+d)^{2k+1}-(-3)^k(d)^{2k+1} \\ 3^{2k}(x+d)^{2k+1}-(-3)^k(d)^{2k+1} & 3^{2k}(x+d)^{2k+1}+(-3)^k(d)^{2k+1} & 3^{2k}(x+d)^{2k+1} \end{bmatrix}$$

(2). $$B^{2k}=\begin{bmatrix} 3^{2k-1}(x+d)^{2k}-2(-3)^{k-1}(d)^{2k} & 3^{2k-1}(x+d)^{2k}+(-3)^{k-1}(d)^{2k} & 3^{2k-1}(x+d)^{2k}+(-3)^{k-1}(d)^{2k} \\ 3^{2k-1}(x+d)^{2k}+(-3)^{k-1}(d)^{2k} & 3^{2k-1}(x+d)^{2k}-2(-3)^{k-1}(d)^{2k} & 3^{2k-1}(x+d)^{2k}+(-3)^{k-1}(d)^{2k} \\ 3^{2k-1}(x+d)^{2k}+(-3)^{k-1}(d)^{2k} & 3^{2k-1}(x+d)^{2k}+(-3)^{k-1}(d)^{2k} & 3^{2k-1}(x+d)^{2k}-2(-3)^{k-1}(d)^{2k} \end{bmatrix}$$

證明：

(1). 令 $B^n=\left[b_{ij}{}^n\right]$

I. 當 k=0 時，$B^1=\begin{bmatrix} x+d & x & x+2d \\ x+2d & x+d & x \\ x & x+2d & x+d \end{bmatrix}$

II. 設 k=t 時，

$$B^{2t+1}=\begin{bmatrix} 3^{2t}(x+d)^{2t+1} & 3^{2t}(x+d)^{2t+1}-(-3)^t(d)^{2t+1} & 3^{2t}(x+d)^{2t+1}+(-3)^t(d)^{2t+1} \\ 3^{2t}(x+d)^{2t+1}+(-3)^t(d)^{2t+1} & 3^{2t}(x+d)^{2t+1} & 3^{2t}(x+d)^{2t+1}-(-3)^t(d)^{2t+1} \\ 3^{2t}(x+d)^{2t+1}-(-3)^t(d)^{2t+1} & 3^{2t}(x+d)^{2t+1}+(-3)^t(d)^{2t+1} & 3^{2t}(x+d)^{2t+1} \end{bmatrix}$$

成立，則當 k=t+1 時，由 $B^{2t+3}=B^{2t+1}B^2$ 推得

$$\begin{aligned} b_{11}{}^{(2t+3)} &= b_{11}{}^{(2t+1)}\times b_{11}{}^{(2)}+b_{12}{}^{(2t+1)}\times b_{21}{}^{(2)}+b_{13}{}^{(2t+1)}\times b_{31}{}^{(2)} \\ &=\left(3^{2t}(x+d)^{2t+1}\right)\left(3(x+d)^2-2d^2\right)+\left(3^{2t}(x+d)^{2t+1}+(-3)^t(d)^{2t+1}\right)\left(3(x+d)^2+d^2\right) \\ &\quad+\left(3^{2t}(x+d)^{2t+1}-(-3)^t(d)^{2t+1}\right)\left(3(x+d)^2+d^2\right) \\ &=3^{2t+1}(x+d)^{2t+3}-2d^2\left(3^{2t}(x+d)^{2t+1}\right)+3^{2t+1}(x+d)^{2t+3}+d^2\left(3^{2t}(x+d)^{2t+1}\right) \\ &\quad+3(x+d)^2\left((-3)^t(d)^{2t+1}\right)+(-3)^t(d)^{2t+3}+3^{2t+1}(x+d)^{2t+3}+d^2\left(3^{2t}(x+d)^{2t+1}\right) \\ &\quad-3(x+d)^2\left((-3)^t(d)^{2t+1}\right)-(-3)^t(d)^{2t+3} \\ &=3^{2t+2}(x+d)^{2t+3} \\ &=3^{2(t+1)}(x+d)^{2(t+1)+1} \end{aligned}$$

$\therefore b_{11}{}^{(2(t+1)+1)}=3^{2(t+1)}(x+d)^{2(t+1)+1}$，仿照上述方式可得

$b_{21}{}^{(2(t+1)+1)}=3^{2(t+1)}(x+d)^{2(t+1)+1}+(-3)^{(t+1)}(d)^{2(t+1)+1}$、

$b_{31}{}^{(2(t+1)+1)}=3^{2(t+1)}(x+d)^{2(t+1)+1}-(-3)^{(t+1)}(d)^{2(t+1)+1}$

最後我可由循環方陣相乘仍爲循環矩陣(見《矩陣》，pp：90)得知 $b_{11}{}^{(n)}=b_{22}{}^{(n)}=b_{33}{}^{(n)}$，$b_{21}{}^{(n)}=b_{32}{}^{(n)}=b_{13}{}^{(n)}$，$b_{31}{}^{(n)}=b_{12}{}^{(n)}=b_{23}{}^{(n)}$，故得證

(2). 仿照上述方式可證性質(2)

$\boxed{\text{推導一般式}}$

從上述性質，我可推得 $b_{11}{}^{(n)}$ 一般式

$$b_{11}{}^{(n)} = 3^{(n-1)}\left(x+d\right)^n - 2d^n\left(\frac{1^n+(-1)^n}{2}\right)(-3)^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}$$ 。

當我在求骰子平方和為 3 的倍數時，其所對應的矩陣為 $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$，因此將

$x=0$ ，$d=2$ 代入上式，即可得到組合個數

$$a_n = 3^{(n-1)}(2)^n - 2\times 2^n\left(\frac{1^n+(-1)^n}{2}\right)(-3)^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}$$

伍、研究結果

一、

(一)、一般子連續投擲 n 次後，其和 Y_n 為 7 的倍數時，組合個數 $a_n = \frac{6}{7}\left[6^{n-1}\text{-}(\text{-}1)^{\text{n-1}}\right]$

(二)、一般子連續投擲 n 次後，其和 Y_n 為 5 的倍數時，組合個數

$$a_n = \frac{1}{5}\times\left(6^n-1\right)+\left[\frac{n}{5}\right]-\left[\frac{n-1}{5}\right]$$

(三)、一般子連續投擲 n 次後，其和 Y_n 為 3 的倍數時，組合個數 $a_n = 2\times 6^{n-1}$

(四)、一般子連續投擲 n 次後，其和 Y_n 為 4 的倍數時，組合個數

$$a_n = \frac{(6^n)}{4}+\left(\frac{1}{2}(2)^{\left[\frac{n}{2}\right]}\right)\times\left(\left[\frac{n+1}{4}\right]-\left[\frac{n+2}{4}\right]+1\right)\times\left((-1)^{(n-1)}\right)\times\left((-1)^{\left[\frac{n-2}{4}\right]}\right)$$

二、

(一)、 x_i 為 1~r 的正整數，則 $Y_n = x_1+x_2+\cdots x_n \equiv 0(\text{mod}(\text{r}+1))$ 的組合個數

$$a_n = \frac{\text{r}}{\text{r}+1}\left[\text{r}^{n-1}-(-1)^{n-1}\right]$$

(二)、 x_i 為 1~r 的正整數，$Y_n = x_1+x_2+\cdots x_n \equiv 0(\text{mod(r-1)})$ 的組合個數

$$a_n = \frac{1}{\text{r-1}}\times\left(\text{r}^n-1\right)+\left[\frac{n}{\text{r-1}}\right]-\left[\frac{n-1}{\text{r-1}}\right]$$

(三)、 x_i 為 1~r 的正整數，$Y_n = x_1+x_2+x_3+\cdots x_n \equiv 0(\text{mod}(\text{r的因數}))$ 的組合個數

$$a_n = \frac{\text{r}}{\text{r的因數}}\times \text{r}^{n-1}$$

三、

(一)、一般子連續投擲 n 次後，其$\boxed{\text{平方和}}$$Y_n$ 為 4 的倍數時，組合個數

$$a_n = \frac{(6^n)}{4}+\left(\frac{1}{2}(2)^{\left[\frac{n}{2}\right]}\right)\times\left(\left[\frac{n+1}{4}\right]-\left[\frac{n+2}{4}\right]+1\right)\times\left((-1)^{(n-1)}\right)\times\left((-1)^{\left[\frac{n-2}{4}\right]}\right)(-3)^n$$

(二)、一般子連續投擲 n 次後，其$\boxed{\text{平方和}}$$Y_n$ 為 3 的倍數時，組合個數

$$a_n = 3^{(n-1)}(2)^n - 2\times 2^n\left(\frac{1^n+(-1)^n}{2}\right)(-3)^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}$$

陸、討論

在研究的過程中，我找到一些循環矩陣 A 連乘 n 次方後的特性：

一、 在「投擲骰子 n 次後求$\boxed{\text{平方和}}$為 4 的倍數」時(研究過程中第七點)，我可得到一矩陣 $A=\begin{bmatrix} x & x+d & x+d & x \\ x & x & x+d & x+d \\ x+d & x & x & x+d \\ x+d & x+d & x & x \end{bmatrix}$，接著我又再求「投擲骰子 n 次後求$\boxed{\text{和}}$為 4 的倍數」時(研究過程中第五點)，我可以得到另一矩陣 $B=\begin{bmatrix} x & x & x+d & x+d \\ x+d & x & x & x+d \\ x+d & x+d & x & x \\ x & x+d & x+d & x \end{bmatrix}$，

從中我可以發現這兩個矩陣，各自 n 次方後，有著密切的關係。如 $A^{4k+1}=\begin{bmatrix} b_{4*}^{(4k+1)} \\ b_{1*}^{(4k+1)} \\ b_{2*}^{(4k+1)} \\ b_{3*}^{(4k+1)} \end{bmatrix}$

即 A^{4k+1} 會等於 B^{4k+1} 中每一列下移一列，又 $A^{4k+2}=\begin{bmatrix} b_{3*}^{(4k+2)} \\ b_{4*}^{(4k+2)} \\ b_{1*}^{(4k+2)} \\ b_{2*}^{(4k+2)} \end{bmatrix}$ 即 A^{4k+2} 會等於 B^{4k+2} 中每一列下移兩列。

二、在「投擲骰子 n 次後求$\boxed{\text{平方和}}$為 3 的倍數」時(研究過程第八點)，發現 3 階循環矩陣 A 中的元素有等差關係，則 A^n 也有特殊的規律。是否這樣的規律仍能推廣至 4 階或更高階的循環矩陣中。

三、在「投擲骰子 n 次後求$\boxed{\text{平方和}}$為 4 的倍數」時(研究過程中第七點)，我可得到一矩陣 $A=\begin{bmatrix} x & x+d & x+d & x \\ x & x & x+d & x+d \\ x+d & x & x & x+d \\ x+d & x+d & x & x \end{bmatrix}$，具有如此特性的矩陣，我也可順利推測它 n 次方後的規律。因此，我很好奇是否還存在有更多循環矩陣 A 與 A^n 之間的關聯性。

柒、結論

本次研究的主題在研究骰子和、骰子平方和為 k 的倍數時的組合個數，一開始我使用土法煉鋼的方式列出所有的情形，但是不易觀察規律，所以我改用矩陣，並透過 Maple 軟體處理數據，最後利用數學歸納法證明所觀察到的規律，進而推導出結果。利用這個技巧，我成功地解決骰子和為 2~7 的倍數的組合個數，以及骰子平方和為 3、4 的倍數的組合個數。在這個過程中，我意外看到許多循環矩陣 A 與其 n 次方的巧妙關聯，是否將來能在這方面，找到更多的關聯性。

捌、參考資料及其他

一、 許志農，《高中數學大賞》，pp:66~67，2003

二、 高中數學第四冊、第五冊

三、 林義雄，《矩陣》，pp：80~91，1987，九章出版社

附錄

證明研究過程或方法七的相關性質

(一)、證明上述性質

性質： 若轉換矩陣 $B=\begin{bmatrix} b_{1*} \\ b_{2*} \\ b_{3*} \\ b_{4*} \end{bmatrix}$，且 $B^n=\begin{bmatrix} b_{1*}{}^{(n)} \\ b_{2*}{}^{(n)} \\ b_{3*}{}^{(n)} \\ b_{4*}{}^{(n)} \end{bmatrix}$，又 $A=\begin{bmatrix} b_{4*} \\ b_{1*} \\ b_{2*} \\ b_{3*} \end{bmatrix}$ 則 $A^{4k+1}=\begin{bmatrix} b_{4*}{}^{(4k+1)} \\ b_{1*}{}^{(4k+1)} \\ b_{2*}{}^{(4k+1)} \\ b_{3*}{}^{(4k+1)} \end{bmatrix}$，$A^{4k+2}=\begin{bmatrix} b_{3*}{}^{(4k+2)} \\ b_{4*}{}^{(4k+2)} \\ b_{1*}{}^{(4k+2)} \\ b_{2*}{}^{(4k+2)} \end{bmatrix}$，$A^{4k+3}=\begin{bmatrix} b_{2*}{}^{(4k+3)} \\ b_{3*}{}^{(4k+3)} \\ b_{4*}{}^{(4k+3)} \\ b_{1*}{}^{(4k+3)} \end{bmatrix}$，$A^{4k+4}=\begin{bmatrix} b_{1*}{}^{(4k+4)} \\ b_{2*}{}^{(4k+4)} \\ b_{3*}{}^{(4k+4)} \\ b_{4*}{}^{(4k+4)} \end{bmatrix}$， $\forall k \in \mathrm{N} \cup \{0\}$

令 $\begin{bmatrix} A & D & C & B \\ B & A & D & C \\ C & B & A & D \\ D & C & B & A \end{bmatrix}$ 爲 X 矩陣，$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$ 爲 Y 矩陣，$X \times Y=\begin{bmatrix} \boxed{Aa+Bd+Cc+Db} \\ Ab+Ba+Cd+Dc \\ Ac+Bb+Ca+Dd \\ Ad+Bc+Cb+Da \end{bmatrix}$，

再另 Y 矩陣中的每一列下移後的另一矩陣爲 Z 矩陣，$Z=\begin{bmatrix} d \\ a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} A & D & C & B \\ B & A & D & C \\ C & B & A & D \\ D & C & B & A \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{Aa+Bd+Cc+Db} \\ Ab+Ba+Cd+Dc \\ Ac+Bb+Ca+Dd \\ Ad+Bc+Cb+Da \end{bmatrix}$		
1	$\begin{bmatrix} D & C & B & A \\ A & D & C & B \\ B & A & D & C \\ C & B & A & D \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} d \\ a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ac+Bb+Ca+Dd \\ Ad+Bc+Cb+Da \\ \boxed{Aa+Bd+Cc+Db} \\ Ab+Ba+Cd+Dc \end{bmatrix}$	當 X 矩陣中的每一列下移 1 列後乘上 Z 矩陣可得到另一矩陣，此矩陣爲 $X \times Y$ 矩陣中的每一列下移 2 列後的結果
2	$\begin{bmatrix} C & B & A & B \\ D & C & B & D \\ A & D & C & B \\ B & A & D & C \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} d \\ a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ab+Ba+Cd+Dc \\ Ac+Bb+Ca+Dd \\ Ad+Bc+Cb+Da \\ \boxed{Aa+Bd+Cc+Db} \end{bmatrix}$	當 X 矩陣中的每一列下移 2 列後乘上 Z 矩陣可得到另一矩陣，此矩陣爲 $X \times Y$ 矩陣中的每一列下移 3 列後的結果

3	$\begin{bmatrix} B & A & D & C \\ C & B & A & D \\ D & C & B & A \\ A & D & C & B \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} d \\ a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{Aa+Bd+Cc+Db} \\ Ab+Ba+Cd+Dc \\ Ac+Bb+Ca+Dd \\ Ad+Bc+Cb+Da \end{bmatrix}$	當 X 矩陣中的每一列下移 3 列後乘上 Z 矩陣可得到另一矩陣，此矩陣爲 $X\times Y$ 矩陣中的每一列下移 4 列後的結果，也就是兩者結果相等
4	$\begin{bmatrix} A & D & C & B \\ B & A & D & C \\ C & B & A & D \\ D & C & B & A \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} d \\ a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ad+Bc+Cb+Da \\ \boxed{Aa+Bd+Cc+Db} \\ Ab+Ba+Cd+Dc \\ Ac+Bb+Ca+Dd \end{bmatrix}$	當 X 矩陣中的每一列下移 4 列後乘上 Z 矩陣，也就是 X 矩陣乘上 Z 矩陣，可得到另一矩陣，此矩陣爲 $X\times Y$ 矩陣中的每一列下移 1 列後的結果

根據上述性質以及循環矩陣的性質，從 $A^1=\begin{bmatrix} b_{4*}^{(1)} \\ b_{1*}^{(1)} \\ b_{2*}^{(1)} \\ b_{3*}^{(1)} \end{bmatrix}$ 得到 $A^2=\begin{bmatrix} b_{3*}^{(2)} \\ b_{4*}^{(2)} \\ b_{1*}^{(2)} \\ b_{2*}^{(2)} \end{bmatrix}$，從 $A^2=\begin{bmatrix} b_{3*}^{(2)} \\ b_{4*}^{(2)} \\ b_{1*}^{(2)} \\ b_{2*}^{(2)} \end{bmatrix}$ 得到 $A^3=\begin{bmatrix} b_{2*}^{(3)} \\ b_{3*}^{(3)} \\ b_{4*}^{(3)} \\ b_{1*}^{(3)} \end{bmatrix}$，從 $A^3=\begin{bmatrix} b_{2*}^{(3)} \\ b_{3*}^{(3)} \\ b_{4*}^{(3)} \\ b_{1*}^{(3)} \end{bmatrix}$ 得到 $A^4=\begin{bmatrix} b_{1*}^{(4)} \\ b_{2*}^{(4)} \\ b_{3*}^{(4)} \\ b_{4*}^{(4)} \end{bmatrix}$ $\cdots$，所以我可以推論 $A^{4k+1}=\begin{bmatrix} b_{4*}^{(4k+1)} \\ b_{1*}^{(4k+1)} \\ b_{2*}^{(4k+1)} \\ b_{3*}^{(4k+1)} \end{bmatrix}$，$A^{4k+2}=\begin{bmatrix} b_{3*}^{(4k+2)} \\ b_{4*}^{(4k+2)} \\ b_{1*}^{(4k+2)} \\ b_{2*}^{(4k+2)} \end{bmatrix}$，$A^{4k+3}=\begin{bmatrix} b_{2*}^{(4k+3)} \\ b_{3*}^{(4k+3)} \\ b_{4*}^{(4k+3)} \\ b_{1*}^{(4k+3)} \end{bmatrix}$，

$A^{4k+4}=\begin{bmatrix} b_{1*}^{(4k+4)} \\ b_{2*}^{(4k+4)} \\ b_{3*}^{(4k+4)} \\ b_{4*}^{(4k+4)} \end{bmatrix}$