第九屆旺宏科學獎

成果報告書

參賽編號：SA9-514

作品名稱：水的附著能量探討

姓名：徐啓峻

關鍵字：__K 值__、___附著位能____

目錄

摘要

水滴靜止在桌面上時，不僅受到了重力、正向力、表面張力以及附著力，而其中附著力是高中課綱不曾深入探討過的，而我們也找不到和接觸面間位能有相關的理論，於是我們運用熱力學第二定律作為理論基礎，使用附著力能量型式的原創假設，並設計實驗來驗證。

壹、 研究動機

兩個物體接觸時，會發現物體產生形變。有些是可恢復的，有些不行。比方說，拉長橡皮筋所產生的變形、發生車禍時車殼金屬所產生的變形、甚至兩物體碰撞時也會產生形變。

我們首先觀察麵糰，當我們將它用力丟向桌上洩憤時，麵糰會嚴重變形，而當我們愈生氣、愈用力，它將形變愈嚴重，我們理所當然地意識到「施力愈大，形變過程中與桌面接觸的面積愈大」，於是我們開始著手於麵糰與桌面接觸過程中引發的一切物理現象，但在實際操作後發現困難，因為麵糰保存不易，我們無法控制麵糰的大部分控制變因，我們想用其他材質取代，然後我們從窗外的雨滴找到了靈感。

我們發現水滴落在桌面上時的運動狀態和麵糰十分相似，因此我們原先是探討水滴由高處掉落，其靜止在桌面時的形狀，和落下高度有何關係，然而發現在相同介面、水量、溫度、溼度的環境下平衡後的水滴形狀是相同的。

因此，我們推論附著力可表示成一個附著位能，且存在一個類似表面張力的常數(ex:水的在室溫 25 度下 T=0.07275 nt/m)，其取決於兩介面的性質。

貳、 研究目的

一、 推導水滴含有的各種位能形式，並與之量化包含重力位能、表面張力位能、附著位能。

二、 設計實驗並測得數據，並以推導出的理論解釋、驗證。

參、 研究設備及器材

一、 針筒

二、 量杯

三、 電子天平(精密度 0.01g)

四、 尺(長 15 公分)

五、 墨水

六、 壓克力板

肆、　研究過程或方法

我們接下來將研究各種情況的桌面上水滴的能量，並試圖推導一般式。

一、　桌面上的水滴

（一）　可由下列三種位能下手

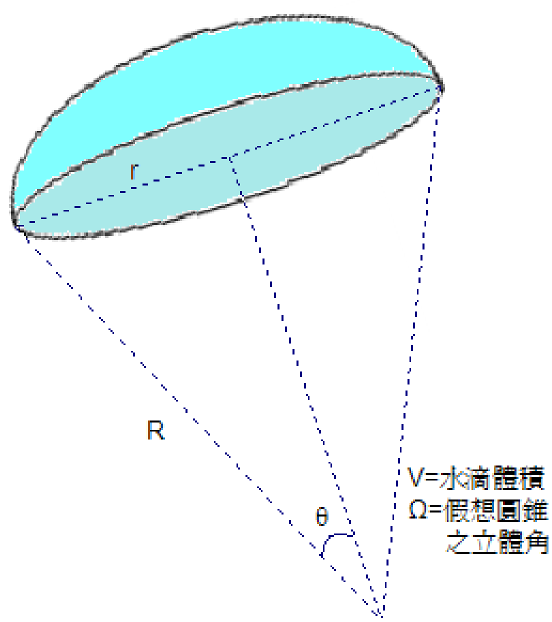
1. 重力位能
2. 表面張力位能
3. 附著位能

（二）　水滴形狀假設模型：　為方便推導，在此先假設水滴為均勻密度的，且形狀近似為圓球體的切塊，由圖(一)可見體積 V 和球體半徑 R、平面角 θ 的關係為

$$V=\frac{\Omega}{3}R^3-(R\sin\theta)^2\times R\cos\theta\times\frac{\pi}{3}\cdots\cdots(1)$$

上式為甜筒體積減去圓錐，而立體角 $\Omega=2\pi(1-\cos\theta)$ 於是就得到了

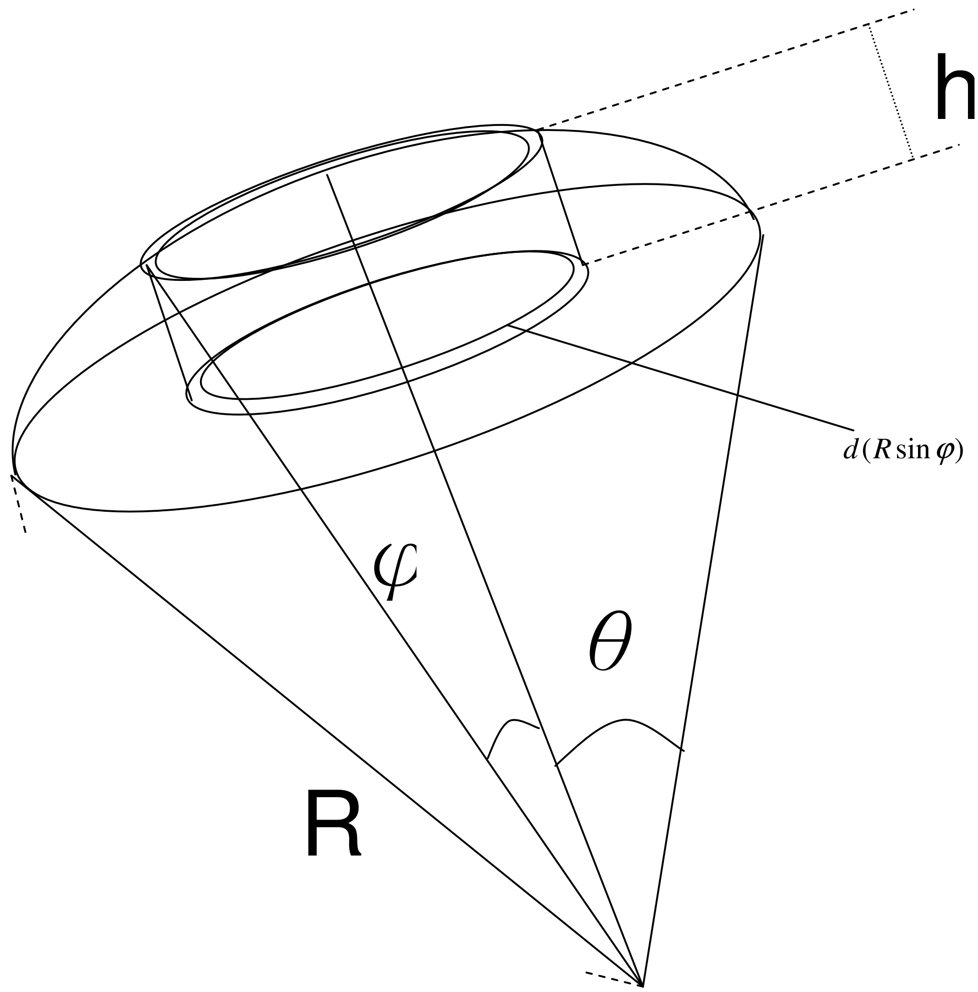
$$V=\frac{R^3\pi}{3}\times(\cos^3\theta-3\cos\theta+2)\cdots\cdots(2)$$



（圖一）

有了水滴的基本資料後，便可開始進行以下推導：

1. 重力位能（U_g）



（圖二）

定義：$U_g = mgh_c$（質量 m 乘以重力場強度再乘以質心高度 h_c），由密度均勻的假設，可知 $m = \rho V$（ρ 密度，V 體積）

於是 $U_g = \rho g V h_c$ ……………………………………………(3)

$$h_c = \frac{\rho \int h \times dV}{\rho V} = \frac{\int h \times dV}{V} \cdots\cdots(4)$$

這裡我們使用環形的柱體作積分

$$\int h \times dV = \int_0^{\theta} [2R\sin\varphi\pi \times R(\cos\varphi - \cos\theta)] \times \frac{R(\cos\varphi - \cos\theta)}{2} d(R\sin\varphi)$$

$[2R\sin\varphi\pi \times R(\cos\varphi - \cos\theta)]$ 為微小圓環柱體積

其中 $\frac{R(\cos\varphi - \cos\theta)}{2}$ 為微小圓環柱的高質心高度

$d(R\sin\varphi)$ 為微小圓環柱半徑變化

積分出來的結果為

$$\int h\times dV=\frac{R^4\pi}{12}\times\left[3-8\cos\theta+6\cos^2\theta-\cos^4\theta\right]\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

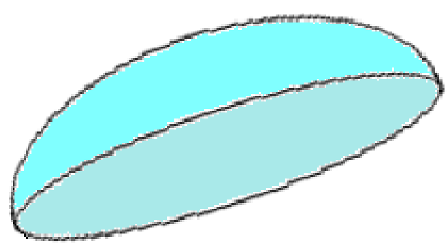
由(4)式

$$U_g=\rho gV\times h_{com}=\rho g\times\int h\times dV=\rho g\frac{R^4\pi}{12}\times\left[3-8\cos\theta+6\cos^2\theta-\cos^4\theta\right]$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

2. 表面張力位能(U_T)

高中課本學過表面張力常數 T 是單位面積儲存的能量，所以表面張力位能為總表面積乘以 T，於是我們可以表示如下。



(圖三)

$$U_T=T\times Area\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

(Area 為總表面積如圖三)

$$U_T=T\times R^2(\sin^2\theta\times\pi+\Omega)\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

其中 $\Omega=2\pi\times(1-\cos\theta)$ $\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$

$$U_T=T\times R^2\pi(3-2\cos\theta-\cos^2\theta)\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

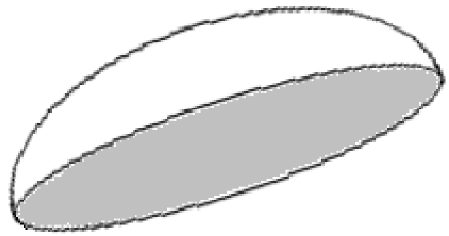
3. 附著位能(U_A)

原創假設:　　因為表面張力是常數 T 乘以總表面積，所以我們推測附著位能可能和桌面接觸的面積成正比，又由於附著力是吸引力，所以它的位能應該是負值，故應有如下關係：

$$U_A=-K\times\text{底面積}$$

$$\mathrm{U_A} = -K \times R^2 \pi \times \sin^2 \theta \quad \cdots\cdots (11)$$

如圖四



圖四

(三)總能可寫為重力位能、表面張力位能、附著位能的相加

$$U_{total} = U_g + U_T + U_A \quad \cdots\cdots (12)$$

其中 $$U_g = \frac{\rho g R^4 \pi}{12} \times \left[3 - 8\cos\theta + 6\cos^2\theta - \cos^4\theta\right] \cdots\cdots (13)$$

$$U_T = T \times R^2 \pi (3 - 2\cos\theta - \cos^2\theta) \cdots\cdots (14)$$

$$\mathrm{U_A} = -K \times R^2 \pi \times \sin^2\theta \quad \cdots\cdots (15)$$

$$R = \left[\frac{3V}{\pi(\cos^3\theta - 3\cos\theta + 2)}\right]^{\frac{1}{3}} \cdots\cdots (16)$$

$$r = R\sin\theta \cdots\cdots (17)$$

(四)熱力學第二定律：「系統在沒有外力之下，會趨於最低能量、最大亂度」

由此可見，一靜置水滴也保持在最低能量，表面張力位能、附著位能、重力位能相加的值要最小

亦即，水滴會自動調整 r 或 θ 使 U_{total} 達及小值：

$$\frac{d\mathrm{U}_{total}}{d\theta} = \frac{d\mathrm{U}_g}{d\theta} + \frac{d\mathrm{U}_A}{d\theta} + \frac{d\mathrm{U}_T}{d\theta} = 0 \quad \cdots\cdots (18)$$

由(12)~(18)式可得

$$K = T\frac{(1-\cos\theta)}{\cos\theta} + \frac{\rho g r^2}{6} \times \frac{2 - 3\cos\theta + \cos^3\theta}{\cos\theta \sin^2\theta} - \frac{\rho g r^2}{12} \times \frac{3 - 8\cos\theta + 6\cos^2\theta - \cos^4\theta}{\cos^4\theta - 3\cos^2\theta + 2\cos\theta}$$

$\cdots\cdots$(19) （詳細推導見附錄）

因為

$$R=\left[\frac{3V}{\pi(\cos^3\theta-3\cos\theta+2)}\right]^{\frac{1}{3}} \cdots\cdots(20)$$

且 $r=R\sin\theta$ ⋯⋯(21)

所以由(21)、(22)可得

$$r=\left[\frac{3V\sin^3\theta}{\pi(\cos^3\theta-3\cos\theta+2)}\right]^{\frac{1}{3}} \cdots\cdots(22)$$

r 是水滴在桌面上的半徑可用尺測得

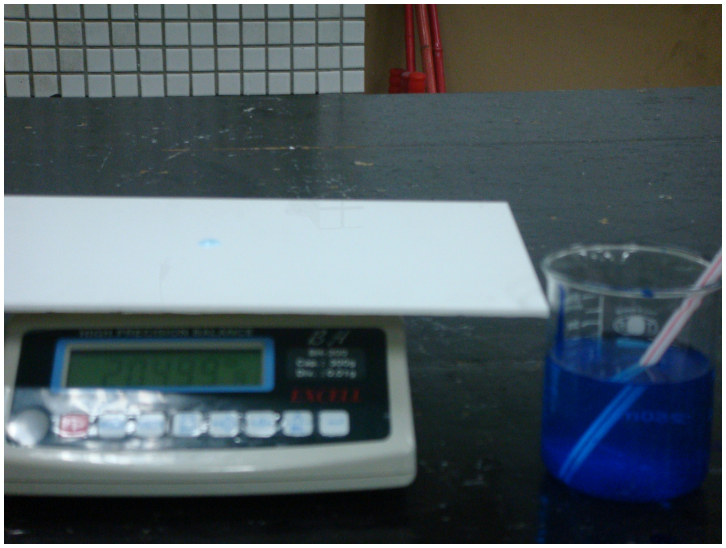
V 是可測的

於是將 r、V 代入(22)，θ 可求得

r、V、θ 再代入(19)式，K 可求得

(五)實驗步驟

1. 將待測平板放置於電子天秤(精密度 0.01g)，並歸零
2. 在平板上滴上質量不同的水滴
3. 由已歸零的電子天秤可測得水滴質量
4. 水的密度以 $1000\,kg/m^3$ 作計算，於是體積 V 求得
5. 以精密度 0.1cm 的直尺測量水滴半徑 r
6. 由桌上的半徑 r 水滴體積 V，代入(22)式，求得 θ
7. 由桌上的半徑 r 水滴體積 V 以及 θ，代入(19)式，求得 K
8. 重複(2)～(8)，測得不同水滴之 K 值

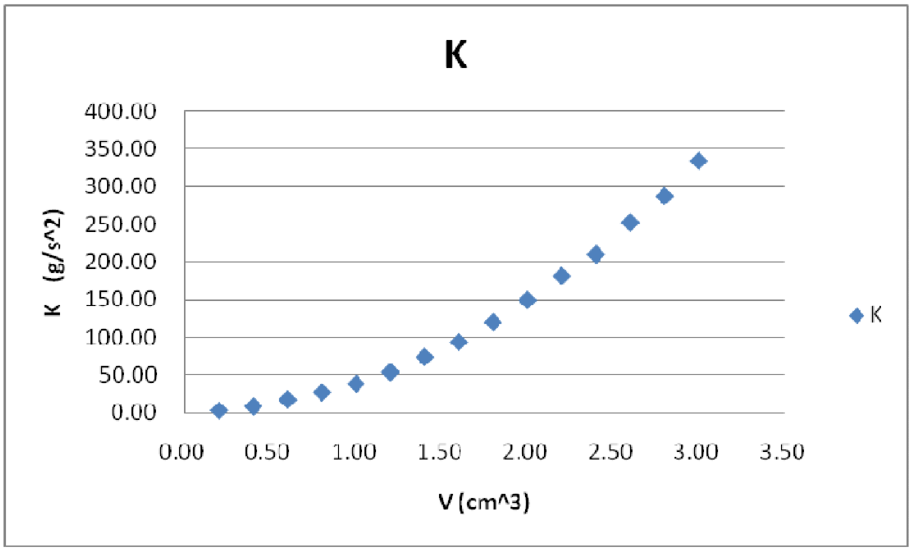


伍、 研究結果(數據)

運用理論和 V 值 r 值可得 θ 角，並可求得 K 值

水滴體積 V(cm^3)	接觸面直徑 2r(cm)	θ(徑度)	K(g/s^2)
0.20	1.25	0.20	2.59
0.40	1.67	0.30	7.98
0.60	1.80	0.41	16.95
0.80	2.25	0.44	26.59
1.00	2.67	0.46	37.83
1.20	2.71	0.53	53.42
1.40	2.89	0.58	73.42
1.60	3.04	0.62	93.48
1.80	3.21	0.66	119.76
2.00	3.27	0.71	149.14
2.20	3.51	0.73	181.16
2.40	3.66	0.75	209.76
2.60	3.82	0.78	252.19
2.80	4.11	0.78	287.19
3.00	4.21	0.81	334.07

※表格中的 V 值為水滴體積，r 為截面積(圖形)的半徑，θ 為圖二中的角。



圖(五)

陸、 討論

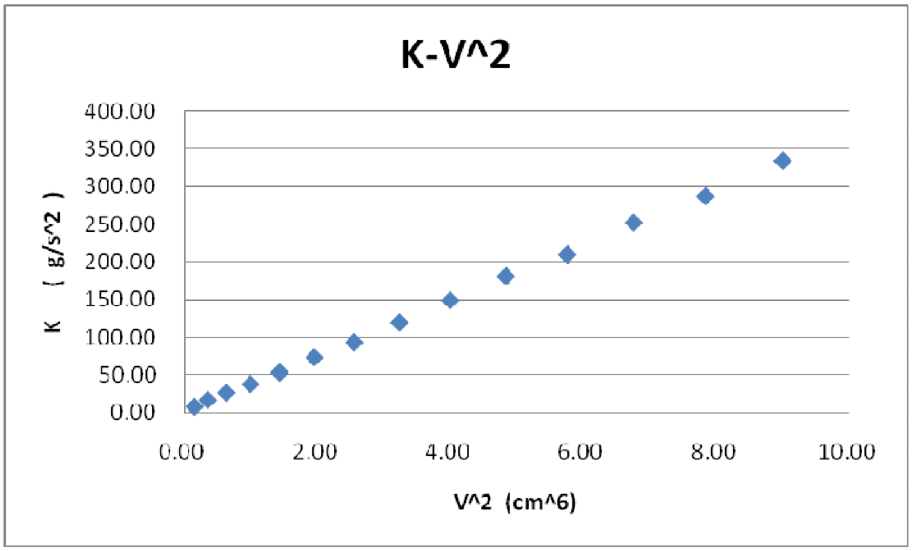
一、矛盾點：

從圖(五)，我們發現到K值不是一個定值，而且隨著V(體積)而增加，這顯然和先前的假設有所牴觸，為了要解決這樣的矛盾是必須要重新探討附著位能與其他物理量的關係，因為重力位能和表面張力是不會出錯的，而根據熱力學第二定律:總位能微分為零也應是不會錯的。

在這樣矛盾又弔詭的氛圍下，我們運用K和V^2作圖得出了一個驚人的事實。

二、作圖：

$V^2(cm^6)$	K(g/s^2)	$K/V^2(g/s^2/cm^6)$
0.04	2.59	64.75
0.16	7.98	49.88
0.36	16.95	47.08
0.64	26.59	41.55
1.00	37.83	37.83
1.44	53.42	37.10
1.96	73.42	37.46
2.56	93.48	36.52
3.24	119.76	36.96
4.00	149.14	37.29
4.84	181.16	37.43
5.76	209.76	36.42
6.76	252.19	37.31
7.84	287.19	36.63
9.00	334.07	37.12



圖(六)

這個驚人的事實就是K正比於 V^2，圖(六)是K和 V^2 的關係圖，大致可看出K正比於 V^2，其斜率大致上介於36~38$(g/s^2 \cdot cm^6)$之間，變化不大，用線性迴歸得到 $\dfrac{K}{V^2}$，遂設另一個新常數 $K'=\dfrac{K}{V^2}=$ 37.1$(g/s^2/cm^6)$ 。

三、解決衍生疑慮：

因為原先假設 $U_A=-K\times A_{底面積}$，然後由 $\dfrac{dU_{total}}{d\theta}=\dfrac{dU_g}{d\theta}+\dfrac{dU_A}{d\theta}+\dfrac{dU_T}{d\theta}=0$ 得到K值。

但若K與V有關，即如實驗顯示既然K=$K'V^2$，則由 $\dfrac{dU_{total}}{d\theta}=\dfrac{dU_g}{d\theta}+\dfrac{dU_A}{d\theta}+\dfrac{dU_T}{d\theta}=0$，所求得的K值是否仍為正確呢? 也就是，若K值與V有關是否會改變 $\dfrac{dU_A}{d\theta}$ 型式?

我們認為是多慮的:

比較兩個不同式子(23)、(24)

$$U_A=-K\times 底面積=-K\times R^2\pi\times\sin^2\theta \cdots\cdots\cdots\cdots(23)$$

以及 $$U_A=-K'V^2\times R^2\pi\times\sin^2\theta \cdots\cdots\cdots\cdots(24)$$

將上面兩式微分，得(25)、(26)式

$$\frac{dU_A}{d\theta}=-K\times\frac{d(R^2\pi\times\sin^2\theta)}{d\theta} \cdots\cdots\cdots\cdots(25)$$

$$\frac{dU_A}{d\theta} = -K'V^2 \times \frac{d(R^2\pi \times \sin^2\theta)}{d\theta}$$ [對一顆水滴來說 K' 和 V^2 均為定值] …(26)

對(25)、(26)式來說 $\frac{dU_A}{d\theta}$ 幾乎相同，差別只在於前面的常數項

原先我們認為附著位能只正比於接觸面積，而經由實驗數據顯示，附著位能正比於接觸面積也正比於水滴體積的平方值，也就是不同大小的水滴在相同的截面下位能值並不相同。

實驗結果驗證了 $U_A = -K'V^2 \times A$ ，其中 U_A 是附著位能、V 是水滴的體積、K' 是常數，由 K-V^2 關係圖的斜率，我們作線性迴歸得到 K'=37.1$(g/s^2/cm^6)$ 。

柒、 結論

一、 我們經由原創理論假設附著位能和接觸面積成正比，並由熱力學第二定律分析了能量大小，進而得到附著位能和接觸面積的比值。

二、 然而其比值卻非一個定值，於是修正理論，並在不違反大前題--熱力學第二定律(位能微分=0)的情況下，得到附著位能和接觸面積乘以液滴體積的平方成正比，也就是 $U_A = -K'V^2 \times A$ ，而 K'=37.1$(g/s^2/cm^6)$ 。

至於為何 $U_A = -K'V^2 \times A$ ，以現下所學，仍無法解釋，希望將來在大學中能學到所需的知識使這篇文章更完整。

捌、 參考資料及其他

一、 高三全華出版選修物理上
二、 大學普物 haliday 上下冊
三、 師大教授物理教學網上的 Java 水滴模型 動畫
四、 奇豫概念物理講義
五、 物奧初複選試題集
六、 工程數學
七、 維基百科—立體角之定義
八、 維基百科—表面張力量值

玖、 附錄

計算手稿：

PAGE

DATE

由定義 $h[\text{質心高度}] = \frac{\int \rho h\, dV}{\rho V} = \frac{\int h\, dV}{V}$

$$\Rightarrow Vh = \int h\, dV$$

$$Vh = \int_0^{\theta_0} (2R\sin\theta\,\pi) \times [R(\cos\theta - \cos\theta_0)] \times \left[\frac{R(\cos\theta - \cos\theta_0)}{2}\right] dR\sin\theta$$

$$Vh = R^4\pi \int_0^{\theta_0} (\cos\theta - \cos\theta_0)^2 \sin\theta\, d\sin\theta$$

$$Vh = R^4\pi \int_0^{\theta_0} (\cos\theta - \cos\theta_0)^2 \boxed{\sin\theta}\cos\theta \boxed{d\theta}$$

$$Vh = R^4\pi \int_0^{\theta_0} (\cos\theta - \cos\theta_0)^2 \cos\theta \boxed{-d\cos\theta}$$

$$\Rightarrow Vh = R^4\pi \int_0^{\theta_0} -(\cos\theta - \cos\theta_0)^2 \cos\theta\, d\cos\theta$$

$$\Rightarrow Vh = R^4\pi \int_{\theta_0}^{0} [\cos^2\theta - 2\cos\theta\cos\theta_0 + \cos^2\theta]\cos\theta\, d\cos\theta$$

$$Vh = R^4\pi \left[\frac{1}{4}\cos^4\theta - \frac{2}{3}\cos^3\theta\cos\theta_0 + \frac{1}{2}\cos^2\theta\cos^2\theta_0 \Big|_{\theta}^{0}\right]$$

$$Vh = R^4\pi \left[\frac{1}{4} - \frac{2}{3}\cos\theta + \frac{1}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{4}\cos^4\theta + \frac{2}{3}\cos^4\theta - \frac{1}{2}\cos^4\theta\right]$$

$$Vh = \frac{R^4\pi}{12}\left[3 - 8\cos\theta + 6\cos^2\theta - \cos^4\theta\right]$$

PERFECTION

$$\Rightarrow U_g = \rho g V h = \frac{\rho g R^4 \pi}{12}\left[3 - 8\cos\theta + 6\cos^2\theta - \cos^4\theta\right]$$

PAGE

DATE

$$\frac{d}{d\theta}(KR^2\sin^2\theta) = \frac{d}{d\theta}\left[\frac{\rho g R^2}{12}[3-8\cos\theta+6\cos^2\theta-\cos^4\theta] + T(3-2\cos\theta+\cos^2\theta)\right]$$

$$KR^2\sin^2\theta = \frac{\rho g R^4}{12}(3-8\cos\theta+6\cos^2\theta-\cos^4\theta) + TR^2(3-2\cos\theta+\cos^2\theta)$$

$$K\sin^2\theta = \frac{\rho g R^2}{12}(3-8\cos\theta+6\cos^2\theta-\cos^4\theta) + T(3-2\cos\theta+\cos^2\theta)$$

$$\frac{d}{d\theta}(K\sin^2\theta) = K\sin 2\theta = \frac{d}{d\theta}\left[\frac{\rho g R^2}{12}(3-8\cos\theta+6\cos^2\theta-\cos^4\theta) + T(3-2\cos\theta+\cos^2\theta)\right]$$

$$K\sin 2\theta = \frac{\rho g R^2}{12}\times\frac{d}{d\theta}(3-8\cos\theta+6\cos^2\theta-\cos^4\theta) + (3-8\cos\theta+6\cos^2\theta-\cos^4\theta)\times\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\rho g R^2}{12}\right) + T\frac{d}{d\theta}(3-2\cos\theta+\cos^2\theta)$$

$$\Rightarrow K = \frac{\rho g R^2}{12\sin 2\theta}\times[8\sin\theta-12\sin\theta\cos\theta+4\cos^3\theta\sin\theta] + \frac{\rho g}{12\sin 2\theta}\times(3-8\cos\theta+6\cos^2\theta-\cos^4\theta)\times 2R\frac{dR}{d\theta} + T\times\left(\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta}\right) \quad — ①$$

由 $V=\frac{\pi}{3}R^3(\cos^3\theta-3\cos\theta+2)$

得 $\frac{dV}{d\theta}=0 \Rightarrow \frac{d}{d\theta}[R^3(\cos^3\theta-3\cos\theta+2)]=0$

$$R^3\frac{d}{d\theta}(\cos^3\theta-3\cos\theta+2)+3R^2(\cos^3\theta-3\cos\theta+2)\frac{dR}{d\theta}=0$$

$$\Rightarrow R(3\sin\theta\cos^2\theta-3\sin\theta) = 3(\cos^3\theta-3\cos\theta+2)\frac{dR}{d\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{dR}{d\theta} = \frac{R\sin^3\theta}{-(\cos^3\theta-3\cos\theta+2)} \quad — ②$$

PERFECTION

将②式代入①

$$K = T\left(\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta}\right) + \frac{\rho g R^2}{12\sin 2\theta}\left[8\sin\theta - 12\sin\theta\cos\theta + 4\cos^3\theta\sin\theta\right]$$

$$+\frac{\rho g}{12\sin 2\theta}\times\left[3-8\cos\theta+6\cos^2\theta-\cos^4\theta\right]\times 2R^2\times\frac{\sin^3\theta}{-(\cos^3\theta-3\cos\theta+2)}$$

$$K = T\times\left(\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta}\right) + \frac{\rho g R^2}{6}\left(\frac{2}{\cos\theta}-3+\cos^2\theta\right)$$

$$-\frac{\rho g\sin^3\theta}{6\sin 2\theta}\times R^2\times\frac{\left[3-8\cos\theta+6\cos^2\theta-\cos^4\theta\right]}{(\cos^3\theta-3\cos\theta+2)}$$

由 $R\sin\theta = r$

得

$$K = T\left(\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta}\right) + \frac{\rho g r^2}{6\cos\theta\sin^2\theta}\left(2-3\cos\theta+\cos^3\theta\right] - \frac{\rho g r^2}{12\cos\theta}\times\frac{\left[3-8\cos\theta+6\cos^2\theta-\cos^4\theta\right]}{(\cos^3\theta-3\cos\theta+2)}$$

PERFECTION