

# 第九屆旺宏科學獎

## 成果報告書

參賽編號：SA9-351

作品名稱：推導印證扭扭車的 S 形軌跡

姓名：楊子玄

關鍵字：扭扭車、包絡面、S 形軌跡

## 推導印證扭扭車的 S 形軌跡

### 摘要

所有的交通工具中，無須電力、馬達，小孩可以載大人，可前進、後退，只有扭扭車 twist car<sup>1</sup>。我們在地上平鋪複寫紙、壁報紙，人乘坐扭扭車即可滾出軌跡，從軌跡發現扭扭車從靜止啟動是利用左、右前輪摩擦力不同前進，如果把手慢速小角度左、右轉動，則前輪、後輪軌跡為「S」型平滑曲線，如果把手快速、大角度左右轉動，則前輪、後輪為平滑軌跡中隱藏不連續的「圓弧折線」。我們推論車身運動的軌跡與彎矩有關，可用撓度 deflection 解釋，而輪的軌跡為正弦函數的垂直包絡面，用惠更斯 Christian Huygens 提出的「波動說」解釋，我們不但用數學軟體 GeoGebra 畫出各種運動模式的軌跡，也自製可輸入程式的動力扭扭車滾出相同軌跡，印證我們的理論具有普遍性與再製性。

### 壹、研究動機

扭扭車(Fig.01)結構簡單無須電力、馬達，即可前進、後退、原地轉彎，是很普通的玩具<sup>1</sup>。即使五歲大的幼兒用小小的力量，可以搭載大人，不斷扭來扭去做「S」字型的前進、後退，真是太神奇了！使我們想了解：扭扭車如何前進（後退）？是什麼因素影響扭扭車的軌跡？能否用可輸入程式的動力扭扭車，也滾出類似軌跡？關於扭扭車的軌跡的參考文獻只有 2002 年 42 屆中區科展「扭扭車的前進後退原理」<sup>2</sup>，提到扭扭車利用前輪摩擦力不同前進，但無法畫出連續軌跡。如何用物理觀念配合數學軟體 GeoGebra，畫出扭扭車的連續軌跡，是我們的挑戰。

### 貳、實驗器材

Fig.01：大型扭扭車（左圖，耐重 120 kg），自製可輸入程式的動力扭扭車（右圖）



參、實驗原理：

一、扭扭車的構造與代號

扭扭車的結構可視為”T”字型(Fig.02,03)，即後輪 C、D 與車身 PK 保持垂直，前輪 A、B 與轉軸 K 約為正三角形 $\triangle KAB$ ，邊長為  $R=13\text{ cm}$ ，車身 KP 距離  $L=47\text{ cm}$ ，後輪距離  $2b=32\text{ cm}$ 。

Fig.02：扭扭車「前進」底面圖（右圖），前輪位於轉動軸 K 與後輪之間，等效車身 MP 減少，容易前進轉彎。

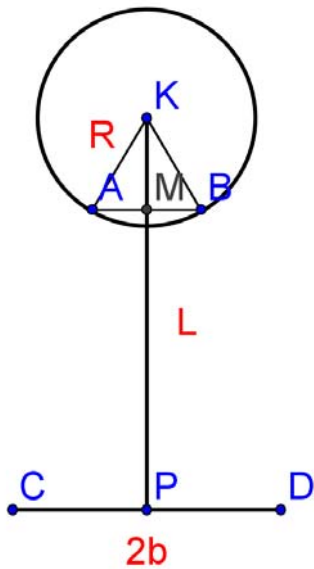
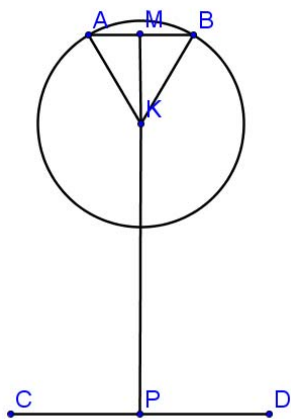


Fig.03：扭扭車「後退」底面圖（右圖），轉動軸 K 位於前輪與後輪之間，等效車身 MP 增加，容易大角度後退。



## 二、實驗方法

1. 在地上鋪複寫紙，再鋪壁報紙，人坐扭扭車滾過壁報紙，留下左、右相反的印痕，與理論作圖印證。
2. 用可輸入程式的動力扭扭車，也滾出類似軌跡，說明軌跡可重複印證。

## 三、理論推導

軌跡分 2 類討論：[1]從靜止啓動、[2]扭扭車前進(後退)

[1] 扭扭車從靜止啓動，一輪固定一輪滑動，可獲得較大的摩擦力，很容易由複數平面，畫出後輪軌跡為「扇形圓弧」。

假設：扭扭車前輪旋轉角度  $\alpha$ ，後輪旋轉角度  $\beta$ ，由車身「T」型與  $\Delta KAB$  結構 (Fig.04)，依順序決定各點相對於原點座標：

左後輪  $C$  } 中點  $\rightarrow P \rightarrow K$  { 逆時針轉  $90^\circ + \beta$  } 轉  $\alpha$  角  $\rightarrow M$  { 左前輪  $A$   
 右後輪  $D$  } { 順時針轉  $90^\circ - \beta$  } { 右前輪  $B$

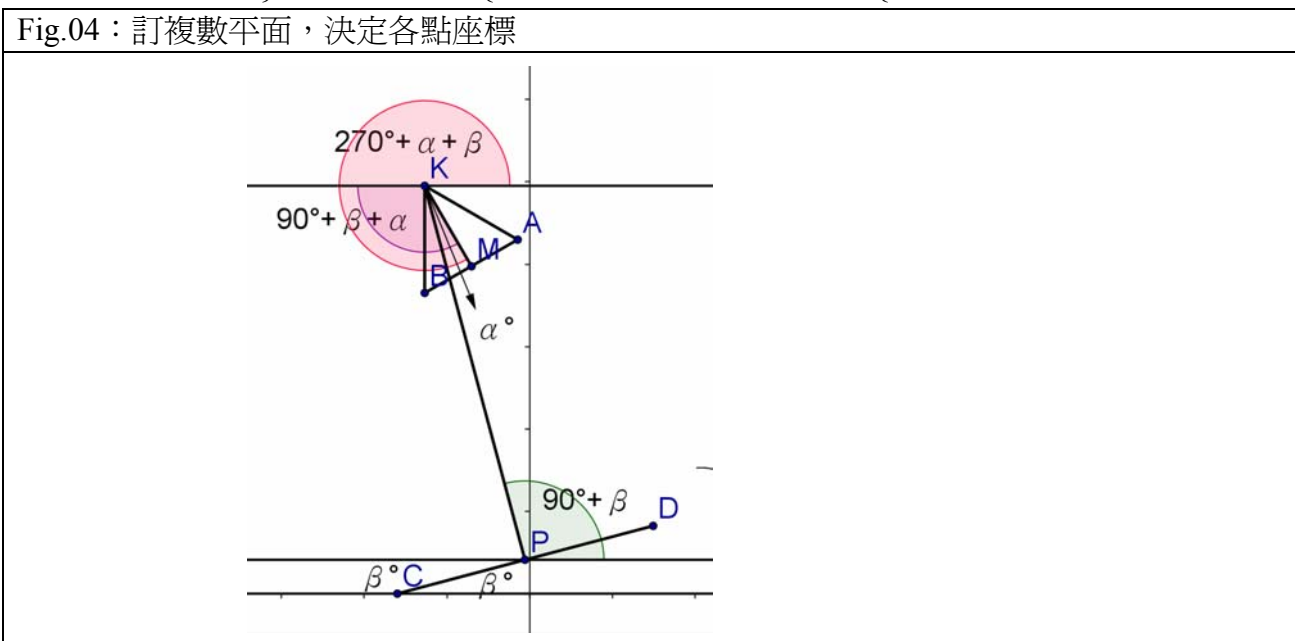
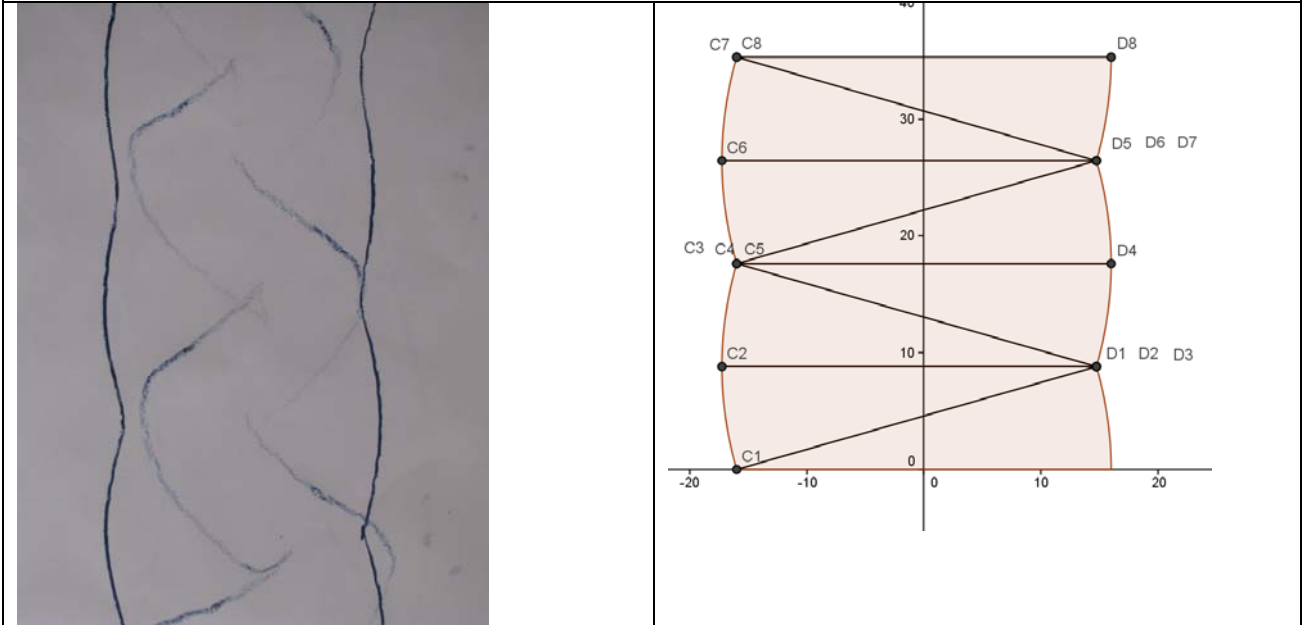


Fig.04：訂複數平面，決定各點座標

訂複數平面：左後輪  $C1 = (-b, 0)$ ，以  $2b$  為半徑，畫弧逆時針旋轉角度  $\beta$ ，則右後輪座標  $D1 = -b + 2b \cdot e^{i\beta}$ ，依順序  $N=1, 2, 3, 4$  為一週期，左後輪  $C$  座標  $C1, C2, C3, C4$ ，右後輪  $D$  座標  $D1, D2, D3, D4$ ，其對應方程式如下表，其中：

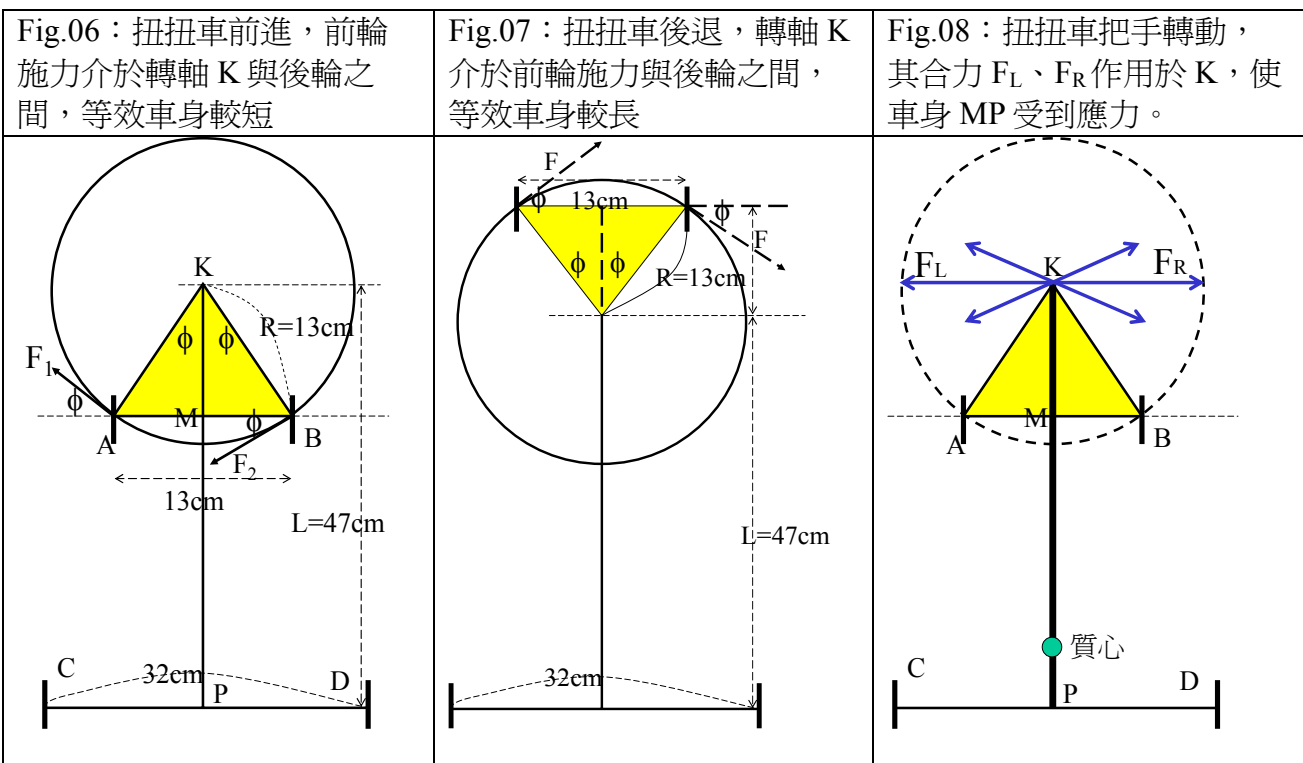
順序	左後輪 C	右後輪 D	前輪轉角度 $\alpha$	後輪轉角度 $\beta$	說明
$N=1$	$-b$	$-b + 2b \cdot e^{i\beta}$	$[0^\circ, 30^\circ]$	$[0^\circ, 15^\circ]$	左轉
$N=2$	$-3b + 2b \cdot e^{i\beta}$	$-b + 2b \cdot e^{i\beta}$	$[30^\circ, 0^\circ]$	$[15^\circ, 0^\circ]$	拉回
$N=3$	$-b + 2b \cdot e^{i\beta} - 2b \cdot e^{-i\beta}$	$-b + 2b \cdot e^{i\beta}$	$[0^\circ, -30^\circ]$	$[0^\circ, -15^\circ]$	右轉
$N=4$	$-b + 2b \cdot e^{i\beta} - 2b \cdot e^{-i\beta}$	$b + 2b \cdot e^{i\beta} - 2b \cdot e^{-i\beta}$	$[-30^\circ, 0^\circ]$	$[-15^\circ, 0^\circ]$	拉回

Fig.05：扭扭車從靜止轉動把手，後輪軌跡（外圍粗線）為「扇形圓弧」（右圖）。因為大角度後退，等效車身變長，當前輪（中間細線）轉動方向改變，出現「圓弧折線」。



[2] 人坐扭扭車轉動把手，扭扭車慣性前進，其運動有以下特徵：

1. 重心接近後輪中點 P，但施力 F 卻在前輪，以轉軸為中心做切線旋轉(Fig.06)。
2. 當扭扭車前進(Fig.07)，把手施力  $F_1$  與  $F_2$  沿切線方向  $\phi \cong 30^\circ$ ，為順時針、逆時針交互轉動的週期函數，往前的合力約與摩擦力  $f$  平衡， $F_1 \sin \phi - F_2 \sin \phi - f \cong 0$ ，則扭扭車可以等速率前進。
3. 向左、向右的合力  $F_L$ 、 $F_R$  可視為作用於轉軸 K，從質心觀察，車身 KP 受到彎矩而左右轉動(Fig.08)。



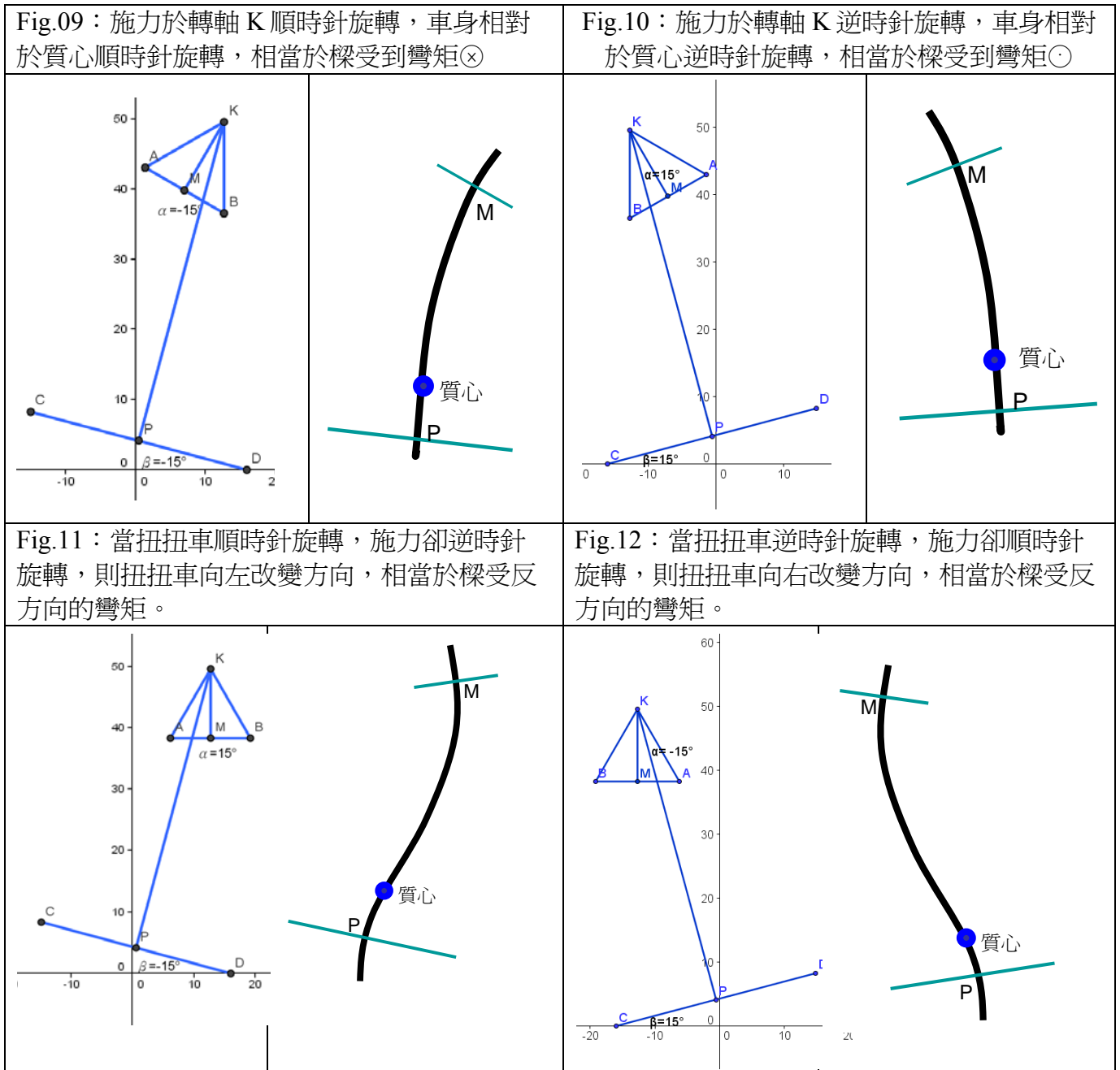
[3] 雖然從軌跡圖看不到車身的 T 型結構，車身視為彎曲形變的「懸臂樑 cantilever」<sup>3</sup>，當樑的一端受應力作用，則樑內任何一點在垂直方向產生「撓度」，車身弧線 MP 可視為各點撓度的連續「彈性曲線」(Fig.09,10,11,12)，因為

【1】從後輪中點 P 點看車身旋轉角  $\theta$  與撓度  $y$  滿足疊合條件。

【2】人質量愈大則扭扭車轉動慣量愈大，愈不容易轉動，旋轉角  $\theta$  較小，撓度  $y$  較小。

【3】施力於把手，其大小、方向都會改變，而且後輪的中點 P 不是固定端，所以扭扭車可能前進、後退、轉彎。

[4] 扭扭車原靜止在 Y 軸，當施力作用於地面，反作用力沒有通過質心，相當於懸臂樑有 4 種撓曲：

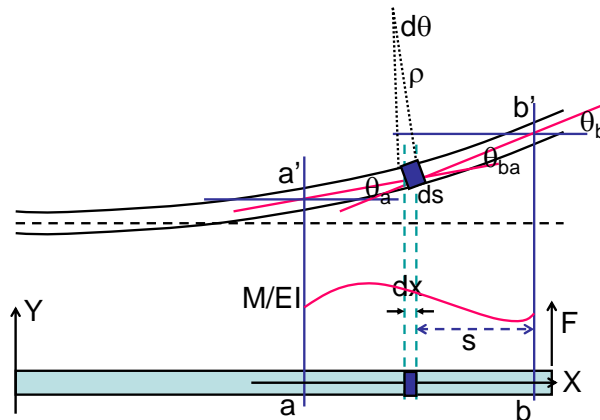


[5] 結構力學<sup>4</sup>關於懸臂樑 cantilever 術語的定義、代號、單位。

中文敘述	代號	定義	單位
彎矩	$M$	樑受力矩彎曲	$N \cdot m$
彈性模量	$E$	$E = \frac{\text{切應力 } \sigma}{\text{應變 } \varepsilon}$ ，其中 $\sigma = \frac{\text{拉力 } F}{\text{截面積 } A}$ ， $\varepsilon = \frac{\text{伸長量 } \delta}{\text{原長 } L}$	$N/m^2$
面積慣性矩	$I$	$I_x = \int y^2 dA$ 為 $x$ 軸的「面積慣性矩」	$m^4$
曲率半徑	$\rho$	小段曲線可視為圓弧的一部份，圓弧半徑為曲率半徑	$m$
曲率	$\kappa$	與曲率半徑 $\rho$ 為倒數關係： $\kappa = \frac{1}{\rho}$	$1/m$
樑的截面積	$A$	把扭扭車的車身視為「撓曲的樑」	$m^2$
樑的微小長度	$dx$	扭扭車車身的微小距離	$m$
撓曲剛度	$EI$	樑受彎矩(施力於扭扭車)而旋轉的難易程度	$N \cdot m^2$
旋轉角	$\theta$	樑從 $a$ 到 $b$ 切線與原直樑軸間的夾角 $\theta_{ba} = \theta_b - \theta_a$ 等於 $a$ 端到 $b$ 端的 $M/EI$ 圖形面積。	rad
撓度	$y$	扭扭車車身放置於 $X$ 軸，受彎矩作用向 $Y$ 軸偏轉距離	$m$

結構力學關於懸臂樑的彎矩有 2 個證明：

【1】當旋轉角  $\theta$  很大，曲率半徑  $\rho$  的微分式<sup>3</sup>：
$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}$$



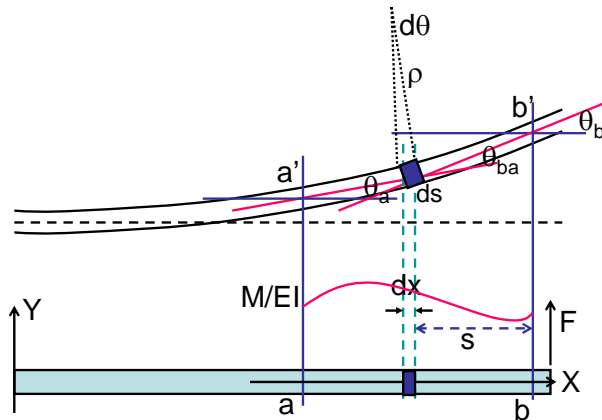
[證明]

由撓度曲線切線斜率  $\tan \theta = \frac{dy}{dx}$ ，對  $x$  微分： $\frac{d^2 y}{dx^2} = \sec^2 \theta \cdot \frac{d\theta}{dx}$

$ds$  可視為圓弧的一部份： $ds = \rho \cdot d\theta$ ，投影到  $X$  軸為  $dx$ ，則  $dx = ds \cdot \cos \theta$

$$\frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{\sec^2 \theta \cdot \frac{d\theta}{dx}}{\left(1 + \tan^2 \theta\right)^{3/2}} = \frac{\sec^2 \theta \cdot \frac{d\theta}{dx}}{\sec^3 \theta} = \cos \theta \cdot \frac{d\theta}{dx} = \cos \theta \cdot \frac{d\theta}{\cos \theta \cdot ds} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho}$$

【2】撓度曲線的微分方程式  $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$



[證明]

當  $\theta$  很小， $\frac{dy}{dx} = \tan \theta \cong \theta \cong 0$ ，則  $\frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\rho} = \kappa$

樑滿足虎克定律  $\begin{cases} E = \frac{\text{應力 } \sigma_x}{\text{應變 } \varepsilon_x} & \therefore \sigma_x = E \cdot \varepsilon_x = E\kappa \cdot x \\ \text{彎矩 } M = F \cdot x & \therefore dM = (\sigma_x \cdot dA) \cdot x \end{cases}$

$\therefore M = \int \sigma_x \cdot x \cdot dA = \int E\kappa \cdot y^2 \cdot dA = \kappa \cdot E \cdot \int y^2 \cdot dA = \kappa \cdot E \cdot I_x$

其中  $I_y = \int x^2 dA$  為 Y 軸的面積慣性矩

$\therefore$  曲率  $\kappa = \frac{M}{EI} = \frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\theta}{dx}$

$\therefore$  旋轉角  $\theta = \int \frac{M}{EI} dx$  為曲率  $\kappa = \frac{M}{EI}$  與 X 軸所圍的面積

撓度曲線(兩輪中點)的微分方程式:  $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$

若彎矩  $M$  為線性函數，則  $y = f(x)$  多項式函數為其解，軌跡有各種可能。

## 肆、討論

一、若彎矩  $M$  為包含  $t$  的週期函數，兩輪中點軌跡的偏微分方程式:  $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{M}{EI}$

[1] 懸臂樑用很小的應力  $\sigma$  就產生很大的應變  $\varepsilon$ ，其彈性模量  $E = \sigma/\varepsilon$  很小，表示扭扭車沿車輪的方向巡跡前進，除非施力方向改變，轉彎的車身不會回正。

[2] 人乘坐扭扭車，前輪離質心較遠，前輪的面積慣性矩  $I$  比後輪大，撓曲剛度  $EI$  很小約為定值。

[3]  $y$  為方程式的解，從質心看前輪中點的軌跡<sup>3</sup> (紅線)  $y_1 = A_1 \cdot \sin(k_1 x - \omega_1 t)$  與後輪中點的軌跡 (藍線)  $y_2 = A_2 \cdot \cos(k_2 x - \omega_2 t)$  不同，其中：振幅  $A$ ，角速度

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ ，波數  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ，相角  $kx - \omega \cdot t$ ，可用包絡面疊合出完整軌跡，與真實軌跡相符。



[4] 比較曲率半徑  $\rho$  與前輪寬度一半為  $b$  大小，當把手改變旋轉方向，兩輪軌跡在波

峰位置  $\tan \theta = \frac{dy}{dx} \cong 0$ ，則  $\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$

【1】扭扭車前進時，等效車身較短，彎矩  $M$  較小，曲率半徑  $\rho$  較大，軌跡容易出現「平滑曲線」(Fig.13)。

【2】扭扭車後退時，等效車身較長，彎矩  $M$  較大，曲率半徑  $\rho$  較小，當改變方向容易出現「圓弧折線」(Fig.14)。

Fig.13：當彎矩較大，則  $b > \rho$ ，包絡面於波峰為「圓弧折線」

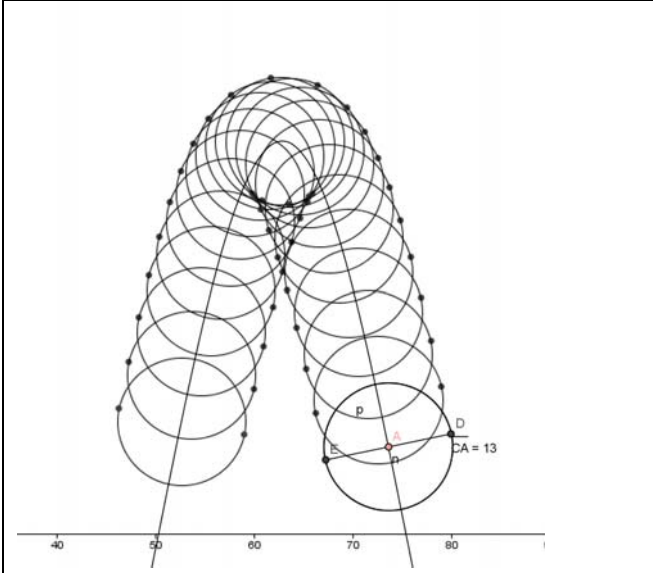


Fig.14：當彎矩較小，則  $b < \rho$ ，包絡面於波峰為「平滑軌跡」

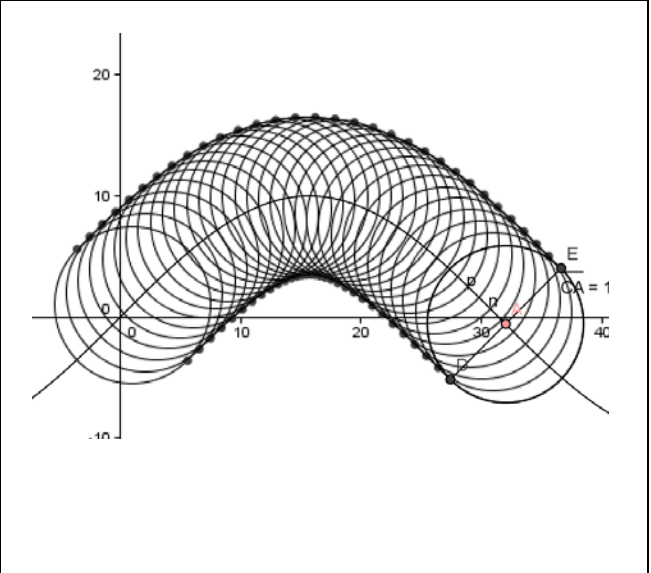


Fig.15：扭扭車大角度轉動把手後退，軌跡出現「圓弧折線」，用 GeoGebra 作圖，軌跡相符。

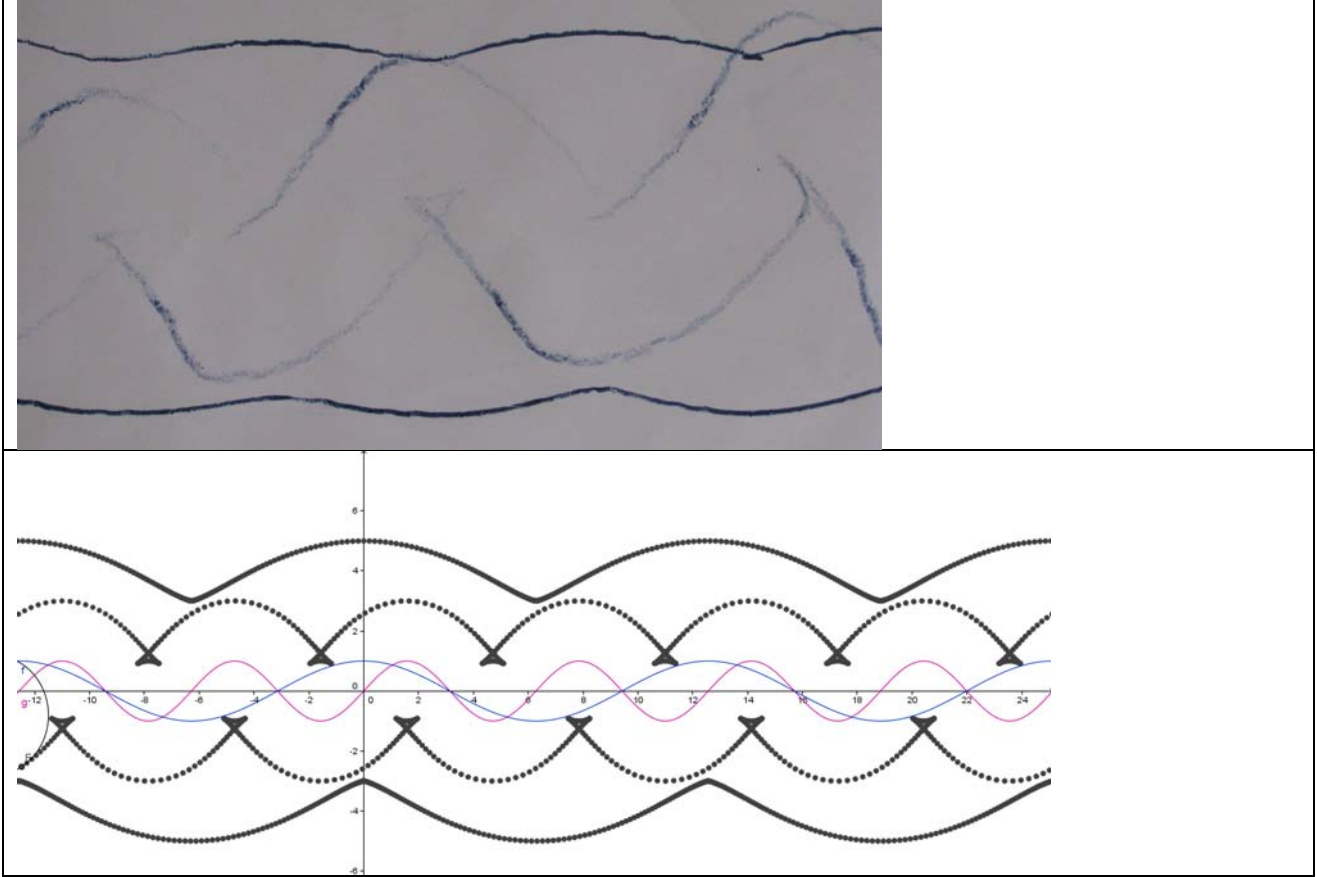


Fig.16：扭扭車小角度慢速轉動把手，前輪、後輪軌跡為「平滑曲線」。

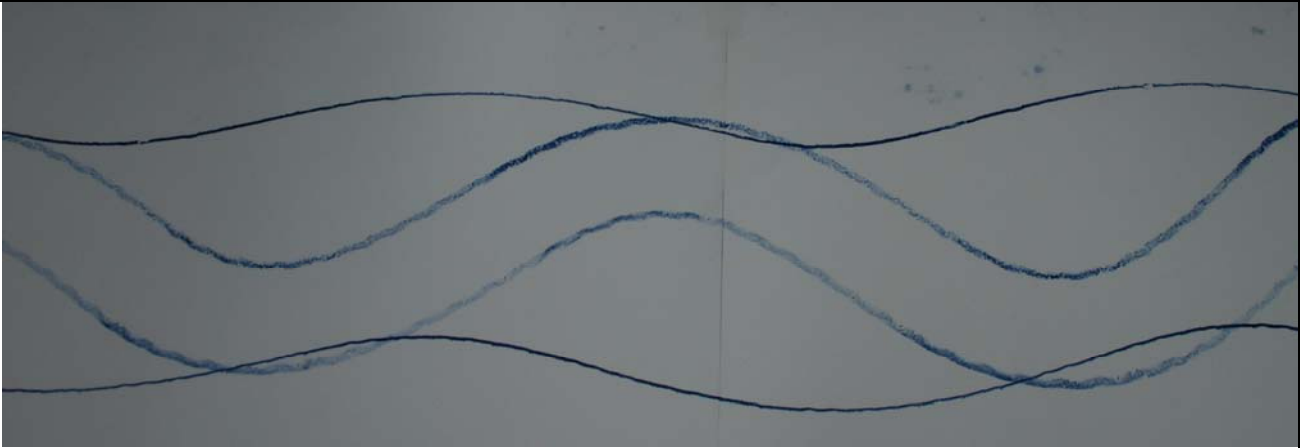


Fig.17：兩輪中點的軌跡為正弦函數，等角度的動點為圓心，兩輪距離為直徑畫圓，紅線為正弦函數的法線方向，端點為兩輪的軌跡。

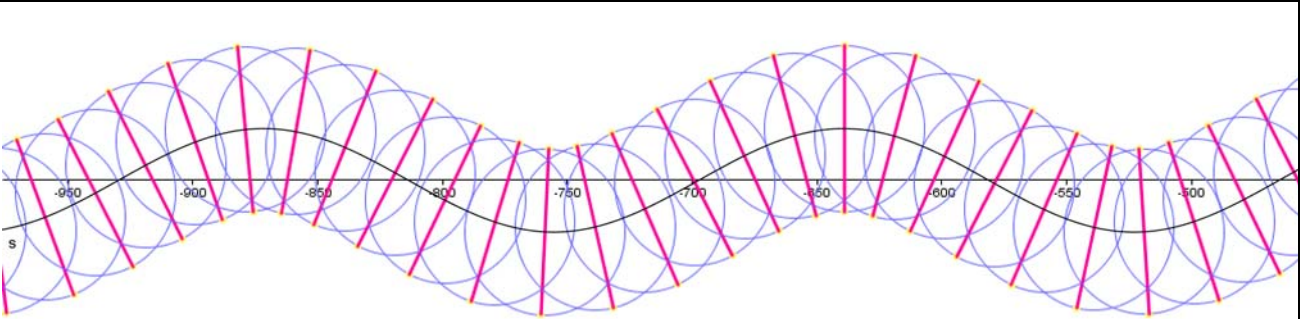


Fig.18：相鄰圓弧面組成包絡面為兩輪軌跡，理論上包絡面由許多圓弧的切線構成。

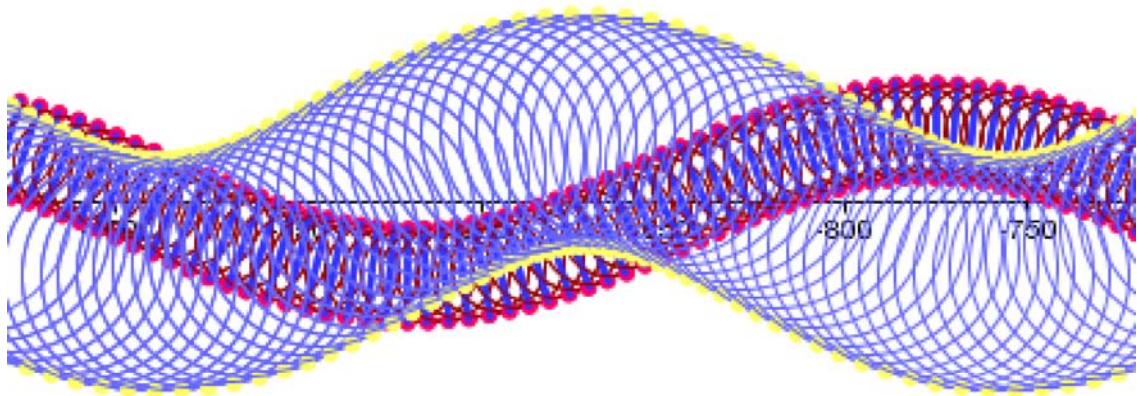


Fig.19：扭扭車大角度轉動把手後退，前輪(顏色淺)、後輪(顏色深)於波峰出現「圓弧折線」

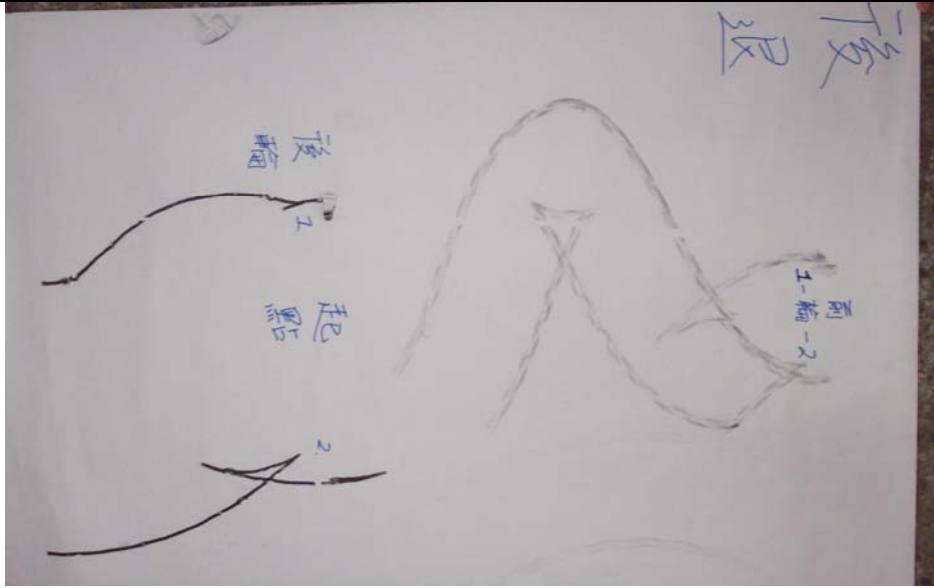
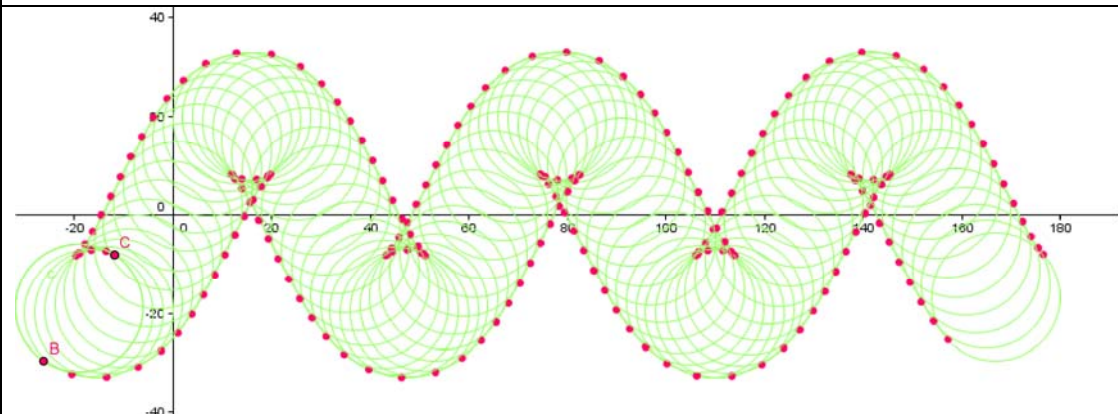


Fig.20：扭扭車向右前進，依等角度畫出包絡面，發現包絡面於「圓弧折線」的點愈密，表示輪轉彎時切線速率愈小，甚至有倒退現象，於波峰位置的點愈疏，表示右輪的切線速率愈大，轉動方向剛好改變。



二、人很難控制扭扭車把手轉動角度，但動力機械扭扭車，可以用程式控制左、右轉動角度、動力輸出，將車輪沾水後於沾水紙留下水漬，與扭扭車軌跡相符，測量相鄰弧線的轉折點距離為波長  $\lambda$ ，弧線高度  $H$ ，單位為「格」，1 格 = 5.5 cm。

[1] 扭扭車前進可視為波傳播速率  $v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k}$ ，當扭扭車輸出動力越大，前輪轉動角速率  $\omega$  越大，週期  $T$  越小，波數  $k$  越大，波長  $\lambda$  越短，前輪出現「圓弧折線」。

[2] 當前輪轉動角度越大，扭扭車循跡慣性速度前進，將使擺動振幅  $A$  越大。

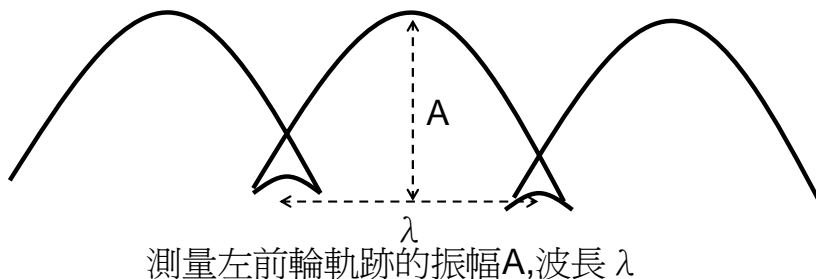


Fig.21：動力扭扭車前進軌跡：前輪轉動  $30^\circ$ ，振幅約 1 格，馬達動力輸出 75%，週期 0.48 秒，前輪、後輪波長約 3 格，前輪(內線)有「圓弧折線」，後輪(外線)有「扇形圓弧」。

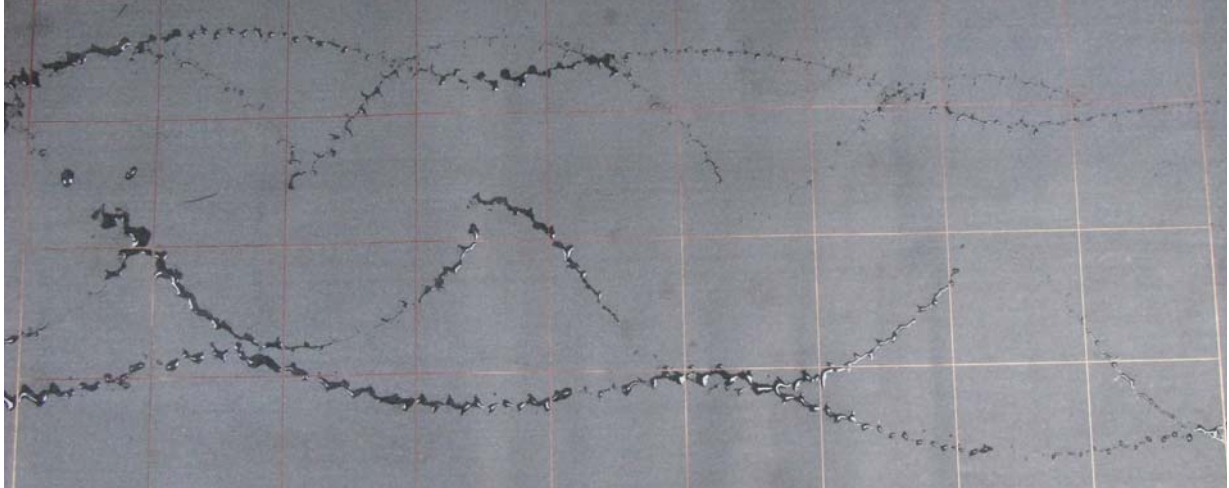


Fig.22：動力扭扭車前進軌跡：前輪轉動  $15^\circ$ ，振幅約 0.5 格，馬達動力輸出 75%，週期 0.36 秒，前輪(內線)有「圓弧折線」，後輪(外線)「扇形圓弧」不明顯。

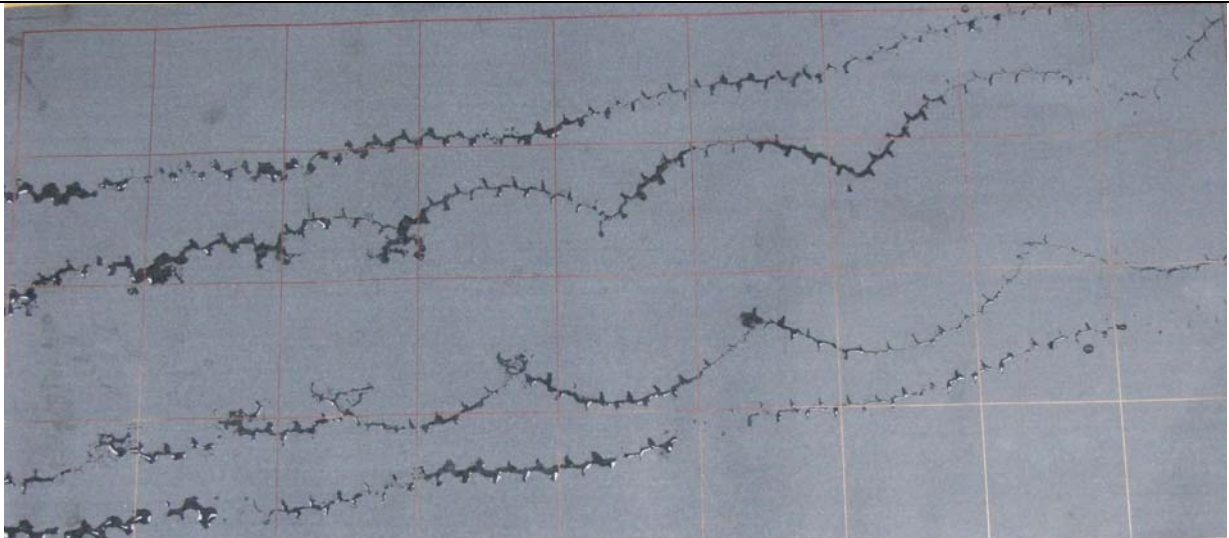
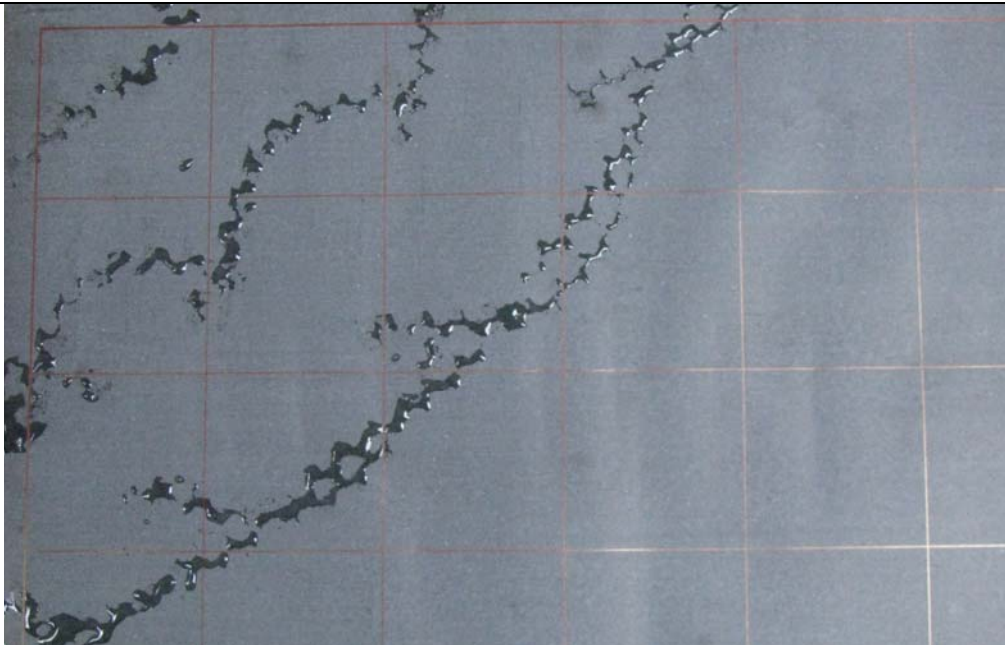
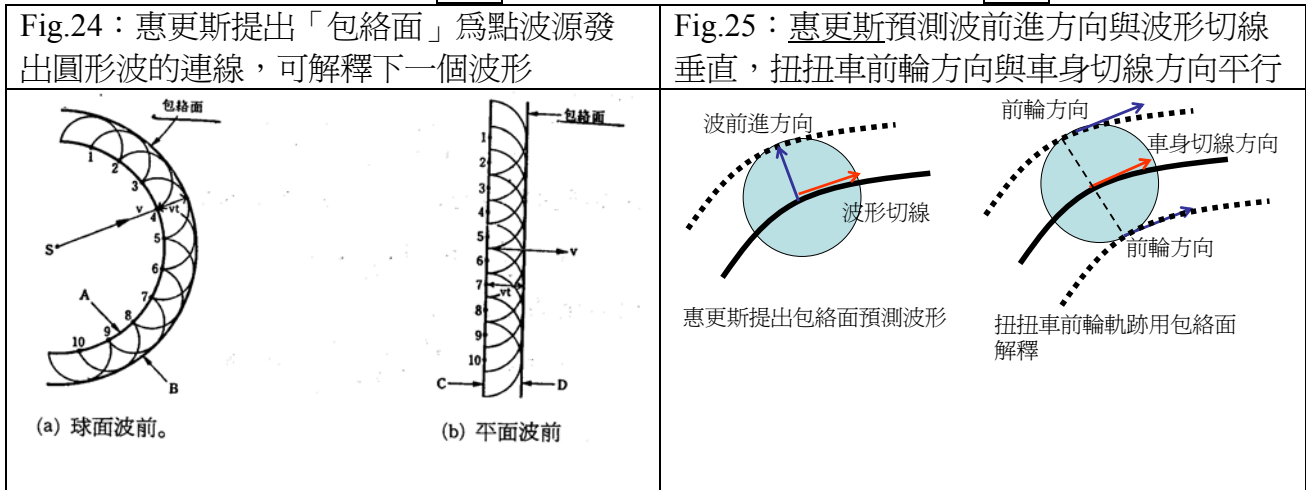


Fig.23：動力扭扭車前進軌跡：前輪轉動  $15^\circ$ ，振幅約 0.5 格，馬達動力輸出 90%，週期 0.32 秒，轉動甚快脫離紙面，前輪、後輪波長約 1.5 格，前輪有「圓弧折線」。



三、把兩輪的軌跡用包絡面(envelope)，源自於惠更斯 Christian Huygens 提出的「波動說」<sup>5</sup>的概念(Fig.24)：每個前進波的波前，可以視為許多點波源（下圖 1,2,3,4..表示）發出圓形波，下一個波形就是圓形波的包絡面，既然包絡面有各種方向，那麼波源從哪裡來就不重要。

扭扭車下一瞬間的軌跡由把手施力決定，兩輪軌跡為車身行進方向兩側畫圓弧的包絡面，當把手下一瞬間改變旋轉方向、角度，兩輪軌跡也會改變。差別是：惠更斯預測波前進方向與波形切線垂直，扭扭車前輪方向與車身切線方向平行。(Fig.25)



## 五、結論：

一、扭扭車前進原理<sup>2</sup>：

因為輪有方向性，若沿輪滾動方向，摩擦力  $f$  甚小，若偏移輪滾動方向，摩擦力較大，當把手旋轉改變兩輪的正向力大小，則摩擦力不同，作用於轉軸切線方向，為扭扭車動力來源。

二、雖然扭扭車不像質點上下振動，而是隨波前進，用「樑的撓度」只能寫出兩輪中點的

偏微分方程式  $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{M}{EI}$ ，可解釋兩輪中點的方程式  $y = A \cdot \sin(kx - \omega t)$  與彎矩  $M$ ，撓曲剛度  $EI$  有關，但兩輪軌跡不是波函數的平移，而是與車身平行的包絡面。

三、包絡面雖然可用 GeoGebra 動畫模擬兩輪軌跡，與扭扭車兩輪軌跡相符，但無法寫出兩輪的方程式，因為

[1] 包絡面為許多圓弧的切線方向，而切線隱藏不連續的折線，下一瞬間各種方向都有可能。

[2] 當把手大角度擺動，或是扭扭車後退，必然出現不連續的「圓弧折線」。

四、扭扭車只需要很小的施力，就可前進、左轉、右轉，不需要倒車檔，只需要等效車身變長，就可以後退、倒車左轉、倒車右轉，扭扭車比任何車輛都靈活，卻沒有任何相關論文討論扭扭車的 S 型連續軌跡，只能將扭扭車的軌跡可分 3 類，要用不同數學模式，用 GeoGebra 畫出軌跡，充滿原創挑戰：

模式	動力原理	數學模式	軌跡
從靜止 啓動	前輪需要較大摩擦力前進，不能慣性滾動	訂複數平面 $r \cdot e^{i\theta}$ 簡潔寫出軌跡方程式，其中：實部代表 $X$ 座標，虛部代表 $Y$ 座標。	當改變方向，出現「扇形圓弧」
小角度 前進	等效車身短，沿輪的方向前進。	兩輪中點軌跡如行進波 $y = A \cdot \sin(kx)$ ，振幅 $A$ 較小，波數 $k$ 較小。	前輪、後輪以 $R$ 、 $b$ 為半徑，行進波為圓心的包絡面。
大角度 後退	等效車身長，利用前輪摩擦力不同運動。	兩輪中點軌跡如行進波 $y = A \cdot \cos(kx)$ ，振幅 $A$ 較大，波數 $k$ 較大。	轉彎時，輪有先倒退再轉彎現象，於波鋒出現「圓弧折線」。

五、蛇類巧妙利用扭曲再伸直即可「S」字型前進，對蛇而言，身體小角度轉動是最省力（彎矩最小）的方式。

六、程式輸入動力機械扭扭車，可以控制左、右轉動角度與動力輸出，從軌跡圖可以印證：即使不同扭扭車，兩輪中點的軌跡  $y = A \cdot \sin(kx - \omega t)$  正確，具有普遍性、再製性 reengineering。

#### 參、參考資料：

- [1] 扭扭車曾經榮獲 1994 年玩具設計競賽優良設計獎，專利人是：賴金益先生。
- [2] 2002 年中區科展物理組「扭扭車的前進後退原理」，作者：施敏權、王瑋婷、何長芳、黃鈴育。
- [3] Engineering Mechanics for Structure, ch.8 deflections due to bending p.8.1  
[web.mit.edu/emech/dontindex-build/full-text/emechbk\\_8.pdf](http://web.mit.edu/emech/dontindex-build/full-text/emechbk_8.pdf)
- [4] 材料力學 下冊 第七章 應力與應變分析 p.593 蘇金佳 譯 東華書局  
James M. Gere, Stephen P. Timoshenko “Mechanics of Materials” 4<sup>th</sup> edition
- [5] 基礎物理 (2008) 翰林版 第六章: 光學 p.265, p.273