第九屆旺宏科學獎

成果報告書

參賽編號：SA9-526

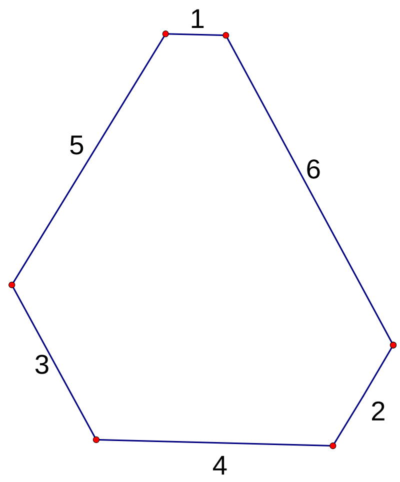
作品名稱：等角序列多邊形

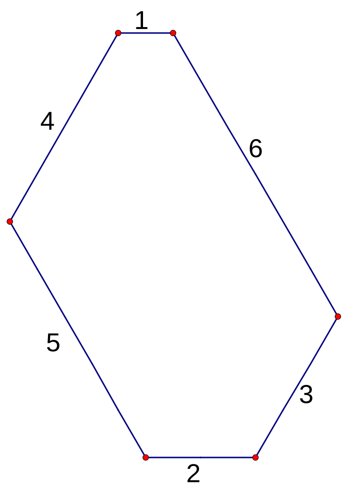
姓名：張伯豐

關鍵字：等角序列 n 邊形

壹、 研究動機

在高中課程中，我們接觸了許多正n邊形，如正三角形、正四邊形、正五邊形、正六邊形等，在三角形中等角必定等邊、等角四邊形則不一定等邊。那麼，五邊形呢？六邊形呢？等角是否也不一定等邊？透過*GSP*幾何軟體的操作我們發現存在等角不等邊的六邊形，且邊長恰為1、2、3、4、5、6，如下圖：





這引起了我們強烈的興趣，想探討是否所有n邊形都存在等角不等邊的等角序列多邊形。

貳、 研究目的

一、探討是否存在邊長為1、2、……、n的等角序列n邊形。

二、探討等角序列n邊形存在與否及n的結構之相關性。

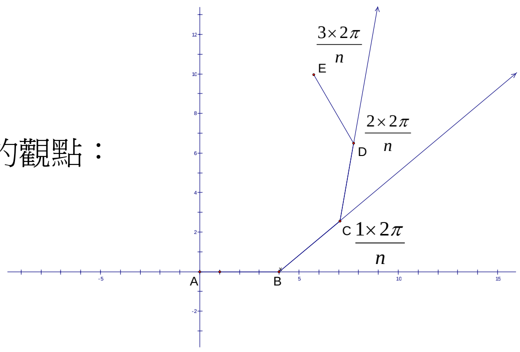
三、探討是否存在邊長為1^2、2^2、……、n^2的等角序列n邊形及與n的結構之相關性。

四、探討是否存在邊長為1^t，2^t，……，n^t $(t \geq 3)$的等角序列n邊形及與n的結構之相關性。

參、 研究過程及方法

一、等角序列n邊形：利用三角函數的觀點

（一）用向量分量（x分量，y分量）的觀點：



1.想法：封閉圖形向量和為0

2.作法：

n邊形之每一個外角為$\frac{2\pi}{n}$

x分量和$=0$，$a_1+a_2\cos\frac{2\pi}{n}+a_3\cos\frac{2\times 2\pi}{n}+\cdots+a_n\cos\frac{(n-1)\times 2\pi}{n}=0\cdots(1)$

y分量和$=0$，$a_2\sin\frac{2\pi}{n}+a_3\sin\frac{2\times 2\pi}{n}+\cdots+a_n\sin\frac{(n-1)\times 2\pi}{n}=0\cdots(2)$

由$(1)\times\sin\frac{2\pi}{n}+(2)\times\cos\frac{2\pi}{n}$

可得 $\boxed{a_1\sin\frac{2\pi}{n}+a_2\sin\frac{2\times 2\pi}{n}+\cdots+a_{n-1}\sin\frac{(n-1)\times 2\pi}{n}+a_n\sin\frac{n\times 2\pi}{n}=0}$

（二）等角序列n邊形

1.$\boxed{n=5}$：

$$a_1\sin\frac{2\pi}{5}+a_2\sin\frac{2\times 2\pi}{5}+\cdots+a_5\sin\frac{5\times 2\pi}{5}=0$$

$$(a_1-a_4)\sin\frac{2\pi}{5}+(a_2-a_3)\sin\frac{4\pi}{5}=0$$

$$(a_1-a_4)\sin\frac{2\pi}{5}+2(a_2-a_3)\sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}=0$$

$$\sin\frac{2\pi}{5}\left[(a_1-a_4)+2(a_2-a_3)\cos\frac{2\pi}{5}=0\right]$$

$a_1=a_4$，$a_2=a_3$

$\therefore$不存在等角序列五邊形

2.$\boxed{n=6}$

$$a_1\sin\frac{2\pi}{6}+a_2\sin\frac{2\times 2\pi}{6}+\cdots+a_5\sin\frac{5\times 2\pi}{6}+a_6\sin\frac{6\times 2\pi}{6}=0$$

$$\Rightarrow (a_1+a_2-a_4-a_5)\sin\frac{2\pi}{6}=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a_1+a_2=a_4+a_5\Rightarrow a_1-a_4=a_5-a_2\\ a_2+a_3=a_5+a_6\Rightarrow a_2-a_5=a_6-a_3\\ a_3+a_4=a_6+a_1\Rightarrow a_3-a_6=a_1-a_4\end{cases}$$

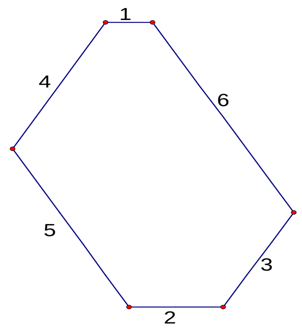
故此六邊形具備對邊等差結構

設 $a_1-a_4=d$ 、 $a_2-a_5=-d$ 、 $a_3-a_6=d$

$$\begin{cases} a_1=A \\ a_2=B \\ a_3=C \\ a_4=A-d \\ a_5=B+d \\ a_6=C-d \end{cases}$$

將1，2，3，4，5，6分成 $(1,2)(3,4)(5,6)$ 或 $(1,4)(2,5)(3,6)$

固定其中一個，另二個排列去除反向



公差 d	1	3
個數	$\frac{2!}{2}$	$\frac{2!}{2}$

3. $\boxed{n=8}$

$$a_1\sin\frac{2\pi}{8}+a_2\sin\frac{2\times2\pi}{8}+a_3\sin\frac{3\times2\pi}{8}+\cdots+a_7\sin\frac{7\times2\pi}{8}+a_8\sin\frac{8\times2\pi}{8}=0$$

$$\sin\frac{2\pi}{8}(a_1+a_3-a_5-a_7)+1\times(a_2-a_6)=0$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(a_1+a_3-a_5-a_7)+1\times(a_2-a_6)=0$$

$a_1+a_3=a_5+a_7$ ， $a_2=a_6$

$\therefore$ 不存在等角序列八邊形

4. $\boxed{n=10}$

$$a_1\sin\frac{2\pi}{10}+a_2\sin\frac{2\times2\pi}{10}+\cdots+a_9\sin\frac{9\times2\pi}{10}+a_{10}\sin\frac{10\times2\pi}{10}=0$$

$$\sin\frac{2\pi}{10}(a_1+a_4-a_6-a_9)+\sin\frac{2\times2\pi}{10}(a_2+a_3-a_7-a_8)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases} a_1+a_4-a_6-a_9=0 \\ a_2+a_3-a_7-a_8=0 \end{cases}$$

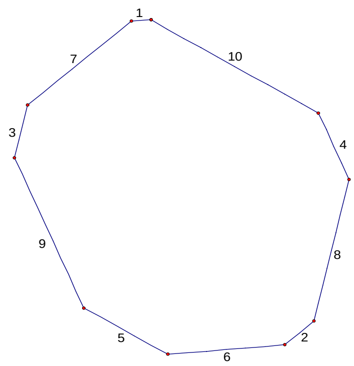
$$\Rightarrow\begin{cases} a_1+a_4=a_6+a_9=0 \\ a_2+a_3=a_7+a_8=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} a_1+a_4=a_6+a_9 \\ a_2+a_5=a_7+a_{10} \\ a_3+a_6=a_8+a_1 \\ a_4+a_7=a_9+a_2 \\ a_5+a_8=a_{10}+a_3 \\ a_2+a_3=a_7+a_8 \\ a_3+a_4=a_8+a_9 \\ a_4+a_5=a_9+a_{10} \\ a_5+a_6=a_{10}+a_1 \\ a_6+a_7=a_1+a_2 \end{cases} \Rightarrow\begin{cases} a_1-a_6=a_9-a_4 \\ a_2-a_7=a_{10}-a_5 \\ a_3-a_8=a_1-a_6 \\ a_4-a_9=a_2-a_7 \\ a_5-a_{10}=a_3-a_8 \\ a_2-a_7=a_8-a_3 \\ a_3-a_8=a_9-a_4 \\ a_4-a_9=a_{10}-a_5 \\ a_5-a_{10}=a_1-a_6 \\ a_6-a_1=a_2-a_7 \end{cases}$$

故此十邊形具備對邊等差結構

設 $a_1-a_6=-(a_2-a_7)=a_3-a_8=-(a_4-a_9)=a_5-a_{10}=d$

$$\begin{cases} a_1=A \\ a_2=B \\ a_3=C \\ a_4=D \\ a_5=E \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1=A \\ a_2=B \\ a_3=C \\ a_4=D \\ a_5=E \\ a_6=A-d \\ a_7=B+d \\ a_8=C-d \\ a_9=D+d \\ a_{10}=E-d \end{cases}$$



將1，2，3，4，5，6，7，8，9，10分成

$(1,6)(2,7)(3,8)(4,9)(5,10)$ 或 $(1,2)(3,4)(5,6)(7,8)(9,10)$

固定其中一個，另四個排列去除反向

公差 d	1	5
個數	$\frac{4!}{2}$	$\frac{4!}{2}$

5. $\boxed{n=12}$

$$a_1\sin\frac{2\pi}{12}+a_2\sin\frac{2\times2\pi}{12}+a_3\sin\frac{3\times2\pi}{12}+\cdots+a_{11}\sin\frac{11\times2\pi}{12}+a_{12}\sin\frac{12\times2\pi}{12}=0$$

$$\sin\frac{\pi}{6}(a_1+a_5-a_7-a_{11})+\sin\frac{2\pi}{6}(a_2+a_4-a_8-a_{10})+(a_3-a_9)=0$$

$$\begin{cases} (a_2+a_4-a_8-a_{10})=0\cdots(1) \\ \frac{1}{2}(a_1+a_5-a_7-a_{11})=(a_9-a_3)\cdots(3) \end{cases}$$

由(1)可得 $\begin{cases} a_2+a_4-a_8-a_{10}=0 \\ a_3+a_5-a_9-a_{11}=0\cdots(2) \\ a_4+a_6-a_{10}-a_{12}=0 \\ a_5+a_7-a_{11}-a_1=0\cdots(5) \\ a_6+a_8-a_{12}-a_2=0 \\ a_7+a_9-a_1-a_3=0 \end{cases}$

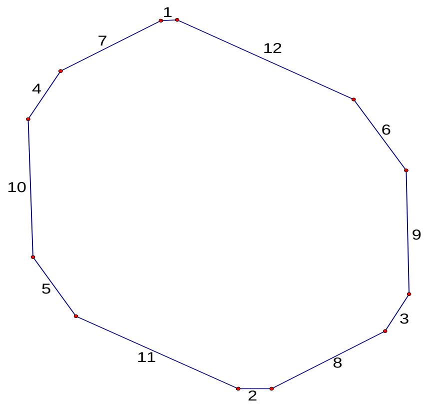
由(2)可得 $a_9-a_3=a_5-a_{11}$ 代入(3)

$a_1+a_5-a_7-a_{11}=2(a_5-a_{11})$

$\therefore\ a_1+a_{11}-a_5-a_7=0\cdots(4)$

由(4)=(5) 故此十二邊形具備對邊等差結構

設 $\begin{cases} a_1-a_7=d_1 \\ a_2-a_8=d_2 \\ a_3-a_9=-d_1 \\ a_4-a_{10}=-d_2 \\ a_5-a_{11}=d_1 \\ a_6-a_{12}=d_2 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} a_1=A \\ a_2=B \\ a_3=C \\ a_4=D \\ a_5=E \\ a_6=F \\ a_7=A-d_1 \\ a_8=B-d_2 \\ a_9=C+d_1 \\ a_{10}=D+d_2 \\ a_{11}=E-d_1 \\ a_{12}=F-d_2 \end{cases}$



將1，2，3，4，5，6，7，8，9，10，11，12 分成

$(1,2)(3,4)(5,6)(7,8)(9,10)(11,12)$

固定其中一個，另五個排列去除反向

6. $\boxed{n=16}$

$$a_1\sin\frac{2\pi}{16}+a_2\sin\frac{2\times 2\pi}{16}+\cdots+a_{15}\sin\frac{15\times 2\pi}{16}+a_{16}\sin\frac{16\times 2\pi}{16}=0$$

$$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}(a_1+a_7-a_9-a_{15})+\frac{\sqrt{2}}{2}(a_2+a_6-a_{10}-a_{16})+$$
$$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}(a_3+a_5-a_{11}-a_{13})+(a_4-a_{12})=0\Rightarrow a_4=a_{12}$$

$\therefore$ 不存在等角序列十六邊形

9. 證明 $n=4k+2$ 時必存在等角序列 n 邊形

證明：

$$a_1\sin\frac{2\pi}{4k+2}+a_2\sin\frac{2\times2\pi}{4k+2}+\cdots+a_{4k+1}\sin\frac{(4k+1)\times2\pi}{4k+2}+$$

$$a_{4k+2}\sin\frac{(4k+2)\times2\pi}{4k+2}=0$$

設 $\theta=\dfrac{2\pi}{4k+2}$

$$\Rightarrow\sin\theta(a_1+a_{2k}-a_{2k+2}-a_{4k+1})+\sin2\theta(a_2+a_{2k-1}-a_{4k+3}-a_{4k})+\cdots$$

$$+\sin k\theta(a_k+a_{k+1}-a_{3k+1}-a_{3k+2})=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a_1+a_{2k}=a_{2k+2}+a_{4k+1}\\a_2+a_{2k-1}=a_{2k+3}+a_{4k}\\\qquad\vdots\end{cases}\quad\Rightarrow\begin{cases}a_1-a_{2k+2}=a_{4k+1}-a_{2k}\\a_2-a_{2k+3}=a_{4k}-a_{2k-1}\\\qquad\vdots\end{cases}$$

設 $a_1-a_{2k+2}=d$

$$a_1-a_{2k+2}=-(a_2-a_{2k+3})=a_3-a_{2k+4}=\cdots=-(a_{2k}-a_{4k+1})=a_{2k+1}-a_{4k+2}=d$$

$$得\begin{cases}a_1=x_1\\a_2=x_2\\\vdots\\a_{2k}=x_{2k}\\a_{2k+1}=x_{2k+1}\\a_{2k+2}=x_1-d\\\vdots\\a_{4k+1}=x_{2k}+d\\a_{4k+2}=x_{2k+1}-d\end{cases}$$

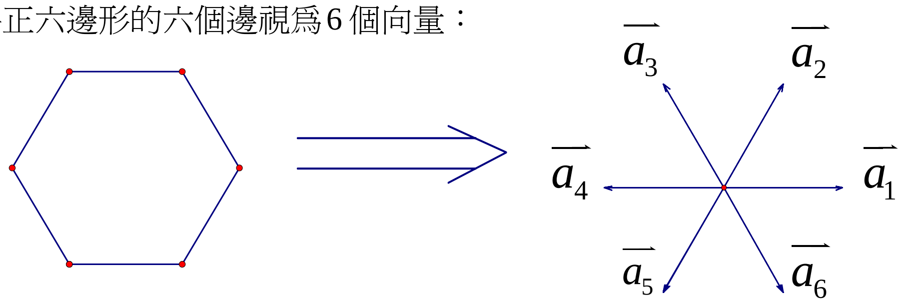
$\therefore$ 存在等角序列 n 邊形，其中 $n=4k+2$

到此我們發現由於三角函數值除非是特殊角，否則很難做下去，因此我們我們轉換成另一種想法。

二、等角序列六邊形，$n=6$

（一）想法：利用**向量觀點**

將正六邊形的六個邊視爲 6 個向量：



$\therefore \vec{a}_1+\vec{a}_2+\vec{a}_3+\vec{a}_4+\vec{a}_5+\vec{a}_6=\vec{0}$

又 $\begin{cases}\vec{a}_1+\vec{a}_4=\vec{0}\\ \vec{a}_2+\vec{a}_5=\vec{0}\\ \vec{a}_3+\vec{a}_6=\vec{0}\end{cases}$，且 $\begin{cases}\vec{a}_1+\vec{a}_3+\vec{a}_5=\vec{0}\\ \vec{a}_2+\vec{a}_4+\vec{a}_6=\vec{0}\end{cases}$

$\therefore \begin{cases}A_1(\vec{a}_1+\vec{a}_4)=\vec{0}\\ A_2(\vec{a}_2+\vec{a}_5)=\vec{0}\\ A_3(\vec{a}_3+\vec{a}_6)=\vec{0}\end{cases}$，且 $\begin{cases}B_1(\vec{a}_1+\vec{a}_3+\vec{a}_5)=\vec{0}\\ B_2(\vec{a}_2+\vec{a}_4+\vec{a}_6)=\vec{0}\end{cases}$

1.令 $A_1=1$，$A_2=2$，$A_3=3$。$B_1=0$，$B_2=3$

	$\vec{a}_1$	$\vec{a}_2$	$\vec{a}_3$	$\vec{a}_4$	$\vec{a}_5$	$\vec{a}_6$
A	1	2	3	1	2	3
B	0	3	0	3	0	3
邊長	1	5	3	4	2	6

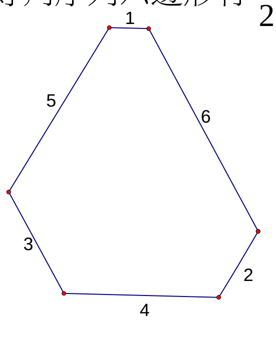
可得 $1\vec{a}_1+5\vec{a}_2+3\vec{a}_3+4\vec{a}_4+2\vec{a}_5+6\vec{a}_6=\vec{0}$

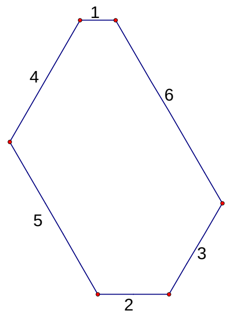
2.令 $A_1=0$，$A_2=2$，$A_3=4$。$B_1=1$，$B_2=2$

	$\vec{a}_1$	$\vec{a}_2$	$\vec{a}_3$	$\vec{a}_4$	$\vec{a}_5$	$\vec{a}_6$
A	0	2	4	0	2	4
B	1	2	1	2	1	2
邊長	1	4	5	2	3	6

可得 $1\vec{a}_1+4\vec{a}_2+5\vec{a}_3+2\vec{a}_4+3\vec{a}_5+6\vec{a}_6=\vec{0}$

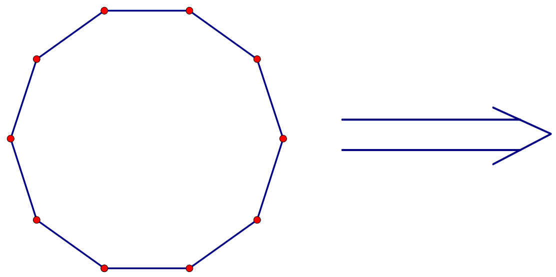
故等角序列六邊形有 $\frac{2!}{2}\times 2=2$ (個)，如下：

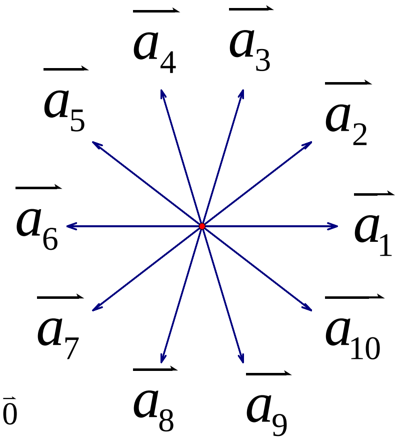




三、等角序列十邊形

（一）想法：將正十邊形的十個邊視為10個向量：





$\therefore \overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2}+\overrightarrow{a_3}+\overrightarrow{a_4}+\overrightarrow{a_5}+\overrightarrow{a_6}+\overrightarrow{a_7}+\overrightarrow{a_8}+\overrightarrow{a_9}+\overrightarrow{a_{10}}=\vec{0}$

又 $\begin{cases}\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_6}=\vec{0}\\ \overrightarrow{a_2}+\overrightarrow{a_7}=\vec{0}\\ \overrightarrow{a_3}+\overrightarrow{a_8}=\vec{0}\\ \overrightarrow{a_4}+\overrightarrow{a_9}=\vec{0}\\ \overrightarrow{a_5}+\overrightarrow{a_{10}}=\vec{0}\end{cases}$ ，且 $\begin{cases}\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_3}+\overrightarrow{a_5}+\overrightarrow{a_7}+\overrightarrow{a_9}=\vec{0}\\ \overrightarrow{a_2}+\overrightarrow{a_4}+\overrightarrow{a_6}+\overrightarrow{a_8}+\overrightarrow{a_{10}}=\vec{0}\end{cases}$

$\therefore \begin{cases}A_1(\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_6})=\vec{0}\\ A_2(\overrightarrow{a_2}+\overrightarrow{a_7})=\vec{0}\\ A_3(\overrightarrow{a_3}+\overrightarrow{a_8})=\vec{0}\\ A_4(\overrightarrow{a_4}+\overrightarrow{a_9})=\vec{0}\\ A_5(\overrightarrow{a_5}+\overrightarrow{a_{10}})=\vec{0}\end{cases}$ ，且 $\begin{cases}B_1(\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_3}+\overrightarrow{a_5}+\overrightarrow{a_7}+\overrightarrow{a_9})=\vec{0}\\ B_2(\overrightarrow{a_2}+\overrightarrow{a_4}+\overrightarrow{a_6}+\overrightarrow{a_8}+\overrightarrow{a_{10}})=\vec{0}\end{cases}$

1.令 $A_1=1$ ， $A_2=2$ ， $A_3=3$ ， $A_4=4$ ， $A_5=5$ 。 $B_1=0$ ， $B_2=5$

	$\overrightarrow{a_1}$	$\overrightarrow{a_2}$	$\overrightarrow{a_3}$	$\overrightarrow{a_4}$	$\overrightarrow{a_5}$	$\overrightarrow{a_6}$	$\overrightarrow{a_7}$	$\overrightarrow{a_8}$	$\overrightarrow{a_9}$	$\overrightarrow{a_{10}}$
A	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
B	0	5	0	5	0	5	0	5	0	5
邊長	1	7	3	9	5	6	2	8	4	10

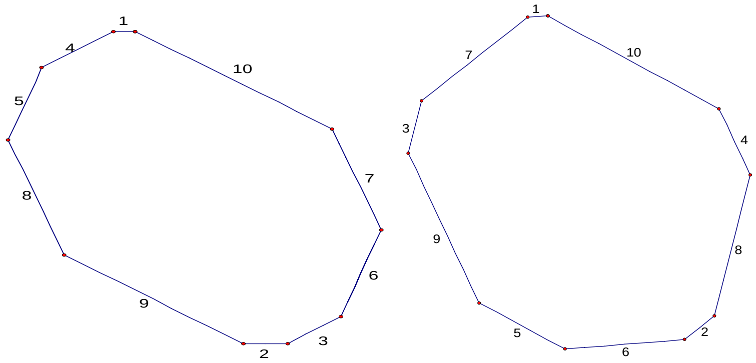
可得 $1\overrightarrow{a_1}+7\overrightarrow{a_2}+3\overrightarrow{a_3}+9\overrightarrow{a_4}+5\overrightarrow{a_5}+6\overrightarrow{a_6}+2\overrightarrow{a_7}+8\overrightarrow{a_8}+4\overrightarrow{a_9}+10\overrightarrow{a_{10}}=\vec{0}$

2. 令 $A_1=0$ ， $A_2=2$ ， $A_3=4$ ， $A_4=6$ ， $A_5=8$ 。 $B_1=1$ ， $B_2=2$

	$\overrightarrow{a_1}$	$\overrightarrow{a_2}$	$\overrightarrow{a_3}$	$\overrightarrow{a_4}$	$\overrightarrow{a_5}$	$\overrightarrow{a_6}$	$\overrightarrow{a_7}$	$\overrightarrow{a_8}$	$\overrightarrow{a_9}$	$\overrightarrow{a_{10}}$
A	0	2	4	6	8	0	2	4	6	8
B	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
邊長	1	4	5	8	9	2	3	6	7	10

可得 $1\overrightarrow{a_1}+4\overrightarrow{a_2}+5\overrightarrow{a_3}+8\overrightarrow{a_4}+9\overrightarrow{a_5}+2\overrightarrow{a_6}+3\overrightarrow{a_7}+6\overrightarrow{a_8}+7\overrightarrow{a_9}+10\overrightarrow{a_{10}}=\vec{0}$

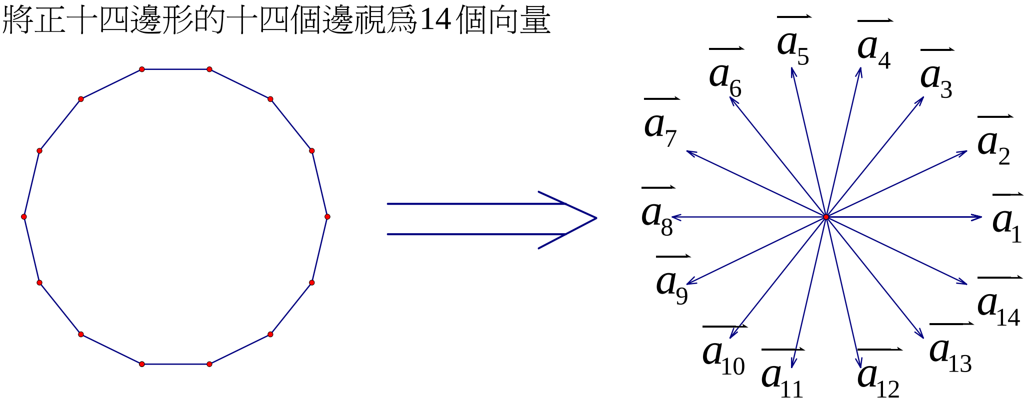
故等角序列十邊形有$\frac{4!}{2}\times 2=24$(個)，如下：



四、等角序列十四邊形

（一）想法：

將正十四邊形的十四個邊視爲14個向量



$$\therefore\ \overline{a_1}+\overline{a_2}+\overline{a_3}+\overline{a_4}+\overline{a_5}+\overline{a_6}+\overline{a_7}+\overline{a_8}+\overline{a_9}+\overline{a_{10}}+\overline{a_{11}}+\overline{a_{12}}+\overline{a_{13}}+\overline{a_{14}}=\vec{0}$$

$$\text{又}\begin{cases}\overline{a_1}+\overline{a_8}=\vec{0}\\ \overline{a_2}+\overline{a_9}=\vec{0}\\ \overline{a_3}+\overline{a_{10}}=\vec{0}\\ \overline{a_4}+\overline{a_{11}}=\vec{0}\\ \overline{a_5}+\overline{a_{12}}=\vec{0}\\ \overline{a_6}+\overline{a_{13}}=\vec{0}\\ \overline{a_7}+\overline{a_{14}}=\vec{0}\end{cases}\text{，且}\begin{cases}\overline{a_1}+\overline{a_3}+\overline{a_5}+\overline{a_7}+\overline{a_9}+\overline{a_{11}}+\overline{a_{13}}=\vec{0}\\ \overline{a_2}+\overline{a_4}+\overline{a_6}+\overline{a_8}+\overline{a_{10}}+\overline{a_{12}}+\overline{a_{14}}=\vec{0}\end{cases}$$

$$\therefore\begin{cases}A_1(\overline{a_1}+\overline{a_8})=\vec{0}\\ A_2(\overline{a_2}+\overline{a_9})=\vec{0}\\ A_3(\overline{a_3}+\overline{a_{10}})=\vec{0}\\ A_4(\overline{a_4}+\overline{a_{11}})=\vec{0}\\ A_5(\overline{a_5}+\overline{a_{12}})=\vec{0}\\ A_6(\overline{a_6}+\overline{a_{13}})=\vec{0}\\ A_7(\overline{a_7}+\overline{a_{14}})=\vec{0}\end{cases}\text{，且}\begin{cases}B_1(\overline{a_1}+\overline{a_3}+\overline{a_5}+\overline{a_7}+\overline{a_9}+\overline{a_{11}}+\overline{a_{13}})=\vec{0}\\ B_2(\overline{a_2}+\overline{a_4}+\overline{a_6}+\overline{a_8}+\overline{a_{10}}+\overline{a_{12}}+\overline{a_{14}})=\vec{0}\end{cases}$$

1.令 $A_1=1$，$A_2=2$，$A_3=3$，$A_4=4$，$A_5=5$，$A_6=6$，$A_7=7$

$B_1=0$，$B_2=7$

	$\overline{a_1}$	$\overline{a_2}$	$\overline{a_3}$	$\overline{a_4}$	$\overline{a_5}$	$\overline{a_6}$	$\overline{a_7}$	$\overline{a_8}$	$\overline{a_9}$	$\overline{a_{10}}$	$\overline{a_{11}}$	$\overline{a_{12}}$	$\overline{a_{13}}$	$\overline{a_{14}}$
A	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7
B	0	7	0	7	0	7	0	7	0	7	0	7	0	7
邊長	1	9	3	11	5	13	7	8	2	10	4	12	6	14

可得

$$1\overline{a_1}+9\overline{a_2}+3\overline{a_3}+11\overline{a_4}+5\overline{a_5}+13\overline{a_6}+7\overline{a_7}+8\overline{a_8}+2\overline{a_9}+10\overline{a_{10}}+4\overline{a_{11}}+12\overline{a_{12}}+6\overline{a_{13}}+14\overline{a_{14}}=\vec{0}$$

2.令 $A_1=0$，$A_2=2$，$A_3=4$，$A_4=6$，$A_5=8$，$A_6=10$，$A_7=12$

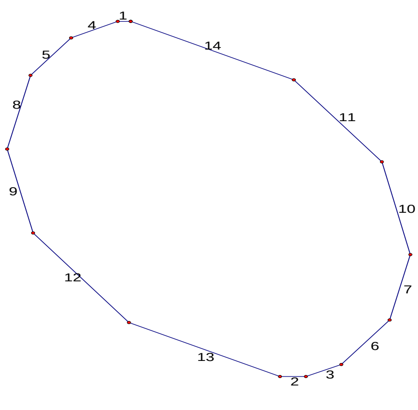
$B_1=1$，$B_2=2$

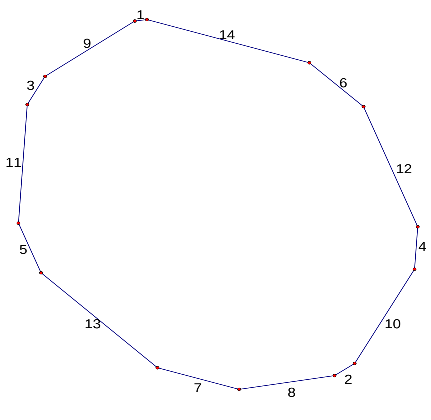
	$\overline{a_1}$	$\overline{a_2}$	$\overline{a_3}$	$\overline{a_4}$	$\overline{a_5}$	$\overline{a_6}$	$\overline{a_7}$	$\overline{a_8}$	$\overline{a_9}$	$\overline{a_{10}}$	$\overline{a_{11}}$	$\overline{a_{12}}$	$\overline{a_{13}}$	$\overline{a_{14}}$
A	0	2	4	6	8	10	12	0	2	4	6	8	10	12
B	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
邊長	1	4	5	8	9	12	13	2	3	6	7	10	11	14

可得

$$1\overline{a_1}+4\overline{a_2}+5\overline{a_3}+8\overline{a_4}+9\overline{a_5}+12\overline{a_6}+13\overline{a_7}+2\overline{a_8}+3\overline{a_9}+6\overline{a_{10}}+7\overline{a_{11}}+10\overline{a_{12}}+11\overline{a_{13}}+14\overline{a_{14}}=\vec{0}$$

故等角序列十邊形有 $\frac{6!}{2}\times 2=720$ (個)，如下：





五、證明存在等角序列 $2p$ 邊形，其中 p 爲奇質數

將正 $2p$ 邊形的 $2p$ 個邊視爲 $2p$ 個向量

$\therefore \overline{a_1}+\overline{a_2}+\overline{a_3}+\cdots\cdots\overline{a_{2p-1}}+\overline{a_{2p}}=\vec{0}$

又 $\begin{cases}\overline{a_1}+\overline{a_{p+1}}=\vec{0}\\ \overline{a_2}+\overline{a_{p+2}}=\vec{0}\\ \overline{a_3}+\overline{a_{p+3}}=\vec{0}\\ \quad\vdots\\ \quad\vdots\\ \overline{a_p}+\overline{a_{2p}}=\vec{0}\end{cases}$ ，且 $\begin{cases}\overline{a_1}+\overline{a_3}+\overline{a_5}+\cdots\cdots+\overline{a_{2p-3}}+\overline{a_{2p-1}}=\vec{0}\\ \overline{a_2}+\overline{a_4}+\overline{a_6}+\cdots\cdots+\overline{a_{2p-2}}+\overline{a_{2p}}=\vec{0}\end{cases}$

$\therefore \begin{cases}A_1(\overline{a_1}+\overline{a_{p+1}})=\vec{0}\\ A_2(\overline{a_2}+\overline{a_{p+2}})=\vec{0}\\ A_3(\overline{a_3}+\overline{a_{p+3}})=\vec{0}\\ \quad\vdots\\ \quad\vdots\\ A_p(\overline{a_p}+\overline{a_{2p}})=\vec{0}\end{cases}$ ，且 $\begin{cases}B_1(\overline{a_1}+\overline{a_3}+\overline{a_5}+\cdots\cdots+\overline{a_{2p-3}}+\overline{a_{2p-1}})=\vec{0}\\ B_2(\overline{a_2}+\overline{a_4}+\overline{a_6}+\cdots\cdots+\overline{a_{2p-2}}+\overline{a_{2p}})=\vec{0}\end{cases}$

（1）第一種型式：令 $A_1=1$ ， $A_2=2$ ， $A_3=3\cdots\cdots A_p=p$ ， $B_1=0$ ， $B_2=p$

	$\overline{a_1}$	$\overline{a_2}$	$\overline{a_3}$		$\overline{a_p}$	$\overline{a_{p+1}}$		$\overline{a_{2p}}$
A	1	2	3	….	p	1	….	p
B	0	p	0		0	p		p

如此可以生成 $1,2,\cdots\cdots 2p$

（2）第二種型式：令 $A_1=0$ ， $A_2=2$ ， $A_3=4\cdots\cdots A_p=2p-2$ ， $B_1=1$ ， $B_2=2$

	$\overline{a_1}$	$\overline{a_2}$	$\overline{a_3}$		$\overline{a_p}$	$\overline{a_{p+1}}$		$\overline{a_{2p}}$
A	0	2	4	….	$2p-2$	0	….	$2p-2$
B	1	2	1		1	2		2

如此可以生成 $1,2,\cdots\cdots 2p$

故存在等角序列 $2p$ 邊形，其中 p 爲奇質數，且個數爲 $\frac{(p-1)!}{2}\times 2=(p-1)!$

六、證明等角序列 p^m 邊形不存在， p 爲質數，$m\in N$

將正 p^m 邊形的 p^m 個邊視爲 p^m 個向量

$\therefore \overline{a_1}+\overline{a_2}+\overline{a_3}+\cdots\cdots+\overline{a_{p^m}}=\vec{0}$

$$
又\begin{cases}
\overline{a_1}+\overline{a_{p^{m-1}+1}}+\overline{a_{2\times p^{m-1}+1}}+\cdots\cdots+\overline{a_{(p-1)\times p^{m-1}+1}}=\vec{0}\\
\overline{a_2}+\overline{a_{p^{m-1}+2}}+\overline{a_{2\times p^{m-1}+2}}+\cdots\cdots+\overline{a_{(p-1)\times p^{m-1}+2}}=\vec{0}\\
\overline{a_3}+\overline{a_{p^{m-1}+3}}+\overline{a_{2\times p^{m-1}+3}}+\cdots\cdots+\overline{a_{(p-1)\times p^{m-1}+3}}=\vec{0}\\
\vdots\\
\vdots\\
\overline{a_{p^{m-1}}}+\overline{a_{2\times p^{m-1}}}+\overline{a_{3\times p^{m-1}}}+\cdots\cdots+\overline{a_{p\times p^{m-1}}}=\vec{0}
\end{cases},
$$

$$
且\begin{cases}
\overline{a_1}+\overline{a_{p^{m-2}+1}}+\overline{a_{2\times p^{m-2}+1}}+\cdots\cdots+\overline{a_{(p^2-1)\times p^{m-2}+1}}=\vec{0}\\
\overline{a_2}+\overline{a_{p^{m-2}+2}}+\overline{a_{2\times p^{m-2}+2}}+\cdots\cdots+\overline{a_{(p^2-1)\times p^{m-2}+2}}=\vec{0}\\
\overline{a_3}+\overline{a_{p^{m-2}+3}}+\overline{a_{2\times p^{m-2}+3}}+\cdots\cdots+\overline{a_{(p^2-1)\times p^{m-2}+3}}=\vec{0}\\
\vdots\\
\vdots\\
\overline{a_{p^{m-2}}}+\overline{a_{2\times p^{m-2}}}+\overline{a_{3\times p^{m-2}}}+\cdots\cdots+\overline{a_{p^2\times p^{m-2}}}=\vec{0}
\end{cases},
$$

$$
且\cdots\cdots\begin{cases}
\overline{a_1}+\overline{a_{p+1}}+\overline{a_{2\times p+1}}+\cdots\cdots+\overline{a_{(p^{m-1}-1)\times p+1}}=\vec{0}\\
\overline{a_2}+\overline{a_{p+2}}+\overline{a_{2\times p+2}}+\cdots\cdots+\overline{a_{(p^{m-1}-1)\times p+2}}=\vec{0}\\
\overline{a_3}+\overline{a_{p+3}}+\overline{a_{2\times p+3}}+\cdots\cdots+\overline{a_{(p^{m-1}-1)\times p+3}}=\vec{0}\\
\vdots\\
\vdots\\
\overline{a_p}+\overline{a_{2\times p}}+\overline{a_{3\times p}}+\cdots\cdots+\overline{a_{p^{m-1}\times p}}=\vec{0}
\end{cases}。
$$

$$
\therefore\begin{cases}
A_{11}(\overline{a_1}+\overline{a_{p^{m-1}+1}}+\overline{a_{2\times p^{m-1}+1}}+\cdots\cdots+\overline{a_{(p-1)\times p^{m-1}+1}})=\vec{0}\\
A_{12}(\overline{a_2}+\overline{a_{p^{m-1}+2}}+\overline{a_{2\times p^{m-1}+2}}+\cdots\cdots+\overline{a_{(p-1)\times p^{m-1}+2}})=\vec{0}\\
A_{13}(\overline{a_3}+\overline{a_{p^{m-1}+3}}+\overline{a_{2\times p^{m-1}+3}}+\cdots\cdots+\overline{a_{(p-1)\times p^{m-1}+3}})=\vec{0}\\
\vdots\\
\vdots\\
A_{1p^{m-1}}(\overline{a_{p^{m-1}}}+\overline{a_{2\times p^{m-1}}}+\overline{a_{3\times p^{m-1}}}+\cdots\cdots+\overline{a_{p\times p^{m-1}}})=\vec{0}
\end{cases},
$$

且 $\begin{cases} A_{21}(\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_{p^{m-2}+1}}+\overrightarrow{a_{2\times p^{m-2}+1}}+\cdots\cdots+\overrightarrow{a_{(p^2-1)\times p^{m-2}+1}})=\vec{0} \\ A_{22}(\overrightarrow{a_2}+\overrightarrow{a_{p^{m-2}+2}}+\overrightarrow{a_{2\times p^{m-2}+2}}+\cdots\cdots+\overrightarrow{a_{(p^2-1)\times p^{m-2}+2}})=\vec{0} \\ A_{23}(\overrightarrow{a_3}+\overrightarrow{a_{p^{m-2}+3}}+\overrightarrow{a_{2\times p^{m-2}+3}}+\cdots\cdots+\overrightarrow{a_{(p^2-1)\times p^{m-2}+3}})=\vec{0} \\ \vdots \\ \vdots \\ A_{2p^{m-2}}(\overrightarrow{a_{p^{m-2}}}+\overrightarrow{a_{2\times p^{m-2}}}+\overrightarrow{a_{3\times p^{m-2}}}+\cdots\cdots+\overrightarrow{a_{p^2\times p^{m-2}}})=\vec{0} \end{cases}$,

且……$\begin{cases} A_{(m-1)1}(\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_{p+1}}+\overrightarrow{a_{2\times p+1}}+\cdots\cdots+\overrightarrow{a_{(p^{m-1}-1)\times p+1}})=\vec{0} \\ A_{(m-1)2}(\overrightarrow{a_2}+\overrightarrow{a_{p+2}}+\overrightarrow{a_{2\times p+2}}+\cdots\cdots+\overrightarrow{a_{(p^{m-1}-1)\times p+2}})=\vec{0} \\ A_{(m-1)3}(\overrightarrow{a_3}+\overrightarrow{a_{p+3}}+\overrightarrow{a_{2\times p+3}}+\cdots\cdots+\overrightarrow{a_{(p^{m-1}-1)\times p+3}})=\vec{0} \\ \vdots \\ \vdots \\ A_{(m-1)p}(\overrightarrow{a_p}+\overrightarrow{a_{2\times p}}+\overrightarrow{a_{3\times p}}+\cdots\cdots+\overrightarrow{a_{p^{m-1}\times p}})=\vec{0} \end{cases}$ 。

又 $\overrightarrow{a_n}=A_{1n_{a_1}}+A_{2n_{a_2}}+\cdots\cdots A_{(m-1)n_{a_{(m-1)}}}$ ，其中 $\begin{cases} n\equiv n_{a_1}(\bmod p^{m-1})(n_{a_1}=1,2,3\ldots p^{m-1}) \\ n\equiv n_{a_2}(\bmod p^{m-2})(n_{a_2}=1,2,3\ldots p^{m-2}) \\ \vdots \\ \vdots \\ n\equiv n_{a_{m-1}}(\bmod p)(n_{a_{m-1}}=1,2,3\ldots p) \end{cases}$,

又 $\overrightarrow{a_{n+kp^{m-1}}}=A_{1n_{b_1}}+A_{2n_{b_2}}+\cdots\cdots A_{(m-1)n_{b_{(m-1)}}}$ ，$k\le\dfrac{p^m-n}{p^{m-1}}$ ，$k\in N$

其中 $\begin{cases} n+kp^{m-1}\equiv n_{b_1}(\bmod p^{m-1})(n_{b_1}=1.2.3\ldots p^{m-1}) \\ n+kp^{m-1}\equiv n_{b_2}(\bmod p^{m-2})(n_{b_2}=1.2.3\ldots p^{m-2}) \\ \vdots \\ \vdots \\ n+kp^{m-1}\equiv n_{b_{m-1}}(\bmod p)(n_{b_{m-1}}=1.2.3\ldots p) \end{cases}$

$\because n_{a_1}=n_{b_1}$ ，$n_{a_2}=n_{b_2}$ ，…… ，$n_{a_{m-1}}=n_{b_{m-1}}$ $\therefore \overrightarrow{a_n}=\overrightarrow{a_{n+kp^{m-1}}}$

故不存在等角序列 p^m 邊形

七、證明 $n=p\times q$ ，$(p,q)=1$，必存在等角序列 n 邊形

（一）證明

若一 n 邊形可分解為 $p\times q$ ，$(p,q)=1$，

令 $\overline{a_1},\overline{a_2},\cdots\cdots,\overline{a_{p\times q}}$ 為正 $p\times q$ 邊形，邊長向量 $\left|\overline{a_1}\right|=\left|\overline{a_2}\right|=\cdots\cdots=\left|\overline{a_{p\times q}}\right|$

$$\text{又}\begin{cases}\overline{a_1}+\overline{a_{p+1}}+\overline{a_{2\times p+1}}+\cdots\cdots+\overline{a_{(q-1)\times p+1}}=\vec{0}\\ \overline{a_2}+\overline{a_{p+2}}+\overline{a_{2\times p+2}}+\cdots\cdots+\overline{a_{(q-1)\times p+2}}=\vec{0}\\ \vdots\\ \vdots\\ \overline{a_{k\times p}}+\overline{a_{2\times p}}+\overline{a_{3\times p}}+\cdots\cdots+\overline{a_{q\times p}}=\vec{0}\end{cases}\quad\cdots\cdots(1)，$$

$$\text{且}\begin{cases}\overline{a_1}+\overline{a_{q+1}}+\overline{a_{2\times q+1}}+\cdots\cdots+\overline{a_{(p-1)\times q+1}}=\vec{0}\\ \overline{a_2}+\overline{a_{q+2}}+\overline{a_{2\times q+2}}+\cdots\cdots+\overline{a_{(p-1)\times q+2}}=\vec{0}\\ \vdots\\ \vdots\\ \overline{a_{k\times q}}+\overline{a_{2\times q+1}}+\overline{a_{3\times q+1}}+\cdots\cdots+\overline{a_{p\times q}}=\vec{0}\end{cases}\quad\cdots\cdots(2)$$

將 (1) 中每列分別乘以 $1,2,3,.....,p$

將 (2) 中每列分別乘以 $0\times p,p,2\times p.....,(q-1)\times p$

然後將所有式子相加得 $\alpha_1\overline{a_1}+\alpha_2\overline{a_2}+\alpha_3\overline{a_3}+\cdots\cdots+\alpha_n\overline{a_n}$

其中 $\alpha_i=r+(s-1)p\quad i\equiv r(\bmod p)\quad 1\le r\le p$

$i=1,2,\cdots\cdots,n\qquad \equiv s(\bmod q)\quad 1\le s\le q$

$r=1$ 時， $s=1,2,3,\cdots\cdots,q$ ， $r+(s-1)p$ 得值 $1,1+p,1+2p,\cdots\cdots1+(q-1)p$

$r=2$ 時， $s=1,2,3,\cdots\cdots,q$ ， $r+(s-1)p$ 得值 $2,2+p,2+2p,\cdots\cdots2+(q-1)p$

$\vdots\qquad\qquad\qquad\qquad\vdots$

$r=p$ 時， $s=1,2,3,\cdots\cdots,q$ ， $r+(s-1)p$ 得值 $p,2p,3p,\cdots\cdots pq$

如此可形成 $1,2,\cdots\cdots,n$ 的正整數，

即 n 邊形可分解成兩相異正整數相乘，則必存在等角序列 n 邊形。

（二）以等角序列十二邊形為例： $n=12=3\times4=p\times q$ ，$(p,q)=1$

想法：將正十二邊形的十二個邊視為 12 個向量

$$\overline{a_1}+\overline{a_2}+\overline{a_3}+\overline{a_4}+\overline{a_5}+\overline{a_6}+\overline{a_7}+\overline{a_8}+\overline{a_9}+\overline{a_{10}}+\overline{a_{11}}+\overline{a_{12}}=\vec{0}$$

$$\begin{cases}\overline{a_1}+\overline{a_5}+\overline{a_9}=\vec{0}\\ \overline{a_2}+\overline{a_6}+\overline{a_{10}}=\vec{0}\\ \overline{a_3}+\overline{a_7}+\overline{a_{11}}=\vec{0}\\ \overline{a_4}+\overline{a_8}+\overline{a_{12}}=\vec{0}\end{cases},\quad \begin{cases}\overline{a_1}+\overline{a_4}+\overline{a_7}+\overline{a_{10}}=\vec{0}\\ \overline{a_2}+\overline{a_5}+\overline{a_8}+\overline{a_{11}}=\vec{0}\\ \overline{a_3}+\overline{a_6}+\overline{a_9}+\overline{a_{12}}=\vec{0}\end{cases}$$

$$\begin{cases}A_1(\overline{a_1}+\overline{a_5}+\overline{a_9})=\vec{0}\\ A_2(\overline{a_2}+\overline{a_6}+\overline{a_{10}})=\vec{0}\\ A_3(\overline{a_3}+\overline{a_7}+\overline{a_{11}})=\vec{0}\\ A_4(\overline{a_4}+\overline{a_8}+\overline{a_{12}})=\vec{0}\end{cases}\quad \begin{cases}B_1(\overline{a_1}+\overline{a_4}+\overline{a_7}+\overline{a_{10}})=\vec{0}\\ B_2(\overline{a_2}+\overline{a_5}+\overline{a_8}+\overline{a_{11}})=\vec{0}\\ B_3(\overline{a_3}+\overline{a_6}+\overline{a_9}+\overline{a_{12}})=\vec{0}\end{cases}$$

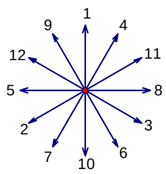
令 $A_1=1$，$A_2=2$，$A_3=3$，$A_4=4$

$B_1=0$，$B_2=4$，$B_3=8$

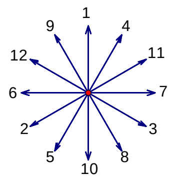
	$\overline{a_1}$	$\overline{a_2}$	$\overline{a_3}$	$\overline{a_4}$	$\overline{a_5}$	$\overline{a_6}$	$\overline{a_7}$	$\overline{a_8}$	$\overline{a_9}$	$\overline{a_{10}}$	$\overline{a_{11}}$	$\overline{a_{12}}$
A	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
B	0	4	8	0	4	8	0	4	8	0	4	8
邊長	1	6	11	4	5	10	3	8	9	2	7	12

可得 $1\overline{a_1}+6\overline{a_2}+11\overline{a_3}+4\overline{a_4}+5\overline{a_5}+10\overline{a_6}+3\overline{a_7}+8\overline{a_8}+9\overline{a_9}+2\overline{a_{10}}+7\overline{a_{11}}+12\overline{a_{12}}=\vec{0}$

因 $1\le d_1\le 9$，可得 $(d_1,d_2)=(9,3)$，$(9,1)$，$(6,6)$，$(6,2)$，$(3,3)$，$(3,1)$，$(2,2)$，$(1,1)$，$(7,1)$，$(5,1)$，$(7,5)$，其中 d_1,d_2 爲公差



(9,3)



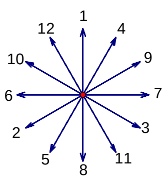
(9,1)

（1）$(d_1,d_2)=(9,3)$

$(1,4,11,8,3,6,10,7,2,5,12,9)$ 固定其中一個及其對邊，另 2 個排列 3 個排列和去除反向

（2）$(d_1,d_2)=(9,1)$

$(1,4,11,7,3,8,10,5,2,6,12,9)$ 固定其中一個及其對邊，另 2 個排列 3 個排列和去除反向

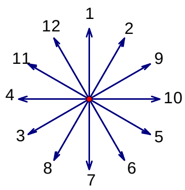


(7,1)

（3）$(d_1,d_2)=(7,1)$

$(1,4,9,7,3,11,8,5,2,6,10,12)(1,3,9,7,5,10,8,4,2,6,12,11)$

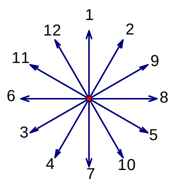
$(1,2,11,7,5,9,8,3,4,6,12,10)(1,3,7,11,8,5,2,10,6,4,9,12)$ 固定其中一個及其對邊，另 2 個排列 3 個排列和去除反向



(6,6)

（4）$(d_1,d_2)=(6,6)$

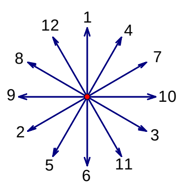
$(1,2,9,10,5,6,7,8,3,4,11,12)$ 固定其中一個及其對邊，另 5 個排列和去除反向



(6,2)

（5）$(d_1,d_2)=(6,2)$

$(1,2,9,8,5,10,7,4,3,6,11,12)(1,2,7,10,9,6,3,8,5,4,11,12)$ 固定其中一個及其對邊，另 2 個排列 3 個排列和去除反向



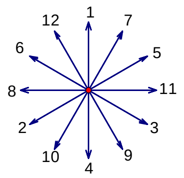
(5,1)

（6）$(d_1,d_2)=(5,1)$

$(1,4,7,10,3,11,6,5,2,9,8,12)(1,3,7,9,11,5,2,8,6,4,12,10)$

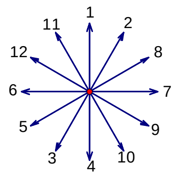
$(1,3,7,9,5,11,6,4,2,8,10,12)(1,2,9,8,5,11,6,3,4,7,10,12)$

(1,5,4,11,8,7,2,10,3,6,9,12) (1,3,5,11,9,7,2,8,4,6,10,12)
(1,3,6,9,10,7,2,8,5,4,11,12) 固定其中一個及其對邊，另 2 個排列 3 個排列和去除反向



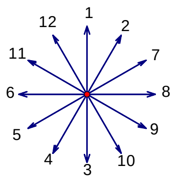
(3,3)

（7）$(d_1,d_2)=(3,3)$
(1,7,5,11,3,9,4,10,2,8,6,12) 固定其中一個及其對邊，另 5 個排列和去除反向



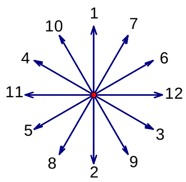
(3,1)

（8）$(d_1,d_2)=(3,1)$
(1,7,5,10,3,11,4,8,2,9,6,12)(1,2,8,7,9,10,4,3,5,6,12,11)
(1,3,10,7,11,5,2,6,9,4,12,8)(1,5,4,9,11,7,2,8,3,6,12,10)
(1,7,4,11,5,9,2,10,3,8,6,12) 固定其中一個及其對邊，另 2 個排列 3 個排列和去除反向



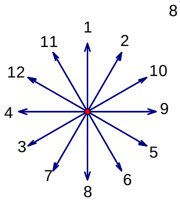
(2,2)

（9）$(d_1,d_2)=(2,2)$
(1,2,7,8,9,10,3,4,5,6,11,12) 固定其中一個及其對邊，另 5 個排列和去除反向



(1,1)

（10）$(d_1,d_2)=(1,1)$
(1,3,6,8,9,11,2,4,5,7,10,12) 固定其中一個及其對邊，另 5 個排列和去除反向



(7,5)

（11）$(d_1,d_2)=(7,5)$
(1,2,10,11,5,4,8,7,3,6,12,9) 固定其中一個及其對邊，另 2 個排列 3 個排列和去除反向

d_1	9	9	6	6	3	3	2	1	7	5	7
d_2	3	1	6	2	3	1	2	1	1	1	5
個數	2!×3!	2!×3!	5!	2!×3!×2	5!	2!×3!×5	5!	5!	2!×3!×4	2!×3!×7	2!×3!

（三）以等角序列三十邊形爲例：$n=30=5\times 6=p\times q$ ，$(p,q)=1$

$$\begin{cases}1(\overrightarrow{a_6}+\overrightarrow{a_{12}}+\overrightarrow{a_{18}}+\overrightarrow{a_{24}}+\overrightarrow{a_{30}})=\vec{0}\cdots(1)\\4(\overrightarrow{a_5}+\overrightarrow{a_{11}}+\overrightarrow{a_{17}}+\overrightarrow{a_{23}}+\overrightarrow{a_{29}})=\vec{0}\cdots(2)\\5(\overrightarrow{a_4}+\overrightarrow{a_{10}}+\overrightarrow{a_{16}}+\overrightarrow{a_{22}}+\overrightarrow{a_{28}})=\vec{0}\cdots(3)\\2(\overrightarrow{a_3}+\overrightarrow{a_9}+\overrightarrow{a_{15}}+\overrightarrow{a_{21}}+\overrightarrow{a_{27}})=\vec{0}\cdots(4)\\3(\overrightarrow{a_2}+\overrightarrow{a_8}+\overrightarrow{a_{14}}+\overrightarrow{a_{20}}+\overrightarrow{a_{26}})=\vec{0}\cdots(5)\\6(\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_7}+\overrightarrow{a_{13}}+\overrightarrow{a_{19}}+\overrightarrow{a_{25}})=\vec{0}\cdots(6)\end{cases}$$

$$\begin{cases}6\times 0(\overrightarrow{a_5}+\overrightarrow{a_{10}}+\overrightarrow{a_{15}}+\overrightarrow{a_{20}}+\overrightarrow{a_{25}}+\overrightarrow{a_{30}})=\vec{0}\cdots(7)\\6\times 1(\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_6}+\overrightarrow{a_{11}}+\overrightarrow{a_{16}}+\overrightarrow{a_{21}}+\overrightarrow{a_{26}})=\vec{0}\cdots(8)\\6\times 2(\overrightarrow{a_2}+\overrightarrow{a_7}+\overrightarrow{a_{12}}+\overrightarrow{a_{17}}+\overrightarrow{a_{22}}+\overrightarrow{a_{27}})=\vec{0}\cdots(9)\\6\times 3(\overrightarrow{a_3}+\overrightarrow{a_8}+\overrightarrow{a_{13}}+\overrightarrow{a_{18}}+\overrightarrow{a_{23}}+\overrightarrow{a_{28}})=\vec{0}\cdots(10)\\6\times 4(\overrightarrow{a_4}+\overrightarrow{a_9}+\overrightarrow{a_{14}}+\overrightarrow{a_{19}}+\overrightarrow{a_{24}}+\overrightarrow{a_{29}})=\vec{0}\cdots(11)\end{cases}$$

由 $(1)+(2)+(3)+(4)+(5)+(6)+(7)+(8)+(9)+(10)+(11)=\vec{0}$

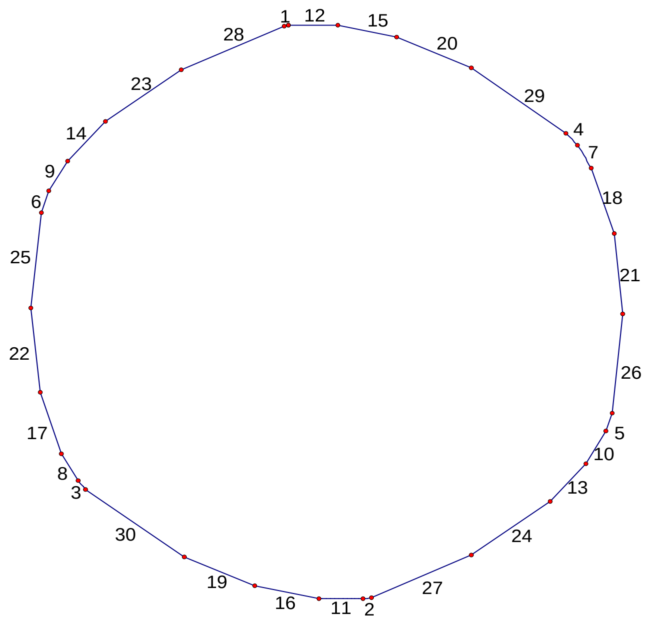
可得等角序列三十邊形之一組邊長 $a_1,a_2,\cdots,a_{29},a_{30}$ 爲

$12,15,20,29,4,7,18,21,26,5,10,13,24,27,2,$

$11,16,19,30,3,8,17,22,25,6,9,14,23,28,1$

即存在邊長爲1 ，2 ，3 ，…… ，29 ，30的等角序列三十邊形

圖形如下：



在尋找等角序列三十邊形的同時，我們發現適當的調整係數可生成邊長爲

1^2 ，2^2 ，3^2 ，…… ，30^2 的等角序列三十邊形，其詳細結果如下：

（三）在尋找等角序列三十邊形時，$n=30=5\times 6=p\times q$ ，$(p,q)=1$

我們發現選擇一組等角序列六邊形的邊長(1,4,5,2,3,6)，使得

$$\begin{cases} 1^2(\overline{a_{30}}+\overline{a_6}+\overline{a_{12}}+\overline{a_{18}}+\overline{a_{24}})=\vec{0} \\ 4^2(\overline{a_5}+\overline{a_{11}}+\overline{a_{17}}+\overline{a_{23}}+\overline{a_{29}})=\vec{0} \\ 5^2(\overline{a_{10}}+\overline{a_{16}}+\overline{a_{22}}+\overline{a_{28}}+\overline{a_4})=\vec{0} \\ 2^2(\overline{a_{15}}+\overline{a_{21}}+\overline{a_{27}}+\overline{a_3}+\overline{a_9})=\vec{0} \\ 3^2(\overline{a_{20}}+\overline{a_{26}}+\overline{a_2}+\overline{a_8}+\overline{a_{14}})=\vec{0} \\ 6^2(\overline{a_{25}}+\overline{a_1}+\overline{a_7}+\overline{a_{13}}+\overline{a_{19}})=\vec{0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (6\times 0)^2(\overline{a_{30}}+\overline{a_5}+\overline{a_{10}}+\overline{a_{15}}+\overline{a_{20}}+\overline{a_{25}})=\vec{0} \\ (6\times 1)^2(\overline{a_6}+\overline{a_{11}}+\overline{a_{16}}+\overline{a_{21}}+\overline{a_{26}}+\overline{a_1})=\vec{0} \\ (6\times 2)^2(\overline{a_{12}}+\overline{a_{17}}+\overline{a_{22}}+\overline{a_{27}}+\overline{a_2}+\overline{a_7})=\vec{0} \\ (6\times 3)^2(\overline{a_{18}}+\overline{a_{23}}+\overline{a_{28}}+\overline{a_3}+\overline{a_8}+\overline{a_{13}})=\vec{0} \\ (6\times 4)^2(\overline{a_{24}}+\overline{a_{29}}+\overline{a_4}+\overline{a_9}+\overline{a_{14}}+\overline{a_{19}})=\vec{0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (6\times 0)(1\overline{a_{30}}+4\overline{a_5}+5\overline{a_{10}}+2\overline{a_{15}}+3\overline{a_{20}}+6\overline{a_{25}})=\vec{0} \\ (6\times 2)(1\overline{a_6}+4\overline{a_{11}}+5\overline{a_{16}}+2\overline{a_{21}}+3\overline{a_{26}}+6\overline{a_1})=\vec{0} \\ (6\times 4)(1\overline{a_{12}}+4\overline{a_{17}}+5\overline{a_{22}}+2\overline{a_{27}}+3\overline{a_2}+6\overline{a_7})=\vec{0} \\ (6\times 6)(1\overline{a_{18}}+4\overline{a_{23}}+5\overline{a_{28}}+2\overline{a_3}+3\overline{a_8}+6\overline{a_{13}})=\vec{0} \\ (6\times 8)(1\overline{a_{24}}+4\overline{a_{29}}+5\overline{a_4}+2\overline{a_9}+3\overline{a_{14}}+6\overline{a_{19}})=\vec{0} \end{cases}$$

$\therefore \overline{a_1}$ 之係數爲 $6^2+(6\times 1)^2+(6\times 2)\times 6=12^2$

$\overline{a_2}$ 之係數爲 $3^2+(6\times 2)^2+(6\times 4)\times 3=15^2$

$\overline{a_3}$ 之係數爲 $2^2+(6\times 3)^2+(6\times 6)\times 2=20^2$

$\overline{a_4}$ 之係數爲 $5^2+(6\times 4)^2+(6\times 8)\times 5=29^2$

$\overline{a_5}$ 之係數爲 $4^2+(6\times 0)^2+(6\times 0)\times 4=4^2$

$\overline{a_6}$ 之係數爲 $1^2+(6\times 1)^2+(6\times 2)\times 1=7^2$

$\overline{a_7}$ 之係數爲 $6^2+(6\times 2)^2+(6\times 4)\times 6=18^2$

$\overline{a_8}$ 之係數爲 $3^2+(6\times 3)^2+(6\times 6)\times 3=21^2$

$\overline{a_9}$ 之係數爲 $2^2+(6\times 4)^2+(6\times 8)\times 2=26^2$

$\overline{a_{10}}$ 之係數爲 $5^2+(6\times 0)^2+(6\times 0)\times 5=5^2$

$\overline{a_{11}}$ 之係數爲 $4^2+(6\times 1)^2+(6\times 2)\times 4=10^2$

$\overline{a_{12}}$ 之係數爲 $1^2+(6\times 2)^2+(6\times 4)\times 1=13^2$

$\overline{a_{13}}$ 之係數爲 $6^2+(6\times 3)^2+(6\times 6)\times 6=24^2$

$\overline{a_{14}}$ 之係數爲 $3^2+(6\times 4)^2+(6\times 8)\times 3=27^2$

$\overline{a_{15}}$ 之係數爲 $2^2+(6\times 0)^2+(6\times 0)\times 2=2^2$

$\overline{a_{16}}$ 之係數爲 $5^2+(6\times 1)^2+(6\times 2)\times 5=11^2$

$\overrightarrow{a_{17}}$ 之係數爲 $4^2+(6\times2)^2+(6\times4)\times4=16^2$

$\overrightarrow{a_{18}}$ 之係數爲 $1^2+(6\times3)^2+(6\times6)\times1=19^2$

$\overrightarrow{a_{19}}$ 之係數爲 $6^2+(6\times4)^2+(6\times8)\times6=30^2$

$\overrightarrow{a_{20}}$ 之係數爲 $3^2+(6\times0)^2+(6\times0)\times3=3^2$

$\overrightarrow{a_{21}}$ 之係數爲 $2^2+(6\times1)^2+(6\times2)\times2=8^2$

$\overrightarrow{a_{22}}$ 之係數爲 $5^2+(6\times2)^2+(6\times4)\times5=17^2$

$\overrightarrow{a_{23}}$ 之係數爲 $4^2+(6\times3)^2+(6\times6)\times4=22^2$

$\overrightarrow{a_{24}}$ 之係數爲 $1^2+(6\times4)^2+(6\times8)\times1=25^2$

$\overrightarrow{a_{25}}$ 之係數爲 $6^2+(6\times0)^2+(6\times0)\times6=6^2$

$\overrightarrow{a_{26}}$ 之係數爲 $3^2+(6\times1)^2+(6\times2)\times3=9^2$

$\overrightarrow{a_{27}}$ 之係數爲 $2^2+(6\times2)^2+(6\times4)\times2=14^2$

$\overrightarrow{a_{28}}$ 之係數爲 $5^2+(6\times3)^2+(6\times6)\times5=23^2$

$\overrightarrow{a_{29}}$ 之係數爲 $4^2+(6\times4)^2+(6\times8)\times4=28^2$

$\overrightarrow{a_{30}}$ 之係數爲 $1^2+(6\times0)^2+(6\times0)\times1=1^2$

可得等角序列三十邊形之一組邊長 $a_1,a_2,\cdots,a_{29},a_{30}$ 爲

$12^2,15^2,20^2,29^2,4^2,7^2,18^2,21^2,26^2,5^2,10^2,13^2,24^2,27^2,2^2,$

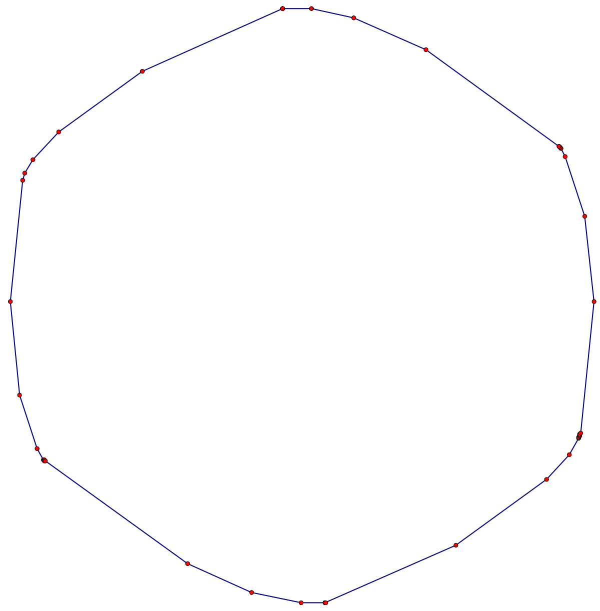
$11^2,16^2,19^2,30^2,3^2,8^2,17^2,22^2,25^2,6^2,9^2,14^2,23^2,28^2,1^2$

是 $12,15,20,29,4,7,18,21,26,5,10,13,24,27,2,$

$11,16,19,30,3,8,17,22,25,6,9,14,23,28,1$ 對應之平方

即存在邊長爲 1^2 ， 2^2 ， 3^2 ， …… ， 29^2 ， 30^2 的等角序列三十邊形

圖形如下：



八、

證明 n 含有3個以上的質因子時，存在邊長為 1^2 ， 2^2 ， 3^2 ，⋯ ， n^2 的等角序列多邊形

令 $\omega_n{}^k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$ ， $k=0$ ，1，2 ，⋯⋯ ， $n-1$

則 $\omega_n{}^k$ 為 $x^n=1$ 的 n 個相異根

設 $n=p\times q$ ， $p>1$，$(p,q)=1$， q 存在邊長為1，2 ，⋯⋯ ，q 的等角序列多邊形

$\therefore$ 可得一邊長序列 $(a_0,a_1,a_2,...,a_{q-1})$

使得 $a_0\omega_n^0+a_1\omega_n^p+a_2\omega_n^{2\times p}+\cdots\cdots+a_{q-1}\omega_n^{(q-1)\times p}=0$ ，即 $\sum_{j=0}^{q-1}a_j\omega_n{}^{jp}=0\cdots\cdots(1)$

又 $\omega_n^0+\omega_n^q+\omega_n^{2\times q}+\cdots\cdots+\omega_n^{(p-1)q}=0$ ，即 $\sum_{j=0}^{p-1}\omega_n{}^{jq}=0\cdots\cdots(2)$

且 $\omega_n^0+\omega_n^p+\omega_n^{2\times p}+\cdots\cdots+\omega_n^{(q-1)p}=0$ ，即 $\sum_{j=0}^{q-1}\omega_n{}^{jp}=0\cdots\cdots(3)$

將(1)式乘上 $2(s-1)q\omega_n{}^{(s-1)q}$ ，$1\le s\le p$ ⋯⋯(4)

將(2)式乘上 $a_{t-1}{}^2\omega_n{}^{(t-1)p}$ ，$1\le t\le q$ ⋯⋯(5)

將(3)式乘上 $(s-1)^2q^2\omega_n{}^{(s-1)q}$ ，$1\le s\le p$ ⋯⋯(6)

$(4)+(5)+(6)$ 得

$$\sum_{s=1}^{p}2(s-1)q\omega_n{}^{(s-1)p}\sum_{j=0}^{p-1}\omega_n{}^{jp}+\sum_{t=1}^{q}a_{t-1}{}^2\omega_n{}^{(t-1)p}\sum_{j=0}^{p-1}\omega_n{}^{jp}+\sum_{s=1}^{p}\left[(s-1)q\right]^2\omega_n{}^{(s-1)q}\sum_{j=0}^{q-1}\omega_n{}^{jp}=0$$

$$\Rightarrow\sum_{k=0}^{n-1}b_k\omega_n^k=0\text{，其中}b_k=\left[a_{t-1}{}^2+2(s-1)q+\left((s-1)q\right)^2\right]=\left[a_{t-1}+(s-1)q\right]^2$$

$\because (p,q)=1$，且 $t\in\{1,2,...,q\}$ ， $s\in\{1,2,...,p\}$

又 $k\equiv(t-1)p+(s-1)q \pmod n$

$\therefore k\in\{0,1,2,...,n-1\}$

故 $\{b_0,b_1,...,b_n\}$ 可為 1^2 ， 2^2 ， 3^2 ，⋯⋯ ， n^2 的一個排列

即存在邊長為 1^2 ， 2^2 ， 3^2 ，⋯⋯ ， n^2 的等角序列多邊形

我們繼續猜想是否存在1^3，2^3，3^3，……，n^3的等角序列多邊形？

首先，因爲三個質因子可產生1^2，2^2，3^2，……，n^2的等角序列多邊形，所以我們猜測『**四個質因子應可產生1^3，2^3，3^3，……，n^3的等角序列多邊形**』

因此，我們以探索最小的 210($=2\times3\times5\times7$)邊形出發:：

$12^3(\overline{a_1}+\overline{a_{31}}+\overline{a_{61}}+\overline{a_{91}}+\overline{a_{121}}+\overline{a_{151}}+\overline{a_{181}})=\vec{0}$

$15^3(\overline{a_2}+\overline{a_{32}}+\overline{a_{62}}+\overline{a_{92}}+\overline{a_{122}}+\overline{a_{152}}+\overline{a_{182}})=\vec{0}$

$20^3(\overline{a_3}+\overline{a_{33}}+\overline{a_{63}}+\overline{a_{93}}+\overline{a_{123}}+\overline{a_{153}}+\overline{a_{183}})=\vec{0}$

$29^3(\overline{a_4}+\overline{a_{34}}+\overline{a_{64}}+\overline{a_{94}}+\overline{a_{124}}+\overline{a_{154}}+\overline{a_{184}})=\vec{0}$

$4^3(\overline{a_5}+\overline{a_{35}}+...+\overline{a_{185}})=\vec{0}$

$7^3(\overline{a_6}+...+\overline{a_{186}})=\vec{0}$

$18^3(\overline{a_7}+...+\overline{a_{187}})=\vec{0}$

$21^3(\overline{a_8}+...+\overline{a_{188}})=\vec{0}$

$26^3(\overline{a_9}+...+\overline{a_{189}})=\vec{0}$

$5^3(\overline{a_{10}}+...+\overline{a_{190}})=\vec{0}$

$10^3(\overline{a_{11}}+...+\overline{a_{191}})=\vec{0}$

$13^3(\overline{a_{12}}+...+\overline{a_{192}})=\vec{0}$

$24^3(\overline{a_{13}}+...+\overline{a_{193}})=\vec{0}$

$27^3(\overline{a_{14}}+...+\overline{a_{194}})=\vec{0}$

$2^3(\overline{a_{15}}+...+\overline{a_{195}})=\vec{0}$

$11^3(\overline{a_{16}}+...+\overline{a_{196}})=\vec{0}$

$16^3(\overline{a_{17}}+...+\overline{a_{197}})=\vec{0}$

$19^3(\overline{a_{18}}+...+\overline{a_{198}})=\vec{0}$

$30^3(\overline{a_{19}}+...+\overline{a_{199}})=\vec{0}$

$3^3(\overline{a_{20}}+...+\overline{a_{200}})=\vec{0}$

$8^3(\overline{a_{21}}+...+\overline{a_{201}})=\vec{0}$

$17^3(\overline{a_{22}}+...+\overline{a_{202}})=\vec{0}$

$22^3(\overline{a_{23}}+...+\overline{a_{203}})=\vec{0}$

$25^3(\overline{a_{24}}+...+\overline{a_{204}})=\vec{0}$

$6^3(\overline{a_{25}}+...+\overline{a_{205}})=\vec{0}$

$9^3(\overline{a_{26}}+...+\overline{a_{206}})=\vec{0}$

$14^3(\overline{a_{27}}+...+\overline{a_{207}})=\vec{0}$

$23^3(\overline{a_{28}}+...+\overline{a_{208}})=\vec{0}$

$28^3(\overline{a_{29}}+...+\overline{a_{209}})=\vec{0}$

$1^3(\overline{a_{30}}+\overline{a_{60}}+...+\overline{a_{210}})=\vec{0}$

$(30\times 0)^3(\overline{a_1}+\overline{a_8}+\overline{a_{15}}+\overline{a_{22}}+\overline{a_{29}}+...+\overline{a_{197}}+\overline{a_{204}})=\vec{0}$

$(30\times 1)^3(\overline{a_2}+\overline{a_9}+\overline{a_{16}}+\overline{a_{23}}+...+\overline{a_{205}})=\vec{0}$

$(30\times 2)^3(\overline{a_3}+\overline{a_{10}}+\overline{a_{17}}+...+\overline{a_{206}})=\vec{0}$

$(30\times 3)^3(\overline{a_4}+\overline{a_{11}}+\overline{a_{18}}+...+\overline{a_{207}})=\vec{0}$

$(30\times 4)^3(\overline{a_5}+\overline{a_{12}}+\overline{a_{19}}+...+\overline{a_{208}})=\vec{0}$

$(30\times 5)^3(\overline{a_6}+\overline{a_{13}}+\overline{a_{20}}+...+\overline{a_{209}})=\vec{0}$

$(30\times 6)^3(\overline{a_7}+\overline{a_{14}}+\overline{a_{21}}+...+\overline{a_{210}})=\vec{0}$

$$
\begin{aligned}
3\times(30\times 0)^2(&12\overline{a_1}+21\overline{a_8}+2\overline{a_{15}}+17\overline{a_{22}}+28\overline{a_{29}}+7\overline{a_{36}}+24\overline{a_{43}}+3\overline{a_{50}}+14\overline{a_{57}}+29\overline{a_{64}}+10\overline{a_{71}}\\
&+19\overline{a_{78}}+6\overline{a_{85}}+15\overline{a_{92}}+26\overline{a_{99}}+11\overline{a_{106}}+22\overline{a_{113}}+1\overline{a_{120}}+18\overline{a_{127}}+27\overline{a_{134}}+8\overline{a_{141}}\\
&+23\overline{a_{148}}+4\overline{a_{155}}+13\overline{a_{162}}+30\overline{a_{169}}+9\overline{a_{176}}+20\overline{a_{183}}+5\overline{a_{190}}+16\overline{a_{197}}+25\overline{a_{204}})=\vec{0}
\end{aligned}
$$

$3\times(30\times 1)^2(12\overline{a_{121}}+21\overline{a_{128}}+2\overline{a_{135}}+17\overline{a_{142}}+...+25\overline{a_{114}})=\vec{0}$

$3\times(30\times 2)^2(12\overline{a_{31}}+21\overline{a_{38}}+2\overline{a_{45}}+... \quad +25\overline{a_{24}})=\vec{0}$

$3\times(30\times 3)^2(12\overline{a_{151}}+21\overline{a_{158}}+2\overline{a_{165}}+...+25\overline{a_{144}})=\vec{0}$

$3\times(30\times 4)^2(12\overline{a_{61}}+21\overline{a_{68}}+2\overline{a_{75}}+... \quad +25\overline{a_{54}})=\vec{0}$

$3\times(30\times 5)^2(12\overline{a_{181}}+21\overline{a_{188}}+2\overline{a_{195}}+...+25\overline{a_{174}})=\vec{0}$

$3\times(30\times 6)^2(12\overline{a_{91}}+21\overline{a_{98}}+2\overline{a_{105}}+... \quad +25\overline{a_{84}})=\vec{0}$

$$
\begin{aligned}
&3\times(30\times 0)(12^2\overline{a_1}+21^2\overline{a_8}+2^2\overline{a_{15}}+17^2\overline{a_{22}}+28^2\overline{a_{29}}+7^2\overline{a_{36}}+24^2\overline{a_{43}}+3^2\overline{a_{50}}+14^2\overline{a_{57}}+29^2\overline{a_{64}}\\
&+10^2\overline{a_{71}}+19^2\overline{a_{78}}+6^2\overline{a_{85}}+15^2\overline{a_{92}}+26^2\overline{a_{99}}+11^2\overline{a_{106}}+22^2\overline{a_{113}}+1^2\overline{a_{120}}+18^2\overline{a_{127}}+27^2\overline{a_{134}}\\
&+8^2\overline{a_{141}}+23^2\overline{a_{148}}+4^2\overline{a_{155}}+13^2\overline{a_{162}}+30^2\overline{a_{169}}+9^2\overline{a_{176}}+20^2\overline{a_{183}}+5^2\overline{a_{190}}+16^2\overline{a_{197}}+25^2\overline{a_{204}})
\end{aligned}
$$

$3\times(30\times 1)(12^2a_{121}+21^2a_{128}+\cdots\cdots+25^2a_{114})$

$3\times(30\times 2)(12^2a_{31}+21^2a_{38}+\cdots\cdots+25^2a_{24})$

$3\times(30\times 3)(12^2a_{151}+21^2a_{158}+\cdots\cdots+25^2a_{144})$

$3\times(30\times 4)(12^2a_{61}+21^2a_{68}+\cdots\cdots+25^2a_{54})$

$3\times(30\times 5)(12^2a_{181}+21^2a_{188}+\cdots\cdots+25^2a_{174})$

$3\times(30\times 6)(12^2a_{91}+21^2a_{98}+\cdots\cdots+25^2a_{84})$

$\overline{a_1}$ 之係數爲 $12^3+12^2\times 30\times 0+12\times(30\times 0)^2+(30\times 0)^3=12^3$

$\overline{a_2}$ 之係數爲 $15^3+15^2\times 30\times 1+15\times(30\times 1)^2+(30\times 1)^3=45^3$

$\overline{a_3}$ 之係數爲 $20^3+20^2\times 30\times 2+20\times(30\times 2)^2+(30\times 2)^3=80^3$

$\overline{a_4}$ 之係數爲 $29^3+29^2\times 30\times 3+29\times(30\times 3)^2+(30\times 3)^3=119^3$

$\overline{a_5}$ 之係數爲 $4^3+4^2\times 30\times 4+4\times(30\times 4)^2+(30\times 4)^3=124^3$

$\overline{a_6}$ 之係數爲 $7^3+7^2\times 30\times 5+7\times(30\times 5)^2+(30\times 5)^3=157^3$

$\overline{a_7}$ 之係數爲 $18^3+18^2\times 30\times 6+18\times(30\times 6)^2+(30\times 6)^3=198^3$

$\overline{a_8}$ 之係數爲 $21^3+21^2\times 30\times 0+21\times(30\times 0)^2+(30\times 0)^3=21^3$

$\overline{a_9}$ 之係數爲 $26^3+26^2\times 30\times 1+26\times(30\times 1)^2+(30\times 1)^3=56^3$

$\overline{a_{10}}$ 之係數爲 $5^3+5^2\times 30\times 2+5\times(30\times 2)^2+(30\times 2)^3=65^3$ ……

九、

> 證明n含有4個以上的質因子時，存在邊長爲1^3，2^3，3^3，……，n^3的等角序列多邊形

令$w^k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}$，$k = 0,1,2,...,n-1$

即w^k爲$x^n=1$的根，其中$n = p \times q$，且q邊形可形成$1,2,...,q$和$1^2,2^2,...,q^2$的等角序列多邊形

可得邊長序列$\left(a_0,a_1,...,a_{q-1}\right)$和$\left(a_0{}^2,a_1{}^2,...,a_{q-1}{}^2\right)$

$$w^0 + w^q + w^{2q} + ... + w^{(p-1)q} = 0 \text{———}(1) \Rightarrow \sum_{j=0}^{p-1} w^{jq} = 0$$

$$w^0 + w^p + w^{2p} + ... + w^{(q-1)p} = 0 \text{———}(2) \Rightarrow \sum_{j=0}^{q-1} w^{jp} = 0$$

$$a_0w^0 + a_1w^p + a_2w^{2p} + ... + a_{q-1}w^{(q-1)p} = 0 \text{———}(3) \Rightarrow \sum_{j=0}^{q-1} a_j w^{jp} = 0$$

$$a_0{}^2w^0 + a_1{}^2w^p + a_2{}^2w^{2p} + ... + a_{q-1}{}^2w^{(q-1)p} = 0 \text{———}(4) \Rightarrow \sum_{j=0}^{q-1} a_j{}^2 w^{jp} = 0$$

將(1)式乘上$a_{t-1}{}^3w^{(t-1)p}$，其中$1 \le t \le q$———(5)

將(2)式乘上$(s-1)^3q^3w^{(s-1)q}$，其中$1 \le s \le p$———(6)

將(3)式乘上$3(s-1)^2q^2w^{(s-1)q}$，其中$1 \le s \le p$———(7)

將(4)式乘上$3(s-1)qw^{(s-1)q}$，其中$1 \le s \le p$———(8)

$$(5)+(6)+(7)+(8)=\sum_{t=1}^{q} a_{t-1}{}^3 w^{(t-1)p} \times \sum_{j=0}^{p-1} w^{jq} + \sum_{s=1}^{p}(s-1)^3q^3w^{(s-1)q} \times \sum_{j=0}^{q-1} w^{jp}$$

$$+\sum_{s=1}^{p}3(s-1)^2q^2w^{(s-1)q} \times \sum_{j=0}^{q-1} a_j w^{jp} + \sum_{s=1}^{p}3(s-1)qw^{(s-1)q} \times \sum_{j=0}^{q-1} a_j{}^2 w^{jp} = 0$$

得$\sum_{k=0}^{n-1} b_k w^k = 0$，其中

$$b_k = \left[a_{t-1}{}^3 + 3(s-1)q \times a_{t-1}{}^2 + 3(s-1)^2q^2 \times a_{t-1} + (s-1)^3q^3\right] = \left[a_{t-1} + (s-1)q\right]^3$$

$\because (p,q) = 1$ 且 $t \in \{1,2,...,q\}, s \in \{1,2,...,p\}$

又$k \equiv (t-1)p + (s-1)q (\bmod n) \Rightarrow k \in \{0,1,2,...,n-1\}$

$t=1$時，$s = 1,2,3\cdots\cdots,p$，k得值$0,q,2q,\cdots\cdots,(p-1)q$

$t=2$時，$s = 1,2,3\cdots\cdots,p$，k得值$p,p+q,p+2q,\cdots\cdots,p+(p-1)q$

⋮ ⋮

$t=q$時，$s = 1,2,3\cdots\cdots,p$，k得值

$(q-1)p,(q-1)p+q,(q-1)p+2q,\cdots\cdots,(q-1)p+(p-1)q$

故$\{b_0,b_1,...,b_{n-1}\}$可爲$1^3,2^3,...,n^3$的一個排列

由此，我們推論存在邊長爲1^t，2^t，3^t，……，n^t的等角序列多邊形

十、

> 證明 n 含有 $t+1$（$t\geq 3$)個以上的質因子時，存在邊長爲 1^t，2^t，3^t，……，n^t 的等角序列多邊形

設 $n=\prod_{i=1}^{k+1}\alpha_i$，$(\alpha_a,\alpha_b)=1\quad \forall a\neq b\quad a,b=1,2,3,...,k$，$\alpha_i$ 爲 n 邊形之質因子

已知：

$k=1\Rightarrow n=\alpha_1\alpha_2$，可得 $a_0,a_1,a_2,...,a_{\alpha_1\alpha_2-1}$ 爲一等角序列 $\alpha_1\alpha_2$ 邊形

$k=2\Rightarrow n=\alpha_1\alpha_2\alpha_3$，可得 ${a_0}^2,{a_1}^2,{a_2}^2,...,{a_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3-1}}^2$ 爲一等角序列 $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ 邊形

$k=3\Rightarrow n=\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$，可得 ${a_0}^3,{a_1}^3,{a_2}^3,...,{a_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4-1}}^3$ 爲一等角序列 $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ 邊形

$$\text{設}\begin{cases} k=1 & \text{可得}1,2,3,\cdots\cdots,\text{n的等角序列多邊形}\\ k=2 & \text{可得}1^2,2^2,3^2,\cdots\cdots,\text{n}^2\text{的等角序列多邊形}\\ \vdots & \\ \vdots & \\ k=t-1 & \text{可得}1^{t-1},2^{t-1},3^{t-1},\cdots\cdots,\text{n}^{t-1}\text{的等角序列多邊形}\end{cases}$$

設 $\prod_{i=2}^{t+1}\alpha_i=A$

$$\text{即}\begin{cases} \omega^0+\omega^A+\omega^{2A}+\cdots\cdots+\omega^{(\alpha_1-1)A}=0 & -(1)\\ \omega^0+\omega^{\alpha_1}+\omega^{2\alpha_1}+\cdots\cdots+\omega^{(A-1)\alpha_1}=0 & -(2)\\ a_0\omega^0+a_1\omega^{\alpha_1}+a_2\omega^{2\alpha_1}+\cdots\cdots+a_{A-1}\omega^{(A-1)\alpha_1}=0 & -(3)\\ a_0^2\omega^0+a_1^2\omega^{\alpha_1}+a_2^2\omega^{2\alpha_1}+\cdots\cdots+a_{A-1}^2\omega^{(A-1)\alpha_1}=0 & -(4)\\ \qquad\vdots & \vdots\\ \qquad\vdots & \vdots\\ a_0^{t-1}\omega^0+a_1^{t-1}\omega^{\alpha_1}+a_2^{t-1}\omega^{2\alpha_1}+\cdots\cdots+a_{A-1}^{t-1}\omega^{(A-1)\alpha_1}=0 & -(t+1)\end{cases}$$

將(1)式乘上 $a_{l-1}^t\omega^{(l-1)\alpha_1}$ $\quad 1\leq l\leq A\quad -(t+2)$

將(2)式乘上 $C_t^t\left[A(m-1)\right]^t\omega^{(m-1)A}$ $\quad -(t+3)$

將(3)式乘上 $C_{t-1}^t\left[A(m-1)\right]^{t-1}\omega^{(m-1)A}$ $\quad -(t+4)$

⋮ ⋮ $\quad 1\leq m\leq\alpha_1$

⋮ ⋮

將(t+1)式乘上 $C_1^t\left[A(m-1)\right]\omega^{(m-1)A}$ $\quad -(2t+2)$,

$C_i^t,i=1,2,...,t,$ 均爲組合數

$(t+2)+(t+3)+(t+4)+\cdots\cdots+(2t+2)$

得 $\sum_{x=0}^{n-1}b_x\omega^x$，其中

$$b_x=\left\{a_{l-1}^t+C_1^tA(m-1)\times a_{l-1}^{t-1}+C_2^t\left[A(m-1)\right]^2\times a_{l-1}^{t-2}+\cdots\cdots+C_t^t\left[A(m-1)\right]^t\right\}$$

推得 $\left[a_{l-1}+A(m-1)\right]^t$

$\because(\alpha_1,A)=1$，且 $l\in\{1,2,\cdots\cdots,A\}$，$m\in\{1,2,\cdots\cdots,\alpha_1\}$

又 $x \equiv (l-1)\alpha_1 + (m-1)A (\bmod n)$ ，其中 $x \in \{1, 2, \cdots\cdots, n\}$

$l = 1$ 時， $m = 1, 2, 3\cdots\cdots, \alpha_1$ ， x 得值 $0, A, 2A, \cdots\cdots, (\alpha_1 - 1)A$

$l = 2$ 時， $m = 1, 2, 3\cdots\cdots, \alpha_1$ ， x 得值 $\alpha_1, \alpha_1 + A, \alpha_1 + 2A, \cdots\cdots, \alpha_1 + (\alpha_1 - 1)A$

$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$

$l = A$ 時， $m = 1, 2, 3\cdots\cdots, \alpha_1$ ， x 得值

$(A-1)\alpha_1, (A-1)\alpha_1 + A, (A-1)\alpha_1 + 2A, \cdots\cdots, (A-1)\alpha_1 + (\alpha_1 - 1)A$

故 $\{b_0, b_1, \cdots\cdots, b_{n\text{-}1}\}$ 可為 $1^t, 2^t, 3^t, \cdots\cdots, n^t$ 的一個排列

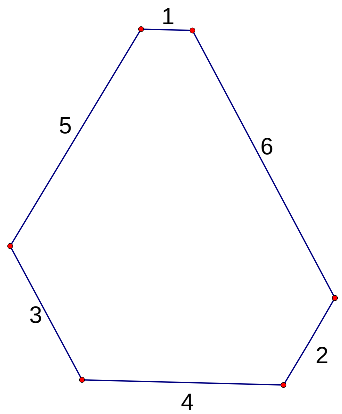
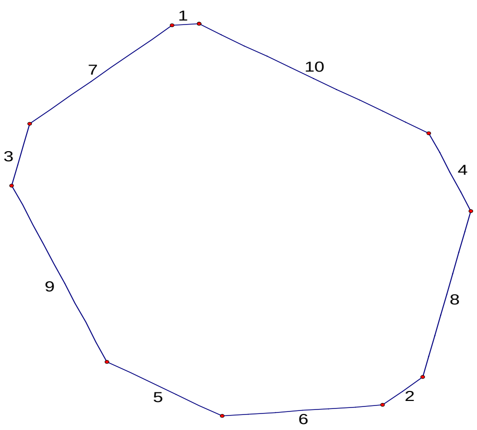
肆、 研究結果

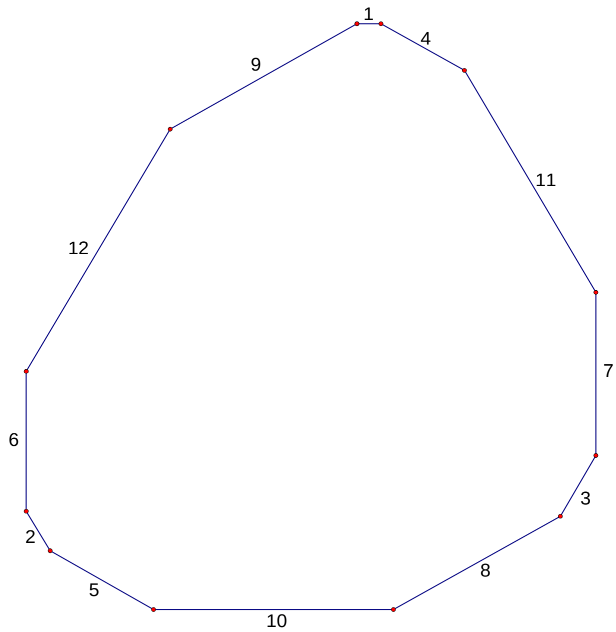
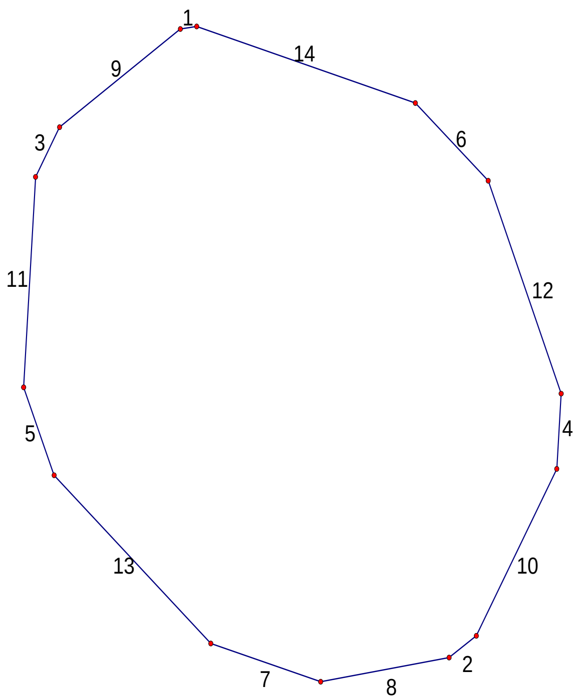
一、當 $n = p^m$ （ p 為質數， $m \in N$ ），則不存在等角序列 n 邊形，證明詳見 P.12。

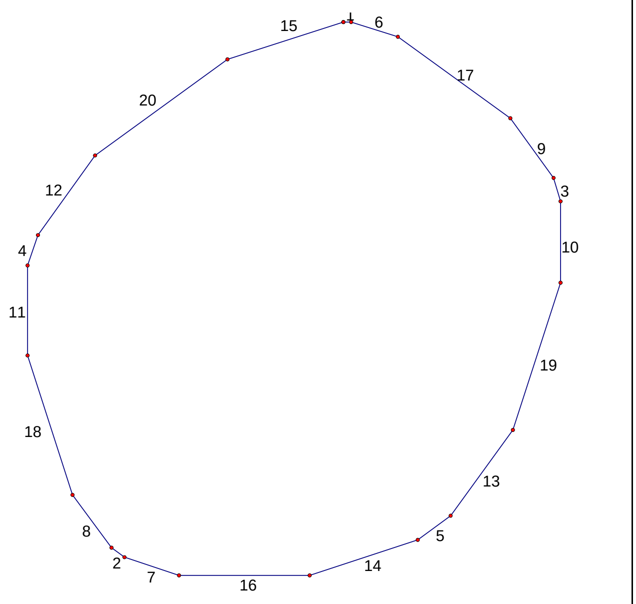
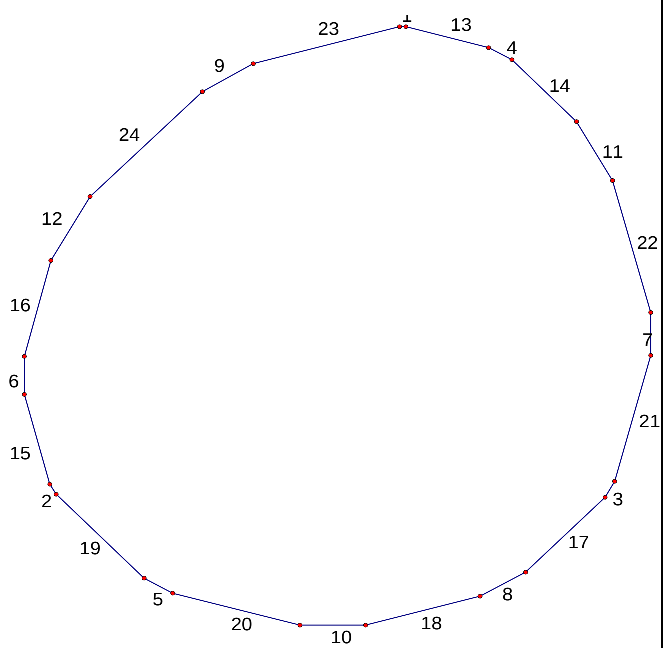
二、當 $n = 2p$ （ p 為奇質數）時，必存在等角序列 n 邊形，且個數為 $(p-1)!$ 個，證明詳見 P.11。

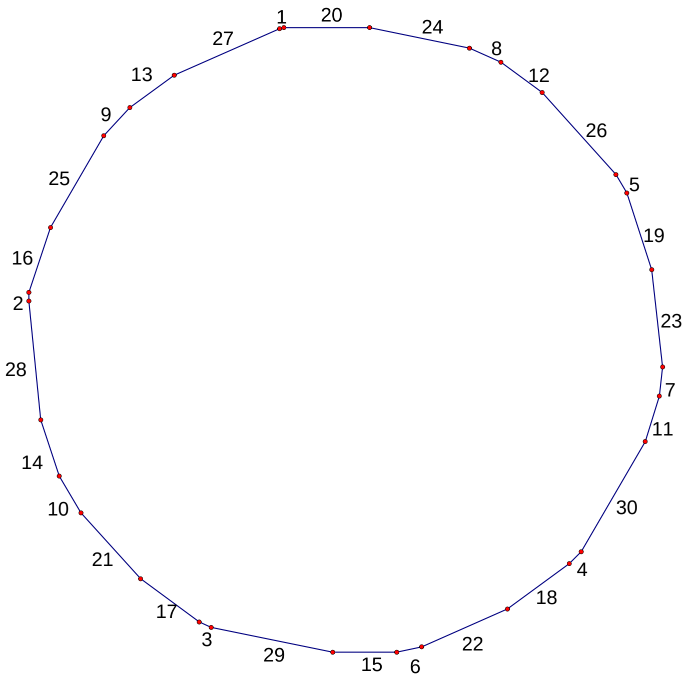
三、當 $n = pq$ （ p ， q 互質），則必存在等角序列 n 邊形，證明詳見 P.14。

四、等角序列 n 邊形實例整理：

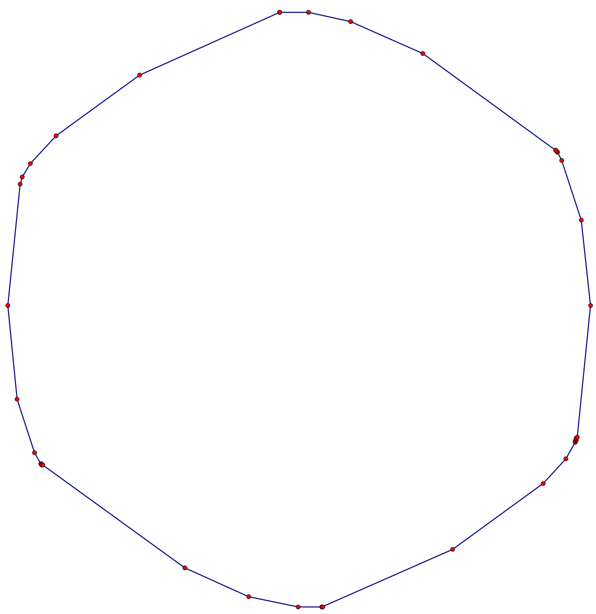
n	圖例	備註
6		詳見 P.2，7
10		詳見 P.3，8

n	圖例	備註
12		詳見 P.4
14		詳見 P.9

n	圖例	備註
20		詳見 P.31
24		詳見 P.32

n	圖例	備註
30		詳見 P.17

五、當 n 含有3個以上的質因子時，存在邊長爲 1^2 ， 2^2 ， 3^2 ，…， n^2 的等角序列多邊形，證明詳見 P.25，以 $n=30$ 爲例，存在邊長爲 $12^2,15^2,20^2,29^2,4^2,7^2,18^2,21^2,26^2,5^2,10^2,13^2,24^2,27^2,2^2,11^2,16^2,19^2,30^2,3^2,8^2,17^2,22^2,25^2,6^2,9^2,14^2,23^2,28^2,1^2$ 的等角序列三十邊形。(詳見 P.20)



六、當 n 含有 4 個以上的質因子時，存在邊長為 1^3 ， 2^3 ， 3^3 ，⋯， n^3 的等角序列多邊形。（詳見 P.23）

七、當 n 含有 $t+1$ 個以上的質因子時，存在邊長為 1^t ， 2^t ， 3^t ，⋯， n^t 的等角序列多邊形。（詳見 P.24）

八、以等角序列三次方之 210 邊形為例

利用等角序列三十邊形之邊長 $12^2,15^2,20^2,29^2,4^2,7^2,18^2,21^2,26^2,5^2,10^2,13^2,24^2,27^2,2^2,11^2,16^2,19^2,30^2,3^2,8^2,17^2,22^2,25^2,6^2,9^2,14^2,23^2,28^2,1^2$ ，取 12,15,20,29,4,7,18,21,26,5,10,13,24,27,2,11,16,19,30,3,8,17,22,25,6,9,14,23,28,1 與 0,30,60,90,120,150,180 生成邊長為 $a_k^{\ 3}$ ，而 a_k 如下表所示：

12	15	20	29	4	7	18	21	26	5	10	13	24	27	2
0	30	60	90	120	150	180	0	30	60	90	120	150	180	0
12	45	80	119	124	157	198	21	56	65	100	133	174	207	2

11	16	19	30	3	8	17	22	25	6	9	14	23	28	1
30	60	90	120	150	180	0	30	60	90	120	150	180	0	30
41	76	109	150	153	188	17	52	85	96	129	164	203	28	31

12	15	20	29	4	7	18	21	26	5	10	13	24	27	2
60	90	120	150	180	0	30	60	90	120	150	180	0	30	60
72	105	140	179	184	7	48	81	116	125	160	193	24	57	62

11	16	19	30	3	8	17	22	25	6	9	14	23	28	1
90	120	150	180	0	30	60	90	120	150	180	0	30	60	90
101	136	169	210	3	38	77	112	145	156	189	14	53	88	91

12	15	20	29	4	7	18	21	26	5	10	13	24	27	2
120	150	180	0	30	60	90	120	150	180	0	30	60	90	120
132	165	200	29	34	67	108	141	176	185	10	43	84	117	122

11	16	19	30	3	8	17	22	25	6	9	14	23	28	1
150	180	0	30	60	90	120	150	180	0	30	60	90	120	150
161	196	19	60	63	98	137	172	205	6	39	74	113	148	156

12	15	20	29	4	7	18	21	26	5	10	13	24	27	2
180	0	30	60	90	120	150	180	0	30	60	90	120	150	180
192	15	50	89	94	127	168	201	26	35	70	103	144	177	182

11	16	19	30	3	8	17	22	25	6	9	14	23	28	1
0	30	60	90	120	150	180	0	30	60	90	120	150	180	0
11	46	79	120	123	158	197	22	55	66	99	134	173	208	1

12	15	20	29	4	7	18	21	26	5	10	13	24	27	2
30	60	90	120	150	180	0	30	60	90	120	150	180	0	30
42	75	110	149	154	187	18	51	86	95	130	163	204	27	32

11	16	19	30	3	8	17	22	25	6	9	14	23	28	1
60	90	120	150	180	0	30	60	90	120	150	180	0	30	60
71	106	139	180	183	8	47	82	115	126	159	194	23	58	61

12	15	20	29	4	7	18	21	26	5	10	13	24	27	2
90	120	150	180	0	30	60	90	120	150	180	0	30	60	90
102	135	170	209	4	37	78	111	146	155	190	13	54	87	92

11	16	19	30	3	8	17	22	25	6	9	14	23	28	1
120	150	180	0	30	60	90	120	150	180	0	30	60	90	120
131	166	199	30	33	68	107	142	175	186	9	44	83	118	121

12	15	20	29	4	7	18	21	26	5	10	13	24	27	2
150	180	0	30	60	90	120	150	180	0	30	60	90	120	150
162	195	20	59	64	97	138	171	206	5	40	73	114	147	152

11	16	19	30	3	8	17	22	25	6	9	14	23	28	1
180	0	30	60	90	120	150	180	0	30	60	90	120	150	180
191	16	49	90	93	128	167	202	25	36	69	104	143	178	181

伍、 討論及應用

在研究過程中，本是一幾何問題，但由三角函數出發遇到在推廣上有困難，所以我將這一個純幾何問題轉至物理質心不變的觀點，使之解法清晰，所以轉由向量方法處理，但需配以多項式之分圓及數論之孫子定理在推廣上才能水道渠成。在研究過程中，深刻體驗數學與物理不可分家，數學問題可用物理來解，物理問題可用數學方法推廣，真可謂相輔相成。

在生活領域中，我們可以設定一個等角 n 次序列邊長來當密碼，可應用於網路安全中與電腦的防火牆，確保個人資料的安全，也可防堵非法入侵的電腦駭客。在學術領域中，我們設定一種物理實驗，在圓盤上掛上不同質量的法碼，卻能使其平衡，可以探討出合力為 0 的情況有哪些，並進一步推廣所有可能的排序。

陸、 參考資料

一、余文卿、翁錫伍、李善文、丁村成編著。高級中學數學一~四冊。臺北市：龍騰文化事業公司編印。

二、張景中（民 **86**）。平面幾何－新路-解題研究。臺北市：九章。

三、蔡聰明著　數學拾貝　三民書局。

柒、 附錄

一、利用三角函數觀點求等角序列 n 邊形

1. $\boxed{n=20}$

$$a_1\sin\frac{2\pi}{20}+a_2\sin\frac{2\times 2\pi}{20}+\cdots+a_{19}\sin\frac{19\times 2\pi}{20}+a_{20}\sin\frac{20\times 2\pi}{20}=0$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{5}-1}{4}(a_1+a_9-a_{11}-a_{19})+\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}(a_2+a_8-a_{12}-a_{18})+$$

$$\frac{\sqrt{5}+1}{4}(a_3+a_7-a_{13}-a_{17})+\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}+(a_4+a_6-a_{14}-a_{16})+(a_5-a_{15})=0$$

$2(a_5\text{-}a_{15})=(a_1+a_9\text{-}a_{11}\text{-}a_{19})=\text{-}(a_3+a_7\text{-}a_{13}\text{-}a_{17})\cdots(3)$

$(a_2+a_8\text{-}a_{12}\text{-}a_{18})=0\cdots(1)$

$(a_4+a_6\text{-}a_{14}\text{-}a_{16})=0\cdots(2)$

$$\text{由(1)可得}\begin{cases}(a_2+a_8-a_{12}-a_{18})=0\\(a_3+a_9-a_{13}-a_{19})=0\cdots(9)\\(a_4+a_{10}-a_{14}-a_{20})=0\\(a_5+a_{11}-a_{15}-a_1)=0\\(a_6+a_{12}-a_{16}-a_2)=0\\(a_7+a_{13}-a_{17}-a_3)=0\\(a_8+a_{14}-a_{18}-a_4)=0\\(a_9+a_{15}-a_{19}-a_5)=0\cdots(4)\\(a_{10}+a_{16}-a_{20}-a_6)=0\\(a_{11}+a_{17}-a_1-a_7)=0\cdots(5)\end{cases}$$

$$\text{由(2)可得}\begin{cases}(a_4+a_6-a_{14}-a_{16})=0\\(a_5+a_7-a_{15}-a_{17})=0\cdots(8)\\(a_6+a_8-a_{16}-a_{18})=0\\(a_7+a_9-a_{17}-a_{19})=0\cdots(7)\\(a_8+a_{10}-a_{18}-a_{20})=0\\(a_9+a_{11}-a_{19}-a_1)=0\\(a_{10}+a_{12}-a_{20}-a_2)=0\\(a_{11}+a_{13}-a_1-a_3)=0\\(a_{12}+a_{14}-a_2-a_4)=0\\(a_{13}+a_{15}-a_3-a_5)=0\end{cases}$$

由(4) $a_5-a_{15}=a_9-a_{19}$ 代入(3)

$\Rightarrow 2(a_9-a_{19})=(a_1+a_9-a_{11}-a_{19})\Rightarrow a_9-a_{19}=a_1-a_{11}\cdots(6)$

由(5) $a_1-a_{11}=a_{17}-a_7$ 代入(6)

$\Rightarrow a_7+a_9-a_{17}-a_{19}=0$ 與 (7) 同

由 (8) $a_5-a_{15}=a_{17}-a_7$ 代入 (3)

$\Rightarrow 2(a_{17}-a_7)=a_{17}+a_{13}-a_3-a_7 \Rightarrow a_{17}-a_7=a_{13}-a_3 \cdots (10)$

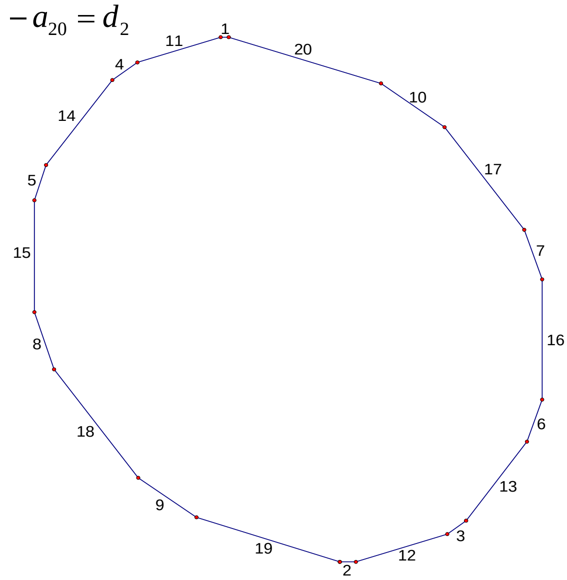
由 (9) $a_{13}-a_3=a_9-a_{19}$ 代入 (10)

$\Rightarrow a_7+a_9-a_{17}-a_{19}=0$ 與 (7) 同

由 (1)(2) 得知此二十邊形具備對邊等差結構

設 $\begin{cases} a_1-a_{11}=d_1 \\ a_2-a_{12}=d_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_3-a_{13}=-d_1 \\ a_5-a_{15}=d_1 \\ a_7-a_{17}=-d_1 \\ a_9-a_{19}=d_1 \end{cases}, \begin{cases} a_4-a_{14}=-d_2 \\ a_6-a_{16}=d_2 \\ a_8-a_{18}=-d_2 \\ a_{10}-a_{20}=d_2 \end{cases}$

得 $\begin{cases} a_1=A \quad a_{11}=A-d_1 \\ a_2=B \quad a_{12}=B-d_2 \\ a_3=C \quad a_{13}=C+d_1 \\ a_4=D \quad a_{14}=D+d_2 \\ a_5=E \quad a_{15}=E-d_1 \\ a_6=F \quad a_{16}=F-d_2 \\ a_7=G \quad a_{17}=G+d_1 \\ a_8=H \quad a_{18}=H+d_2 \\ a_9=I \quad a_{19}=I-d_1 \\ a_{10}=J \quad a_{20}=J-d_2 \end{cases}$



$\therefore$ 存在邊長序列為 $1,20,10,17,7,16,6,13,3,12,2,19,9,18,8,15,5,14,4,11$ 之等角序列二十邊形

2. $\boxed{n=24}$

$a_1\sin\frac{2\pi}{24}+a_2\sin\frac{2\times 2\pi}{24}+\cdots+a_{23}\sin\frac{23\times 2\pi}{24}+a_{24}\sin\frac{24\times 2\pi}{24}=0$

$\sin\frac{2\pi}{24}(a_1+a_{11}-a_{13}-a_{23})+\sin\frac{2\times 2\pi}{24}(a_2+a_{10}-a_{14}-a_{22})+$

$\sin\frac{3\times 2\pi}{24}(a_3+a_9-a_{15}-a_{21})+\sin\frac{4\times 2\pi}{24}(a_4+a_8-a_{16}-a_{20})+$

$\sin\frac{5\times 2\pi}{24}(a_5+a_7-a_{17}-a_{19})+(a_6-a_{18})=0$

$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}(a_1+a_{11}-a_{13}-a_{23})+\frac{1}{2}(a_2+a_{10}-a_{14}-a_{22})+$

$\frac{\sqrt{2}}{2}(a_3+a_9-a_{15}-a_{21})+\frac{\sqrt{3}}{2}(a_4+a_8-a_{16}-a_{20})+$

$$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}(a_5+a_7-a_{17}-a_{19})+(a_6-a_{18})=0$$

$$\begin{cases} a_2+a_{10}-a_{14}-a_{22}=2(a_6-a_{18})\cdots(3) \\ a_1+a_{11}-a_{13}-a_{23}=-(a_5+a_7-a_{17}-a_{19})=a_3+a_9-a_{15}-a_{21}\cdots(5) \\ a_4+a_8-a_{16}-a_{20}=0\cdots(1) \end{cases}$$

由(1)可得 $\begin{cases} a_3+a_8-a_{16}-a_{20}=0 \\ a_5+a_9-a_{17}-a_{21}=0\cdots(8) \\ a_6+a_{10}-a_{18}-a_{22}=0\cdots(4) \\ a_7+a_{11}-a_{19}-a_{23}=0\cdots(6) \\ a_8+a_{12}-a_{20}-a_{24}=0 \\ a_9+a_{13}-a_{21}-a_1=0 \\ a_{10}+a_{14}-a_{22}-a_2=0 \\ a_{11}+a_{15}-a_{23}-a_3=0 \\ a_{12}+a_{16}-a_{24}-a_4=0 \\ a_{13}+a_{17}-a_1-a_5=0\cdots(7) \\ a_{14}+a_{18}-a_2-a_6=0\cdots(2) \\ a_{15}+a_{19}-a_3-a_7=0\cdots(9) \end{cases}$

由(3) $(a_2+a_{10}-a_{14}-a_{22})=2(a_{18}-a_6)$ 代入(2)

$a_2-a_{14}=a_{18}-a_6 \Rightarrow a_{10}-a_{22}=a_{18}-a_6$ 與(4)同

由(5) $(a_1+a_{11}-a_{13}-a_{23})=-(a_5+a_7-a_{17}-a_{19})$ 代入(6)

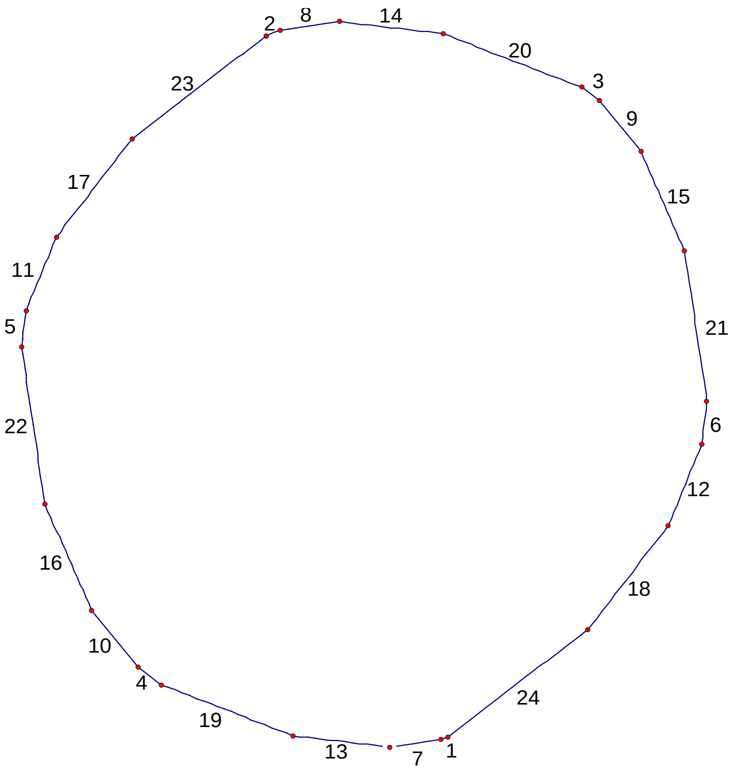
$a_7-a_{19}=a_{23}-a_{11} \Rightarrow a_1-a_{13}=a_{17}-a_5$ 與(7)同

代入(8) $a_5-a_{17}=a_{21}-a_9 \Rightarrow a_3-a_{15}=a_{19}-a_7$ 與(9)同

由(1) 故此二十四邊形具備對邊等差結構

設 $\begin{cases} a_1-a_{13}=d_A \\ a_2-a_{14}=d_B \\ a_3-a_{15}=d_C \\ a_4-a_{16}=d_D \\ a_5-a_{17}=-d_A \\ a_9-a_{21}=d_A \\ a_6-a_{18}=-d_B \\ a_{10}-a_{22}=d_B \\ a_7-a_{19}=-d_C \\ a_{11}-a_{23}=d_C \\ a_8-a_{20}=-d_D \\ a_{12}-a_{24}=d_D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1=A \quad a_{13}=A-d_A \\ a_2=B \quad a_{14}=B-d_B \\ a_3=C \quad a_{15}=C-d_C \\ a_4=D \quad a_{16}=D-d_D \\ a_5=E \quad a_{17}=E+d_A \\ a_6=F \quad a_{18}=F+d_B \\ a_7=G \quad a_{19}=G+d_C \\ a_8=H \quad a_{20}=H+d_D \\ a_9=I \quad a_{21}=I-d_A \\ a_{10}=J \quad a_{22}=J-d_B \\ a_{11}=K \quad a_{23}=K-d_C \\ a_{12}=L \quad a_{24}=L-d_D \end{cases}$

$\therefore$ 存在邊長序列為 $8,14,20,3,9,15,21,6,12,18,24,1,7,13,19,4,10,16,22,5,11,$ $17,23,2$ 之等角序列二十四邊形



二、等角序列 20 邊形之個數探討

$$\begin{cases} a_1 = A \quad a_{11} = A - d_1 \ , \ a_2 = B \quad a_{12} = B - d_2 \\ a_3 = C \quad a_{13} = C + d_1 \ , \ a_4 = D \quad a_{14} = D + d_2 \\ a_5 = E \quad a_{15} = E - d_1 \ , \ a_6 = F \quad a_{16} = F - d_2 \\ a_7 = G \quad a_{17} = G + d_1 \ , \ a_8 = H \quad a_{18} = H + d_2 \\ a_9 = I \quad a_{19} = I - d_1 \ , \ a_{10} = J \quad a_{20} = J - d_2 \end{cases}$$

因 $15 \ge d_1 \ge d_2 \ge 1$，可得

$$\begin{aligned}(d_1,d_2) = &(15,5);(15,1);(13,3);(13,1);(11,9);(11,7);(11,1);(10,2);(9,1);\\ &(7,3);(7,1);(6,2);(5,3);(5,1);(3,1);(10,10);(5,5);(2,2);(1,1)\end{aligned}$$ 共 19 種

（1）$(d_1,d_2) = (15,5)$

$(1,6,17,12,3,8,19,14,5,10,16,11,2,7,18,13,4,9,20,15)$ (共 1 種)固定一堆中的一組對邊，另外 4 個排列而另外一組中有 5 個排列並去除翻轉(除以 2)

（2）$(d_1,d_2) = (15,1)$

$(1,6,17,9,3,10,19,13,5,14,16,7,2,8,18,11,4,12,20,15)$ (共 1 種)固定一堆中的一組對邊，另外 4 個排列而另外一組中有 5 個排列並去除翻轉(除以 2)

（3）$(d_1,d_2) = (13,3)$

$(1,4,15,11,3,9,18,13,6,17,14,7,2,8,16,12,5,10,19,20)$ ...(共 4 種)固定一堆中的一組對邊，另外 4 個排列而另外一組中有 5 個排列並去除翻轉(除以 2)

（4）$(d_1,d_2)=(13,1)$

$(1,5,15,9,3,10,17,13,20,18,14,6,2,8,16,11,4,12,20,19)$...(共 6 種)固定一堆中的一組對邊，另外 4 個排列而另外一組中有 5 個排列並去除翻轉(除以 2)

（5）$(d_1,d_2)=(11,9)$

$(1,2,14,13,5,6,18,17,9,10,12,11,3,4,16,15,7,8,20,19)$ (共 1 種)固定一堆中的一組對邊，另外 4 個排列而另外一組中有 5 個排列並去除翻轉(除以 2)

（6）$(d_1,d_2)=(11,7)$

$(1,2,15,10,5,7,17,18,8,13,12,9,4,3,16,14,6,11,19,20)$...(共 2 種)固定一堆中的一組對邊，另外 4 個排列而另外一組中有 5 個排列並去除翻轉(除以 2)

（7）$(d_1,d_2)=(11,1)$

$(1,6,13,9,3,10,15,18,5,19,12,7,2,8,14,11,4,17,16,20)$...(共 21 種)固定一堆中的一組對邊，另外 4 個排列而另外一組中有 5 個排列並去除翻轉(除以 2)

（8）$(d_1,d_2)=(10,2)$

$(1,2,13,8,5,10,17,16,9,18,11,4,3,6,15,12,7,14,19,20)$...(共 2 種)固定一堆中的一組對邊，另外 4 個排列而另外一組中有 5 個排列並去除翻轉(除以 2)

（9）$(d_1,d_2)=(9,1)$

$(1,6,11,9,3,15,13,18,5,19,10,7,2,8,12,16,4,17,14,20)$...(共 36 種)固定一堆中的一組對邊，另外 4 個排列而另外一組中有 5 個排列並去除翻轉(除以 2)

（10）$(d_1,d_2)=(7,3)$

$(1,4,9,14,3,15,12,19,6,17,8,7,2,11,10,18,5,16,13,20)$...(共 24 種)固定一堆中的一組對邊，另外 4 個排列而另外一組中有 5 個排列並去除翻轉(除以 2)

（11）$(d_1,d_2)=(7,1)$

$(1,6,9,14,3,15,11,18,5,19,8,7,2,13,10,16,4,17,12,20)$...(共 28 種)固定一堆中的一組對邊，另外 4 個排列而另外一組中有 5 個排列並去除翻轉(除以 2)

（12）$(d_1,d_2)=(6,2)$

(1,4,8,14,3,13,11,19,10,18,7,6,2,12,9,15,5,17,16,20) ...(共 34 種)固定一堆中的一組對邊，另外 4 個排列而另外一組中有 5 個排列並去除翻轉(除以 2)

（13）$(d_1,d_2)=(5,3)$

$(1,2,12,8,13,5,18,11,17,14,4,7,9,3,16,10,15,6,20,19)$...(共 3 種)固定一堆中的一組對邊，另外 4 個排列而另外一組中有 5 個排列並去除翻轉(除以 2)

（14）$(d_1,d_2)=(5,1)$

$(1,11,7,14,3,15,9,18,5,19,6,12,2,13,8,16,4,17,10,20)$...(共 13 種)固定一堆中的一組對邊，另外 4 個排列而另外一組中有 5 個排列並去除翻轉(除以 2)

（15）$(d_1,d_2)=(3,1)$

$(1,8,5,12,3,14,10,18,13,19,4,9,2,11,6,15,7,17,16,20)$...(共 61 種)固定一堆中的一組對邊，另外 4 個排列而另外一組中有 5 個排列並去除翻轉(除以 2)

（16）$(d_1,d_2)=(10,10)$ (相同數字皆一種)

$(1,2,13,14,5,6,17,18,9,10,11,12,3,4,15,16,7,8,19,20)$ 固定一組對邊，另 9 個排列並去除翻轉(除以 2)

（17）$(d_1,d_2)=(5,5)$ (相同數字皆一種)

$(1,2,8,9,5,11,17,18,14,15,6,7,3,4,10,16,12,13,19,20)$ 固定一組對邊，另 9 個排列並去除翻轉(除以 2)

（18）$(d_1, d_2) = (2,2)$ (相同數字皆一種)

$(1,2,7,8,9,10,15,16,17,18,3,4,5,6,11,12,13,14,19,20)$ 固定一組對邊，另9個排列並去除翻轉(除以 2)

（19）$(d_1, d_2) = (1,1)$ (相同數字皆一種)

$(1,3,6,8,9,11,14,16,17,19,2,4,5,7,10,12,13,15,18,20)$ 固定一組對邊，另9個排列並去除翻轉(除以 2)

d_1	15	15	13	13	11	11	11	10	9	7
d_2	5	1	3	1	9	7	1	2	1	3
個數	$4!\times5!$	$4!\times5!$	$4!\times5!\times4$	$4!\times5!\times6$	$4!\times5!$	$4!\times5!\times2$	$4!\times5!\times21$	$4!\times5!\times2$	$4!\times5!\times36$	$4!\times5!\times24$
d_1	7	6	5	5	3	10	5	2	1	
d_2	1	2	3	1	1	10	5	2	1	
個數	$4!\times5!\times28$	$4!\times5!\times34$	$4!\times5!\times3$	$4!\times5!\times13$	$4!\times5!\times61$	9!	9!	9!	9!	